Aritmética y Álgebra

CUARTA EDICIÓN

$x = \sqrt{2}$



Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura



Federación Mundial de Clubes, Centros y Asociaciones UNESCO

CONAMAT MR
COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Aritmética y Álgebra

Cuarta edición

Arturo Aguilar Márquez
Fabián Valapai Bravo Vázquez
Herman Aurelio Gallegos Ruiz
Miguel Cerón Villegas
Ricardo Reyes Figueroa

REVISIÓN TÉCNICA

Ing. Carlos Lozano Sousa (M.Sc.)
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Estado de México

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

Autores: Aguilar Márquez, A.; Bravo Vázquez, F.; Gallegos Ruiz, H.; Cerón Villegas, M. y Reyes Figueroa, R.

Aritmética y Álgebra
CUARTA EDICIÓN, 2016

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2016
ISBN: 978-607-32-3582-2
Área: Matemáticas

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 712

Director general: Sergio Fonseca • **Director de innovación y servicios:** Alan David Palau • **Gerente de contenidos K-12:** Jorge Luis Íñiguez • **Gerente de arte y diseño:** Asbel Ramírez • **Coordinadora de contenidos de bachillerato y custom:** Lilia Moreno • **Especialista en contenidos de aprendizaje:** Ma. Elena Zahar • **Especialista en contenidos de aprendizaje Jr.:** Xitlally Alvarez • **Coordinadora de arte y diseño:** Mónica Galván • **Supervisor de arte y diseño:** Enrique Trejo • **Composición y diagramación:** Ediciones OVA

Editora sponsor: Ma. Elena Zahar Arellano
maria.zahar@pearson.com

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-3582-2
ISBN E-BOOK: 978-607-32-3583-9

CUARTA EDICIÓN, 2016

Avenida Antonio Dovalí Jaime No. 70,
Torre B, piso 6, Colonia Zedec, ED Plaza Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón, Distrito Federal
C.P. 01210

Impreso en México. *Printed in Mexico*.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 19 18 17 16

PEARSON

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031

www.pearsonenespañol.com

Para los que enseñan y para los que aprenden

Ing. Arturo Santana Pineda

El poder de las matemáticas

El que domina las matemáticas
piensa, razona, analiza y por ende
actúa con lógica en la vida cotidiana,
por tanto, domina al mundo.

Ing. Arturo Santana Pineda

Prólogo

Uno de los temas que sigue preocupando y ocupando a los académicos en las instituciones educativas de todo el mundo es el éxito en el aprendizaje de las Matemáticas, disciplina considerada fundamental en el desarrollo del pensamiento humano. No obstante, los resultados de las pruebas de rendimiento académico, tanto nacionales como internacionales, demuestran que el aprovechamiento, desafortunadamente, es deficiente.

Diversos organismos internacionales se han dado a la tarea de señalar la necesidad de investigar actividades adecuadas para atender esta prioridad en los diferentes sistemas educativos. Una de las que ha puesto más énfasis en este tema es la Federación Mundial de Clubes, Centros y Asociaciones (WFUCA) de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, por sus siglas en inglés).

Esta instancia tiene como finalidad fomentar la difusión de los principios de la Organización y los objetivos de la sociedad civil. Para tal fin, ha organizado foros y conferencias que promueven las acciones necesarias, con la intención de atender los temas relacionados con la calidad de la educación y el *Programa de educación para todos*.

En Villahermosa, Tabasco, durante el mes de noviembre de 2014, se llevaron a cabo los trabajos de la junta ejecutiva de los miembros de WFUCA. En ella, se acordó por unanimidad emprender las tareas de autoevaluación y acreditación de la calidad educativa. Estas acciones se sumaron a las iniciativas de los Ministros de Educación, quienes se reunieron en Lima, Perú, en octubre de ese mismo año.

En resumen, éstas consisten en impulsar los trabajos de investigación y difusión de programas y proyectos que contribuyan a promover la educación de todas las personas, sin importar la diferencia de edades, mientras asistan a la escuela.

Este propósito fue el impulso para convocar a diversas instituciones académicas a realizar el 1er. Foro Internacional de Calidad Educativa. Ahí se iniciaron los procesos de certificación y acreditación de los programas innovadores que están contribuyendo para el logro de este objetivo.

Fue también en este foro donde se conoció y valoró la labor significativa de enseñanza que lleva a cabo el Colegio Nacional de Matemáticas (CONAMAT), institución académica cuya columna vertebral es diseñar programas de nivelación y regularización en los 48 planteles que lo conforman con una comunidad estudiantil de más de un millón de alumnos.

Esta obra que ponemos en sus manos (que se deriva del libro *Matemáticas simplificadas*), es parte de la vasta oferta editorial y del arduo trabajo de 26 años de vida de esta institución de enseñanza, dignamente presidida por su director general, el Ing. Arturo Santana Pineda. En ella se plasma el trabajo pedagógico y las experiencias que han consolidado la carrera profesional de cada uno de sus autores.

Actualmente, *Matemáticas simplificadas* es una referencia obligada de consulta para el aprendizaje de las Matemáticas. A su importancia se suma su presencia en cada uno de los foros internacionales que se están realizando en América Latina y El Caribe para difundir las experiencias exitosas que contribuyen a una educación de calidad.

El objetivo principal de esta obra es promover el modelo pedagógico desarrollado en ella misma y en el cual está implícita la concepción de la educación del ingeniero Santana Pineda: "no sólo como la acción de la simple adquisición de conocimientos", sino que va más allá, pues implica la comprensión de la realidad social, política y económica en la que está inmerso el principal sujeto, el educando.

Esta obra reúne toda la experiencia de cada uno de sus autores, no sólo en el área de las Matemáticas, sino además en el ámbito de la docencia. Porque como docentes, poseen habilidades pedagógicas que los convierten en agentes efectivos del proceso de aprendizaje. Y son, a la par, fuente de conocimientos.

Por todo lo anterior, esta obra fue recientemente certificada por el Comité de Evaluación y Certificación de la Federación Mundial de Clubes, Centros y Asociaciones unesco (wfuca), durante el Foro Internacional "Calidad de la Educación Agenda unesco Post 2015", que se llevó a cabo en la ciudad de México, los días 12 y 13 de marzo de 2015.

Dr. Enrique Rentería Castro

Vicepresidente de La Federación Mundial de Clubes,
Centros y Asociaciones unesco,
Región América Latina y El Caribe

Prefacio

El Colegio Nacional de Matemáticas es una institución que, desde su fundación, ha impartido cursos de regularización en las áreas de Matemáticas, Física y Química, con resultados altamente satisfactorios. Es por ello que su fundador y director general, el Ingeniero Arturo Santana Pineda, decidió plasmar y compartir la experiencia adquirida en este libro que recopila lo aprendido en todos estos años y cuyo principio fundamental es que la persona que aprende matemáticas, piensa, razona, analiza y por tanto actúa con lógica.

A través de esta institución y sus docentes, se ha logrado no sólo resolver el problema de reprobación con el que llega el estudiante sino, también, cambiar su apreciación sobre la materia, de tal forma, que se va convencido de que es fácil aprender matemáticas y que puede incluso dedicarse a ellas. De ahí que jóvenes que han llegado con serios problemas en el área, una vez que descubren su potencial han decidido estudiar alguna carrera afín.

De esta forma, se decide unir a los docentes con mayor experiencia y trayectoria dentro de la institución para que conjuntamente escriban un libro que lejos de presunciones formales, muestre la parte práctica que requiere un estudiante al aprender matemáticas y que le sirva de refuerzo para los conocimientos adquiridos en el aula.

Enfoque

El libro tiene un enfoque 100% práctico, por lo que la teoría que se trata es lo más básica posible, sólo se abordan los conceptos básicos para que el estudiante comprenda y se ejercite en la aplicación de la teoría analizada en el aula, en su libro de texto y con su profesor.

De esta manera, se pone mayor énfasis en los ejemplos, en donde el estudiante tendrá la referencia para resolver los ejercicios que vienen al final de cada tema y poder así reafirmar lo aprendido. Estamos convencidos de que es una materia en la cual el razonamiento es fundamental para su aprendizaje, sin embargo, la práctica puede lograr que este razonamiento se dé más rápido y sin tanta dificultad.

Estructura

El libro está formado por 28 capítulos, los cuales llevan un orden específico tomando en cuenta siempre que el estudio de las Matemáticas se va construyendo, es decir, cada capítulo siempre va ligado con los conocimientos adquiridos en los anteriores.

Cada capítulo está estructurado con base en la teoría, ejemplos y ejercicios propuestos. Los ejemplos son desarrollados paso a paso, de tal forma que el lector pueda entender el procedimiento y posteriormente resolver los ejercicios correspondientes. Las respuestas a los ejercicios se encuentran al final del libro, de tal forma que el estudiante puede verificar si los resolvió correctamente y comprobar su aprendizaje. Por otro lado, en algunos capítulos aparece una sección de problemas de aplicación, la cual tiene como objetivo hacer una vinculación con casos de la vida cotidiana en donde se pueden aplicar los conocimientos adquiridos en cada tema.

En los capítulos 1 y 2 se abordan los temas básicos de la aritmética, desde la escritura de números, hasta las operaciones básicas de números enteros con sus respectivas aplicaciones.

En el capítulo 3 se estudia el concepto de divisibilidad, así como el de mínimo común múltiplo y máximo común divisor, se proponen también algunas aplicaciones.

Para los capítulos 4 y 5 tenemos los números racionales y decimales respectivamente, en ambos casos con sus diferentes operaciones y problemas de aplicación.

El capítulo 6 contiene definiciones, teoremas y operaciones con exponentes y radicales, así como un apartado de algoritmos para resolver raíces cuadradas y cúbicas.

En el capítulo 7 se presenta una introducción a los logaritmos y se aborda la notación científica, útil en la simplificación de operaciones con cantidades grandes o pequeñas.

Las razones y proporciones se abordan en el capítulo 8. Se tiene como objetivo principal que el estudiante pueda resolver reglas de tres y problemas con porcentajes.

En el capítulo 9 se estudian los sistemas de numeración, empezando por transformaciones en distintas bases pasando por operaciones en base diferente de 10. Se concluye con una breve reseña de los antiguos sistemas de numeración.

El capítulo 10 es el correspondiente al sistema métrico decimal y los números denominados, los cuales le darán al estudiante un concepto básico sobre las mediciones.

Para terminar la primera parte correspondiente al área de Aritmética, se concluye con el capítulo 11, razonamiento aritmético, donde se presentan problemas y se utilizan muchos de los conocimientos adquiridos en los capítulos anteriores.

La segunda parte del libro estudia los conocimientos de Álgebra, donde se inicia con el capítulo 12, que aborda la teoría de conjuntos y lógica, temas clave en el estudio de las Matemáticas; se dan definiciones básicas, operaciones con conjuntos, diagramas de Venn, proposiciones lógicas y algunos problemas de aplicación.

Los conceptos básicos del Álgebra, desde simplificación de términos semejantes, lenguaje algebraico, operaciones con polinomios y algunas aplicaciones de estos temas, se estudian en el capítulo 13.

En los capítulos 14 y 15 tenemos los productos notables y la factorización respectivamente, temas que son herramientas útiles en el desarrollo de los siguientes apartados, por lo que su estudio debe ser completo para poder facilitar el aprendizaje de otros temas. Ambos capítulos nos ligan directamente al capítulo 16 (fracciones algebraicas), en el cual se incluyen temas como el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, para pasar así al estudio de las fracciones, desde su simplificación hasta sus operaciones.

El capítulo 17 comprende ecuaciones de primer grado, en donde el objetivo es que el estudiante resuelva ecuaciones con una incógnita en sus diferentes formas, y pueda llegar a una de las grandes aplicaciones que tiene el Álgebra: el poder representar un problema de la vida real con una ecuación, la cual al resolverla dé solución a dicho problema. Al final, hay una sección para despejes de fórmulas, lo cual está relacionado con otras ramas de la ciencia no sólo con las Matemáticas.

La función lineal y algunas aplicaciones se estudian en el capítulo 18, para dar paso a los sistemas de ecuaciones en el capítulo 19, en el cual se ven los métodos para resolver un sistema de dos y tres ecuaciones con sus respectivos problemas de aplicación; termina el capítulo con solución de fracciones parciales.

En el capítulo 20 se estudia la potenciación, desde las definiciones y teoremas básicos como el desarrollo de binomios elevados a una potencia "n", ya sea por el teorema de Newton o por el de triángulo de Pascal. De aquí se sigue con el tema de radicación en el capítulo 21, donde se simplifican radicales y se resuelven operaciones con ellos. El capítulo 22 analiza los números complejos con su suma, resta, multiplicación y división.

El capítulo 23 corresponde a las ecuaciones de segundo grado —con sus métodos para resolverlas—, aplicaciones y sistemas de ecuaciones que contienen expresiones cuadráticas.

En el capítulo 24 se estudian las desigualdades lineales, cuadráticas, racionales y con valor absoluto.

Los logaritmos se introducen en el capítulo 25; su definición, forma exponencial, propiedades, aplicaciones, ecuaciones con logaritmos y exponenciales. Al final del libro se incluye una tabla para el cálculo de logaritmos y antilogaritmos.

En el capítulo 26, se estudian las progresiones, aritméticas y geométricas y, al final, se da una aplicación fmanciera con el tema de interés compuesto.

El capítulo 27 aborda el tema de matrices, las cuales se estudian por medio de su definición, operaciones y aplicaciones. También se da una introducción a los determinantes.

El contenido del capítulo 28 es el de raíces de un polinomio, en donde se estudia cómo obtenerlas, los teoremas de residuo y del factor, así como la obtención de la ecuación dadas sus raíces.

Agradecimientos

Según Benjamín Franklin, invertir en conocimientos produce siempre los mejores intereses, por lo que espero que obtengas, a través de este libro, las más grandes ganancias para tu futuro profesional.

Arturo Santana Pineda
Director General de CONAMAT

A mi madre por darme la vida y enseñarme a vivirla, a Chema, Yordan e Hiram los alumnos que se volvieron mis hermanos, a mi familia (Echeverría, Pineda y Sánchez), a Arturo Santana por permitirme estar en este espacio, a los cuatro fantásticos: Herman, Fabián, Ricardo y Miguel, fue un placer trabajar con ustedes. Moni, por contenerme la alegría y por estar en la ruta. André, mi hijo, mi estrella en el cielo. A mis alumnos que fueron y serán, y que me permitieron compartir y aprender con ellos. Gracias totales.

Arturo Aguilar Márquez

A mis padres María Elena y Álvaro, por brindarme la vida, por sus enseñanzas y consejos; a mi esposa e hijos (Ana, Liam y Daniel), porque son la razón de mi vida y mi inspiración; a mis hermanos Belem, Adalid y Tania por apoyarme incondicionalmente, a Tabatha, Noel y Alexis por el cariño que me brindan y sobre todo a mis compañeros y amigos: Ricardo, Miguel, Arturo y Herman.

Fabián Valapai Bravo Vázquez

Agradezco y dedico esta obra a la memoria de mi padre el Sr. Herman Gallegos Bartolo que me dio la vida y que por azares del destino ya no se encuentra con nosotros, a mi madre, a José Fernando, mi hijo, y a toda mi familia y amigos.

Herman A. Gallegos Ruiz

A toda mi familia muy en especial a Lupita y Agustín, por haberme dado la vida y ser un ejemplo a seguir; a mis hermanos Elizabeth y Hugo por quererme y soportarme, y a Matías por inspirarme. Quiero además, reconocer el esfuerzo de mis amigos y compañeros Arturo, Fabián, Herman y Ricardo con quien tuve la oportunidad de ver cristalizado este sueño.

Miguel Cerón Villegas

A mis padres Rosa y Gerardo, por darme la vida; a mis hermanos Javier, Gerardo y Arturo; un especial agradecimiento a mi esposa Ma. Mercedes; a mis hijos Ricardo y Allan por su sacrificio, comprensión y tolerancia; un reconocimiento a mis amigos Herman, Arturo A., Fabián, Miguel y Arturo S. por hacer realidad nuestro sueño.

Ricardo Reyes Figueroa

Un agradecimiento especial a los alumnos que tomaron clase con alguno de nosotros, ya que gracias a ellos logramos adquirir la experiencia para poder escribir este libro.

Los autores

Acerca de los autores

Arturo Aguilar Márquez. Llegó como estudiante al Colegio Nacional de Matemáticas, desarrolló habilidades y aptitudes que le permitieron incorporarse a la plantilla de docentes de la institución. Realizó estudios de Actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México y ha impartido clases de Matemáticas por más de 18 años en CONAMAT.

Fabián Valapai Bravo Vázquez. Desde muy temprana edad, con la preparación de profesores de CONAMAT, participó en concursos de matemáticas a nivel nacional. Posteriormente, se incorporó a la plantilla docente de la misma institución donde ha impartido la materia de Matemáticas durante 20 años. Al mismo tiempo, estudió la carrera de Diseño Gráfico en la Escuela Nacional de Artes Plásticas.

Herman Aurelio Gallegos Ruiz. Se inició como profesor en CONAMAT. Realizó estudios en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional y Actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Ha impartido clases de Matemáticas y Física por más de 23 años en el Colegio Nacional de Matemáticas.

Miguel Cerón Villegas. Es egresado de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del Instituto Politécnico Nacional, realizó estudios de Ingeniería Industrial y tiene más de 23 años de experiencia en docencia.

Ricardo Reyes Figueroa. Inició su trayectoria en la disciplina de las Matemáticas tomando cursos en CONAMAT. Dejando ver su gran capacidad para transmitir el conocimiento, se incorpora como docente en la misma institución donde ha impartido la materia de Matemáticas y Física durante 26 años. Realizó sus estudios de Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, y de Matemáticas Puras en la Universidad Autónoma Metropolitana.

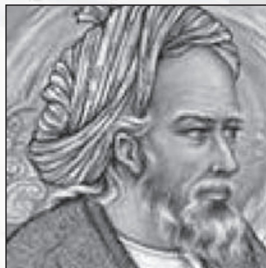
Contenido

Aritmética

Capítulo 1

Números reales

Reseña HISTÓRICA



Los números naturales tienen su origen en una necesidad tan antigua como lo son las primeras civilizaciones: la necesidad de contar.

El hombre primitivo identificaba objetos con características iguales y podía distinguir entre uno y otro; pero no le era posible captar la cantidad a simple vista. Por ello empezó a representar las cantidades mediante marcas en huesos, trozos de madera o piedra; cada marca representaba un objeto observado, así concibió la idea del número.

Para el siglo X d. C. el matemático y poeta Omar Khayyam estableció una teoría general de número y añadió algunos elementos a los números racionales, como son los irracionales, para que pudieran ser medidas todas las magnitudes.

Sólo a finales del siglo XIX se formalizó la idea de continuidad y se dio una definición satisfactoria del conjunto de los números reales; los trabajos de Cantor, Dedekind, Weierstrass, Heine y Meray, entre otros, destacan en esta labor.

Omar Khayyam
(1048-1122)

Clasificación

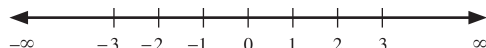
El hombre ha tenido la necesidad de contar desde su aparición sobre la Tierra hasta nuestros días, para hacerlo se auxilió de los números 1, 2, 3, 4, 5,…, a los que llamó números naturales. Números que construyó con base en el principio de adición; sin embargo, pronto se dio cuenta de que este principio no aplicaba para aquellas situaciones en las que necesitaba descontar. Es entonces que creó los números negativos, así como el elemento neutro (cero), que con los números naturales forman el conjunto de los números enteros, los cuales son:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Asimismo, se percató que al tomar sólo una parte de un número surgían los números racionales, que se expresan como el cociente de 2 números enteros, con el divisor distinto de cero, ejemplo: $\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{0}{5}, \frac{6}{1}, -\frac{8}{2}, \ldots$

Aquellos números que no es posible expresar como el cociente de 2 números enteros, se conocen como números irracionales: $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{81}, \pi, \ldots$

Al unir los números anteriores se forman los números reales, los cuales se representan en la recta numérica.



Propiedades

Los números reales son un conjunto cerrado para la suma y la multiplicación, lo que significa que la suma o multiplicación de números reales da como resultado otro número real. De lo anterior se desprenden las siguientes propiedades:

Propiedad	Suma	Multiplicación	Ejemplos
Cerradura	$a + b \in R$	$a \cdot b \in R$	$3 + 5 = 8 \in R$ $(2)(-3) = -6 \in R$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$ $(2)\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)(2)$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$	$\sqrt{5} + (3 + 4) = (\sqrt{5} + 3) + 4$ $3 \cdot (2 \cdot 5) = (3 \cdot 2) \cdot 5$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	$5 + 0 = 5$ $7 \cdot 1 = 7$
Inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$	$2 + (-2) = 0$ $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$
Distributiva	$a(b + c) = ab + ac$		$2(7 + 3) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$ $5 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 5(4 + 8)$

EJERCICIO 1

Identifica y escribe el nombre de la propiedad a la que se hace referencia.

1. $3+(-3)=0$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)(4)=(4)\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $(8)(-3)=-24 \in R$
4. $7\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 4\right)=\left(7\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 4$
5. $-\frac{3}{4}+0=-\frac{3}{4}$
6. $4(-3+5)=4(-3)+4(5)$
7. $\frac{1}{\sqrt{7}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=0$
8. $(-3)+(-8)=-11 \in R$
9. $-\frac{2}{4}+\frac{5}{9}=\frac{5}{9}+\left(-\frac{2}{4}\right)$
10. $3+\left(-2+\sqrt{7}\right)=\left(3+(-2)\right)+\sqrt{7}$
11. $2\cdot\sqrt{3}+2\cdot 7=2\left(\sqrt{3}+7\right)$
12. $-8\cdot 1=-8$
13. $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}}=1$
14. $-\sqrt{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\left(-\sqrt{2}\right)$
15. $(8)(4)=(4)(8)$
16. $5\cdot(3\cdot 6)=(5\cdot 3)\cdot 6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Lectura y escritura

Un número en el sistema decimal se escribe o se lee con base en la siguiente tabla:

Billones			Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
Centenas de billón	Decenas de billón	Unidades de billón	Centenas de millares de millón	Decenas de millares de millón	Unidades de millares de millón	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades

En la tabla, los billones, millares de millón, millones, millares y unidades reciben el nombre de periodos, los que a su vez se dividen en clases y cada una de éstas se forma por unidades, decenas y centenas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Lee el número 37.

Solución

37 se acomoda de derecha a izquierda en el periodo de las unidades.

Unidades		
Centenas	Decenas	Unidades
	3	7

Al número dado lo forman 3 decenas y 7 unidades y se lee: "treinta y siete".

2 Lee el número 824.

Solución

824 se acomoda de derecha a izquierda en el periodo de las unidades.

Unidades		
Centenas	Decenas	Unidades
8	2	4

Al número lo forman 8 centenas, 2 decenas y 4 unidades. Se lee: "ochocientos veinticuatro".

3 Lee el número 37 643.

Solución

Se acomoda en los periodos de los millares y las unidades.

Millares			Unidades		
Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
	3	7	6	4	3

El número se lee: "treinta y siete mil seiscientos cuarenta y tres".

4 Lee el número 52 384 273.

Solución

Se acomoda en los periodos de los millones, millares y unidades.

Millones			Millares			Unidades		
Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
	5	2	3	8	4	2	7	3

Se lee: "cincuenta y dos millones trescientos ochenta y cuatro mil doscientos setenta y tres".

5 Lee el número 962 384 502 936 114.

Solución

Se acomodan en los periodos desde las unidades a los billones.

Billón			Millar de millón			Millón			Millares			Unidades		
Centenas de billón	Decenas de billón	Unidades de billón	Centenas de millar de millón	Decenas de millar de millón	Unidades de millar de millón	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
9	6	2	3	8	4	5	0	2	9	3	6	1	1	4

Se lee: "novecientos sesenta y dos billones, trescientos ochenta y cuatro mil quinientos dos millones, novecientos treinta y seis mil ciento catorce".

EJERCICIO 2

Escribe con letras las siguientes cifras.

1. 45
2. 80
3. 523
4. 770
5. 597
6. 8 302
7. 9 016
8. 20 018
9. 11 011
10. 9 072
11. 12 103
12. 22 500
13. 34 480
14. 108 214
15. 3 084 000
16. 1 215 364
17. 5 683 040
18. 13 000 075

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para escribir numéricamente una cantidad, se identifican los periodos y las clases de dicho número como lo ilustran los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa cuatrocientos ochenta y siete numéricamente.

Solución

Este número sólo abarca el periodo de las unidades y se forma por cuatro centenas (400), ocho decenas (80) y siete unidades (7), al aplicar el principio aditivo el número es:

$$\begin{array}{rcr} \text{cuatrocientos} & & 400 \\ \text{ochenta} & + & 80 \\ \text{siete} & & 7 \\ \hline & & 487 \end{array}$$

2 Escribe con número: siete mil cuatrocientos treinta y cinco.

Solución

La cantidad abarca hasta el periodo de los millares, entonces:

siete mil		7 000
cuatrocientos	+	400
treinta		30
cinco		5
		7 435

3 Expresa numéricamente: doscientos noventa y nueve millones setecientos ocho.

Solución

La cantidad abarca hasta el periodo de los millones, entonces:

doscientos millones		200 000 000
noventa millones		90 000 000
nueve millones	+	9 000 000
setecientos		700
ocho		8
		299 000 708

EJERCICIO 3

Representa numéricamente:

1. Quinientos veintiuno.
2. Dieciséis mil.
3. Mil doscientos noventa y nueve.
4. Treinta y cinco mil.
5. Ocho mil cuatrocientos.
6. Seiscientos uno.
7. Setecientos mil ciento treinta y ocho.
8. Un millón quinientos veintisiete mil cuatrocientos veintiocho.
9. Un millón ciento ocho mil doce.
10. Ciento cuarenta y cuatro millones, ciento cuarenta y cuatro.
11. Ciento dieciséis millones, trescientos ochenta y seis mil quinientos catorce.
12. Quinientos cinco millones doscientos diez.


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Orden

Este conjunto se ordena con base en las siguientes relaciones de orden:

< menor que   > mayor que   = igual que

Ejemplos

$3 < 8$; 3 es menor que 8 $\quad 12 > -7$; 12 es mayor que -7 $\quad \frac{18}{2} = 9$; $\frac{18}{2}$ es igual que 9

- **Postulado de tricotomía**
  Si $a, b \in R$, entonces al compararlos se pueden presentar los siguientes casos:

$$a > b \qquad a < b \qquad a = b$$

- **Postulado transitivo**
  Sean $a, b, c \in R$, si $a > b$ y $b > c$ entonces:

$$a > c$$

- **Postulado aditivo**
  Para $a, b, c \in R$, si $a > b$, entonces:

$$a + c > b + c$$

- **Postulado multiplicativo**
  Sean $a, b, c \in R$, con $a > b$,

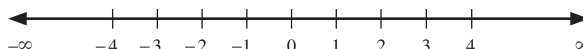
si $c > 0$ (c es positivo), entonces $ac > bc$.

si $c < 0$ (c es negativo), entonces $ac < bc$.

Otra forma para comparar los números reales es colocarlos en la recta numérica. Si el número a se encuentra a la derecha de b, entonces $a > b$, pero, si se encuentra a la izquierda, entonces $a < b$.

Ejemplos

Observe la siguiente recta numérica:



Se puede afirmar que:

$4 > 1$, "4" se encuentra a la derecha de "1" $\qquad 2 > -2$, "2" está a la derecha de "−2"

$-3 < -1$, "−3" está a la izquierda de "−1" $\qquad -3 < 0$, "−3" está a la izquierda de "0"

En general, cualquier número negativo es menor que cero o que cualquier positivo, ya que se encuentran a la izquierda de estos números en la recta real o numérica.

EJERCICIO 4

Compara las siguientes cantidades y coloca los símbolos: >, < o =, según corresponda.

1. 28 y 35
2. 1 125 y 1 105
3. −372 y 372
4. −483 y −840
5. 5 397 y −1 284
6. −844.5 y 0
7. $\frac{8}{4}$ y 2
8. 12 000 y 120 000
9. −1 000 000 y −100 000
10. $\frac{121}{11}$ y $\frac{44}{4}$
11. $-\frac{7}{3}$ y 1.5
12. 0.5 y $-\frac{1273}{9}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para comparar dos números racionales se realiza un producto cruzado, como se ejemplifica a continuación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Compara $\frac{7}{8}$ y $\frac{5}{6}$.

Solución

Se realiza el siguiente procedimiento:

Se multiplica el numerador 7 de la primera fracción por el denominador 6 de la segunda y el producto se coloca debajo de la primera fracción; enseguida se realiza la multiplicación del denominador 8 de la primera fracción por el numerador 5 de la segunda y el producto se coloca debajo de la segunda fracción, el resultado de los productos se compara y se coloca el signo correspondiente.

$$\frac{7}{8} \text{ y } \frac{5}{6}$$
$$(7)(6) \quad (5)(8)$$
$$42 > 40$$

El signo entre 42 y 40 es el mismo para los números racionales, por tanto: $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$

2 Compara $-\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{8}$.

Solución

Se realizan los pasos del ejemplo anterior y se obtiene:

$$-\frac{2}{3} \text{ y } -\frac{1}{8}$$
$$(8)(-2) \quad (3)(-1)$$
$$-16 < -3$$

Por tanto: $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{8}$

EJERCICIO **5**

Compara las siguientes cantidades y coloca los símbolos >, < o =, según corresponda.

1. $\frac{2}{3}$ ___ $\frac{1}{4}$
2. $\frac{3}{5}$ ___ $\frac{7}{8}$
3. $-\frac{1}{6}$ ___ $-\frac{1}{2}$
4. $\frac{7}{9}$ ___ $\frac{21}{27}$
5. $\frac{11}{4}$ ___ $\frac{12}{5}$
6. $\frac{6}{4}$ ___ $\frac{18}{12}$
7. $-\frac{7}{7}$ ___ 0
8. $-\frac{5}{10}$ ___ $\frac{13}{26}$
9. $\frac{5}{2}$ ___ 1
10. $\frac{17}{6}$ ___ 3
11. -3 ___ $-\frac{39}{13}$
12. $\frac{4}{3}$ ___ $\frac{4}{9}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Valor absoluto de un número

Es la distancia que existe desde cero hasta el punto que representa a dicha cantidad en la recta numérica. El valor absoluto de un número a se representa como $|a|$.

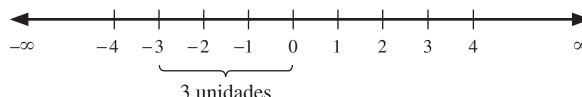
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el valor absoluto de -3.

Solución

Se representa -3 en la recta numérica:

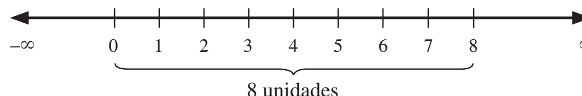


De cero a -3 se observa que hay 3 unidades de distancia, por tanto, el valor absoluto de -3 es igual a 3 y se representa como: $|-3| = 3$.

2 Encuentra el valor de $|8|$.

Solución

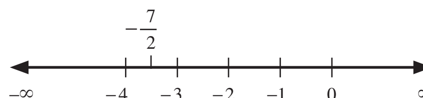
En la recta numérica la distancia entre el origen y 8 es de 8 unidades, por consiguiente, $|8| = 8$



3 ¿Cuál es el valor absoluto de $\left|-\frac{7}{2}\right|$?

Solución

En la recta numérica hay siete medios de distancia entre el cero y el punto dado, por tanto: $\left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$



EJERCICIO 6

Determina:

1. $\lvert -10 \rvert$	4. $\left\lvert \frac{5}{2} \right\rvert$	7. $\left\lvert -\frac{13}{9} \right\rvert$	10. $\lvert -6.8 \rvert$
2. $\left\lvert \frac{7}{4} \right\rvert$	5. $\left\lvert -\frac{1}{3} \right\rvert$	8. $\left\lvert \frac{9}{3} \right\rvert$	11. $\lvert 0 \rvert$
3. $\lvert -9 \rvert$	6. $\lvert -2.5 \rvert$	9. $\lvert 3.2 \rvert$	12. $\lvert -0.0001 \rvert$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Valor absoluto y relativo del sistema posicional decimal

El sistema decimal emplea los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que al combinarlos mediante ciertas reglas pueden representar cualquier cantidad. En este sistema las unidades se agrupan de 10 en 10, razón por la cual recibe su nombre.

Para nombrar cifras mayores que 9 se emplea el principio posicional y aditivo.

En el principio posicional el valor absoluto de un dígito es el número que representa, y su valor relativo es el que adquiere de acuerdo con la posición que tiene en el número.

Ejemplo

En el número 4 342, el valor absoluto y relativo de cada dígito es:

Dígito	Valor absoluto	Valor relativo
2	2	2
4	4	40
3	3	300
4	4	4 000

En la tabla anterior se observa que el dígito 4 tiene distintos valores relativos, como consecuencia de la posición que ocupa en el número.

EJERCICIO 7

Determina cuál es el valor absoluto y relativo de los dígitos que se indican en los siguientes números:

Número	Valor absoluto	Valor relativo
1. 13		
2. 89		
3. 372		
4. 1 524		
5. 7 893		
6. 15 278		
7. 42 939		
8. 153 975		
9. 794 568		
10. 1 502 734		
11. 12 364 568		
12. 157 103 000		

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

De acuerdo con el principio aditivo toda cantidad o número mayor que 9, en el sistema decimal, se expresa como la suma de los valores relativos, la cual se denomina forma desarrollada. Analicemos los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en forma desarrollada 72 435.

Solución

Se obtienen los valores relativos de cada uno de los dígitos que conforman el número:

Dígito	Valor relativo
5	5
3	30
4	400
2	2 000
7	70 000

Por lo tanto, su forma desarrollada es:

$$72\,435 = 70\,000 + 2\,000 + 400 + 30 + 5$$

2 Expresa el número 1 023 000 en forma desarrollada.

Solución

$$1\,023\,000 = 1\,000\,000 + 20\,000 + 3\,000$$

3 Expresa en forma desarrollada el número 373 894.

Solución

$$373\,894 = 300\,000 + 70\,000 + 3\,000 + 800 + 90 + 4$$

EJERCICIO 8

Expresa en forma desarrollada los siguientes números:

1. 75
2. 132
3. 428
4. 510
5. 3 002
6. 7 491
7. 15 204
8. 32 790
9. 49 835
10. 246 932
11. 300 000
12. 475 314
13. 120 983
14. 1 320 865
15. 3 742 958

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

CAPÍTULO 2

NÚMEROS ENTEROS

Reseña HISTÓRICA



Durante los siglos VI y VII, los hindúes fueron los pioneros en usar las cantidades negativas como un medio para representar las deudas.

No obstante su uso en esos siglos, la aceptación del concepto de número negativo en Occidente fue un proceso de una lentitud sorprendente, ya que, por varios siglos, los números negativos no fueron considerados como cantidades verdaderas, debido a la imposibilidad de representarlos en el mundo físico.

Finalmente, y con mucha dificultad, los números negativos fueron considerados en la resolución de ecuaciones, según se refleja en los escritos del matemático italiano Gerónimo Cordano: "Olvidad las torturas mentales que esto os producirá e introducid estas cantidades en la ecuación".

En el siglo XIX aún existía entre los matemáticos de Occidente una gran desconfianza en el manejo de las cantidades matemáticas, hasta que en el mismo siglo Weierstrass hizo la construcción formal de los números enteros a partir de los números naturales.

Karl Weierstrass
(1815-1897)

Suma

En esta operación los elementos reciben el nombre de sumandos y el resultado suma o adición. La suma o adición de números enteros se efectúa sólo si los signos de los números son iguales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $3 + 9$?

Solución

En esta operación ambos sumandos tienen el mismo signo (+), por lo tanto, se suman sus valores absolutos y el signo del resultado es el mismo (+).

$$3 + 9 = 12$$

2 Realiza $-5 - 1 - 3$.

Solución

Los números tienen el mismo signo (−), por consiguiente, se suman sus valores absolutos y el signo del resultado es el mismo que el de los sumandos (−).

$$-5 - 1 - 3 = -9$$

Para sumar números de dos o más dígitos, los sumandos se ordenan en forma vertical para hacer coincidir las respectivas clases y se realiza la operación, columna por columna y de derecha a izquierda.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la operación $325 + 63$.

Solución

Se acomodan de manera vertical y se realiza la operación:

$$\begin{array}{r} 325 \\ +\ \ 63 \\ \hline 388 \end{array}$$

Por tanto, el resultado de la operación es 388

2 El resultado de $-1\,533 - 2\,980 - 537$ es:

Solución

Al hacer coincidir las clases y sumar se obtiene:

$$\begin{array}{r} -1\,533 \\ -2\,980 \\ -\ \ \ 537 \\ \hline -5\,050 \end{array}$$

El resultado de la operación es $-5\,050$

EJERCICIO 9

Efectúa las siguientes operaciones:

1. 364 + 93
2. 4 050 + 2 019 + 310
3. 11 207 + 5 874 + 453 + 96
4. 102 396 + 11 375 + 1 117 + 60
5. 1 123 005 + 2 475 727 + 704 973 + 53 200
6. 7 000 000 + 648 000 + 53 047 + 4 200 + 600
7. −242 − 563
8. −1 250 − 398
9. −6 359 − 4 872 − 45
10. −372 001 − 200 000 − 50 007 − 14 304
11. −13 275 009 − 4 000 529 − 363 571 − 42 500 − 95
12. −512 013 419 − 23 642 000 − 1 253 421 − 683 125

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una empresa cobra 12% sobre los ingresos mensuales de 5 franquicias. La cantidad que paga cada una es: $45 400, $38 900, $72 300, $58 600 y $92 100, ¿qué cantidad recibió la empresa en un mes?

Solución

Para determinar cuánto recibió la empresa se realiza la suma de las cantidades pagadas:

$$\begin{array}{r} 45\ 400 \\ 38\ 900 \\ +\quad 72\ 300 \\ 58\ 600 \\ \underline{92\ 100} \\ 307\ 300 \end{array}$$

Por consiguiente, la empresa recibió $307 300

2 Una persona le adeuda a su tarjeta de crédito $6 000 y realiza con ella un pago de $2 500, si el banco le cobra $500 de intereses y recargos, ¿cuál es el nuevo saldo de la tarjeta?

Solución

Los adeudos de la persona se representan con cantidades negativas; entonces, para obtener su nuevo saldo se efectúa la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} -6\ 000 \\ -2\ 500 \\ -\ \underline{\quad 500} \\ -9\ 000 \end{array}$$

El signo negativo del resultado indica que la persona le adeuda al banco $9 000

EJERCICIO 10

Resuelve las siguientes operaciones:

1. Leticia tiene 15 años actualmente, ¿qué edad tendrá dentro de 22 años?
2. Uriel se ha preparado durante toda su vida, invirtió 2 años en el nivel preescolar, 6 en primaria, 3 en secundaria, 3 en el bachillerato, 5 más en la licenciatura y, finalmente, 3 años en un posgrado. ¿Durante cuántos años estudió Uriel?
3. Luis ganó $1 500 en febrero, $3 500 en marzo, $2 800 en abril, $2 200 en el siguiente mes, ¿cuánto dinero ganó en total?
4. Carlos nació en 1978, a la edad de 26 años se graduó en la carrera de ingeniería y 2 años después se casó. ¿En qué años se verificaron estos 2 sucesos?
5. Efraín nació en 1960, se casó a los 28 años, a los 3 años de matrimonio nació su único hijo. Si Efraín falleció cuando su hijo tenía 14 años, ¿en qué año ocurrió su fallecimiento?
6. Un automóvil realiza un viaje en tres etapas para ir de una ciudad a otra: en la primera etapa recorre 210 kilómetros, en la segunda 180 y en la última 360, ¿qué distancia existe entre las ciudades?
7. En una carrera de automóviles, el automóvil que lleva la delantera ha recorrido 640 kilómetros; si para llegar a la meta le faltan 360 kilómetros, ¿cuál es la distancia que deben recorrer todos los automóviles para finalizar la competencia?
8. Una editorial publica 12 000 ejemplares de un libro de álgebra, 8 000 de uno de geometría analítica y 10 700 de uno de cálculo diferencial e integral, ¿cuántos libros de las tres áreas publica en total?
9. Una persona ingiere en el desayuno un jugo de naranja con 20 calorías de contenido energético, unos huevos fritos de 800 calorías, una rebanada de pan con 50 calorías y un cóctel de frutas de 150 calorías, ¿cuántas calorías consume en total?
10. Cierto famoso jugador de futbol nació en 1966, a los 17 años ganó el mundial juvenil, a los 24 el mundial de primera fuerza, 4 años más tarde perdió una final de campeonato mundial y 3 años después se retiró del futbol, ¿cuál fue el año de su retiro?
11. En un día en la Antártica el termómetro marca una temperatura de 35 °C bajo cero y el pronóstico meteorológico indica que en las siguientes horas la temperatura descenderá 18 °C más, ¿cuál es la nueva temperatura que registrará el termómetro?
12. Una empresa reporta en los últimos 4 meses las siguientes pérdidas: $330 000, $225 000, $400 000 y $155 000, ¿a cuánto asciende el monto total de las pérdidas?

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Resta

Es la operación inversa de la suma o adición. Los elementos de una resta son el minuendo (+), sustraendo (−) y la diferencia.

$$\begin{array}{r l} a & \longleftarrow \text{Minuendo} \\ -b & \longleftarrow \text{Sustraendo} \\ \hline c & \longleftarrow \text{Diferencia} \end{array}$$

➡ Cuando se restan 2 números enteros la diferencia lleva el signo del entero de mayor valor absoluto, como lo muestran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $9 - 7$.

Solución

Se efectúa la operación y el resultado lleva el signo del número con mayor valor absoluto.

$$9 - 7 = 2$$

El resultado de la operación es 2

2 ¿Cuál es el resultado de $3 - 4$?

Solución

Se realiza la operación $4 - 3 = 1$, y al resultado se le antepone el signo negativo, debido a que el número de mayor valor absoluto es negativo, por tanto:

$$3 - 4 = -1$$

➡ Si los números son de dos o más dígitos, entonces se acomodan de manera vertical para que coincidan las clases y se efectúan las operaciones, columna por columna, de derecha a izquierda:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza: $289 - 47$.

Solución

Las cantidades se acomodan de manera vertical y el resultado lleva el mismo signo que 289, ya que es el número de mayor valor absoluto.

$$\begin{array}{r} 289 \\ -\ 47 \\ \hline 242 \end{array}$$

Por consiguiente: $289 - 47 = 242$

2 A qué es igual $-425 + 379$.

Solución

Se efectúa la diferencia de $425 - 379$ y al resultado se le antepone el signo negativo.

$$\begin{array}{r} 425 \\ -\ 379 \\ \hline 46 \end{array}$$

Por tanto, $-425 + 379 = -46$

3 El resultado de $-6 - 3 - 2 + 8 + 1$ es:

Solución

Se suman las cantidades que tienen el mismo signo.

$$-6 - 3 - 2 = -11 \qquad 8 + 1 = 9$$

Entonces: $-6 - 3 - 2 + 8 + 1 = -11 + 9$

Se realiza la resta y se obtiene el resultado final: $-6 - 3 - 2 + 8 + 1 = -11 + 9 = -2$

4 Realiza: −8 + 12 − 3 + 9 − 1 − 15 + 7.

Solución

Para obtener el resultado, primero se agrupan los números del mismo signo.

$$-8 + 12 - 3 + 9 - 1 - 15 + 7 = -8 - 3 - 1 - 15 + 12 + 9 + 7$$

Los números de igual signo se suman y posteriormente se restan:

$$= -27 + 28$$
$$= 1$$

EJERCICIO 11

Realiza las siguientes operaciones:

1. −2 + 6
2. −7 + 4
3. −9 + 11
4. −20 + 15
5. 15 − 23
6. 49 − 35
7. −8 + 8
8. −14 + 25
9. 105 − 143
10. −1 024 + 958
11. −2 − 5 + 8
12. −13 − 15 + 6 + 11
13. −9 − 7 − 8 − 2 + 5 + 4 + 11
14. −6 − 10 − 3 + 12 + 13 + 14
15. 13 − 2 − 5 − 9 − 1 + 8 − 11
16. 25 + 23 − 8 − 7 − 4 − 3
17. 14 + 15 + 18 − 7 − 3 − 20
18. 100 − 6 − 5 − 4 − 3 − 42 − 51
19. 47 − 12 + 7 − 9 − 1
20. −6 + 8 + 4 − 2 − 5 + 3 − 2 + 10
21. −3 + 6 − 2 + 4 − 7 + 10
22. 5 − 6 + 9 − 7 − 3 + 10 + 11
23. −1 + 2 − 3 + 4 − 5 + 6 − 7 + 8 − 9
24. 15 − 10 − 3 + 18 − 20 + 9 − 2
25. 1 − 2 − 3 − 5 + 6 − 7 + 10 + 11 − 13
26. 4 − 3 − 2 + 6 + 1 − 5 + 4 − 8 − 9
27. 531 − 120 − 402 + 101
28. −853 + 45 + 73 + 183 + 2 − 166
29. 9 031 − 1 217 − 1 902 + 4 701 − 18
30. 1 432 + 17 913 − 19 935 − 2 001 − 7 034


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Al comprar un televisor de \$2 809 a crédito, hay que dar un anticipo de \$748 y el resto se paga a 6 meses, ¿cuánto resta para terminar de pagar el televisor?

Solución

Al costo del televisor se le resta el anticipo para saber cuánto falta por pagar:

$$\begin{array}{r} 2\,809 \\ -\underline{\quad 748} \\ 2\,061 \end{array}$$

Por tanto, resta pagar \$2 061

EJERCICIO 12

Resuelve las siguientes operaciones:

1. En un colegio hay una población de 800 alumnos, de ellos 430 son varones, ¿cuántas mujeres hay en la escuela?
2. ¿Cuánto dinero le falta a Ernesto si su ahorro es de \$12 000 para comprar un automóvil que cuesta \$35 000?
3. Ángel al vender su casa en \$250 000, obtiene una ganancia de \$13 000, ¿cuánto le había costado su casa?
4. La suma de las edades de Laura y Carina es de 48 años, si Laura tiene 25 años, ¿cuál es la edad de Carina?
5. Si Fernanda tuviera 8 años menos tendría 35 y si Guillermo tuviera 10 años más tendría 25, ¿cuánto más joven es Guillermo que Fernanda?
6. Una cuenta de ahorro tiene un saldo de \$2 500, si se efectúa un retiro de \$1 500 y se cobra una comisión de \$7 por disposición ¿cuánto queda disponible en la cuenta?
7. Un rollo de tela tiene una longitud de 40 metros, el lunes se vendieron 3, el martes 8, el miércoles 5 y el jueves 6, ¿cuántos metros de tela quedan para vender el resto de la semana?
8. Un atleta debe cubrir una distancia de 10 000 metros, si recorre 5 850, ¿qué distancia le falta recorrer?
9. Juan solicitó un préstamo de \$20 000: el primer mes abonó \$6 000, el segundo \$4 000, y en el tercero \$5 500, ¿cuánto le falta pagar para cubrir su adeudo?
10. La edad de Abigail es de 31 años, la de Mario es de 59 y la diferencia de las edades de Carmen y Clara es de 37 años, ¿en cuánto excede la suma de las edades de Abigail y Mario a la diferencia de las de Carmen y Clara?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta con signos de agrupación

Al realizar sumas y restas de números enteros que tienen signos de agrupación, primero es necesario eliminar dichos signos, para hacerlo debes seguir el siguiente procedimiento:

- Si a un signo de agrupación lo precede un signo positivo, el número entero que encierra conserva su signo. Analicemos los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $(-8)+(-3)$?

Solución

Puesto que ambos signos de agrupación están precedidos por signos positivos, entonces se suprimen y se realiza la operación para obtener el resultado:

$$(-8)+(-3)=-8-3=-11$$

2 Efectúa $(+6)+(-8)$.

Solución

Al estar precedidos por signos positivos, ambos enteros conservan su signo y se obtiene como resultado:

$$(+6)+(-8)=6-8=-2$$

➲ Si un signo de agrupación es precedido por un signo negativo, entonces el entero que encierra cambia su signo:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve $-(14)-(-10)$.

Solución

A los signos de agrupación le anteceden signos negativos, entonces se deben cambiar los signos de los enteros y realizar la operación que resulta.

$$-(14)-(-10)=-14+10=-4$$

El resultado de la operación es -4

2 ¿Cuál es el resultado de $(-6)+(-3)-(-11)$?

Solución

Se aplican los procedimientos correspondientes a cada signo de agrupación y se procede a efectuar la operación con enteros:

$$(-6)+(-3)-(-11)=-6-3+11=-9+11=2$$

3 Obtén el resultado de $(6-8)+(5-2)$.

Solución

Una forma de realizar la operación es efectuar las operaciones que encierran cada uno de los signos de agrupación:

$$(6-8)+(5-2)=(-2)+(3)$$

Se aplican los criterios mencionados y se realizan las operaciones pertinentes para obtener el resultado:

$$=-2+3=1$$

4 Realiza $(8-3)-(-4+6)+(2-7-3)+5$.

Solución

Otra forma de obtener el resultado es aplicar los criterios para cada una de las cantidades contenidas en cada signo de agrupación y, posteriormente, las operaciones con números enteros correspondientes.

$$\begin{aligned}(8-3)-(-4+6)+(2-7-3)+5&=8-3+4-6+2-7-3+5\\&=8+4+2+5-3-6-7-3\\&=19-19\\&=0\end{aligned}$$

5 ¿Cuál es el resultado de $[(-8+6)-(-3-2)]+[4-(2-1)]$?

Solución

Se efectúan las operaciones contenidas en los paréntesis:

$$[(-8+6)-(-3-2)]+[4-(2-1)]=[(-2)-(-5)]+[4-(1)]$$

Se eliminan los paréntesis y se realizan las operaciones que encierran los corchetes:

$$\begin{aligned}&=[-2+5]+[4-1]\\&=[3]+[3]\\&=3+3\\&=6\end{aligned}$$

EJERCICIO 13

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $(3) + (12)$
2. $(-6) + (-2)$
3. $-(-15) - (-9)$
4. $8 + (13)$
5. $(15) + (-8)$
6. $(-4) - (-2)$
7. $-6 - (-5)$
8. $(11) + (8)$
9. $(-9) + (-1) - (-10)$
10. $(11) - (13) + (-16)$
11. $-(-24) + (-13) - (9)$
12. $-(7) + (-3) - (-16)$
13. $9 - (-6) + (-12)$
14. $(3) - (6) + (-5) - (-8)$
15. $9 - (5) + (-3) - (11)$
16. $(8 + 5) - (-13 + 2)$
17. $(-3 - 9) - (8 + 7)$
18. $15 - (4 + 6) + (-3 -7)$
19. $(9 + 5) - (8 - 11) - 19$
20. $(8 - 25) - (8 + 5) + (13 + 11)$
21. $-(5 - 7) + (16 + 3) - (4 + 7)$
22. $-(-7 - 2) + (6 + 4) - (-3) - 4$
23. $1 - (-3 - 2 + 8) + (2 + 3 + 1)$
24. $4 - \{6 + [-5 + (12 - 8)]\}$
25. $-5 + \{4 + [3 - (4 - 8) + (-5 - 10)]\}$
26. $-[(8 + 3) - (5 - 1)] + [(8 - 3) - (5 + 1)]$
27. $\{9 - [2 - (1 - 5)]\} - [4 - (5 - 4) + (-5)]$
28. $[(4 + 2 - 11) + (13 + 9 - 20)] - [(-3 + 5 - 21) - (18 - 15 + 6)]$
29. $12 - [(6 - 4) + (8 - 15)] - [4 - (3 + 2) - (1 - 7)]$
30. $-[-8 + (4 - 7) + (2 - 5 - 3)] + [(6 - 3) - (2 - 5 - 6) - 12]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

La multiplicación es la representación de la suma de una misma cantidad varias veces. Una multiplicación se representa con los símbolos, "×" "·" o "( )".

Ejemplo

La multiplicación de 3×4 es lo mismo que:

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12 \text{ o bien } 4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

Los elementos de una multiplicación reciben el nombre de factores y el resultado producto o multiplicación. Así, en el ejemplo anterior, 3 y 4 son los factores y 12 es el producto.

Para no realizar las sumas, se utilizan de forma mecánica las tablas de multiplicar.

Al multiplicar números de varios dígitos, éstos se colocan en vertical y se realiza el procedimiento que muestran los ejemplos siguientes:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de 358×6?

Solución

Se acomodan los factores y 6 multiplica de derecha a izquierda a cada uno de los dígitos del número 358

$$\begin{array}{r} 358 \\ \times \quad 6 \\ \hline 2\,148 \end{array}$$

2 Efectúa $2\,624 \times 45$.

Solución

Se multiplica 5 por 2 624

$$\begin{array}{r} 2624 \\ \times\ 45 \\ \hline 13120 \end{array}$$

Se multiplica 4 por 2 624 y el resultado 10 496 se coloca debajo del anterior (13 120) recorriendo el último dígito un lugar a la izquierda con respecto al primer producto.

$$\begin{array}{r} 2624 \\ \times\ 45 \\ \hline 13120 \\ 10496 \end{array}$$

Las cantidades se suman para obtener el resultado de la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 2624 \\ \times\ 45 \\ \hline 13120 \\ +\ 10496 \\ \hline 118080 \end{array}$$

Por consiguiente, $2\,624 \times 45 = 118\,080$

Leyes de los signos 1. El producto de dos números con signos iguales da como resultado un número positivo.

Ejemplo

$$(8)(5) = 40 \quad ; \quad (-3)(-7) = 21$$

Leyes de los signos 2. El producto de dos números con signos diferentes da como resultado un número negativo.

Ejemplo

$$(-6)(4) = -24 \quad ; \quad (9)(-3) = -27$$

En general, la aplicación simbólica de las leyes de los signos anteriores es:

$(+)(+) = +$ $\quad$ $(+)(-) = -$ $\quad$ $(-)(-) = +$ $\quad$ $(-)(+) = -$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $(-3)(-4)(-6)$.

Solución

Se realiza el producto de $(-3)(-4)$ y el resultado, 12, se multiplica por -6, entonces:

$$(-3)(-4)(-6) = (12)(-6) = -72$$

Finalmente, el resultado de la multiplicación es -72

2 ¿Cuál es el resultado de $(3)(-5)(-2)(4)$?

Solución

Se multiplican 3 por -5 y -2 por 4, los resultados se vuelven a multiplicar para obtener el resultado final de la operación.

$$(3)(-5)(-2)(4) = (-15)(-8) = 120$$

Por tanto, el producto es 120

EJERCICIO 14

Resuelve los siguientes productos:

1. 3×567
2. $4\,846 \times 5$
3. 85×27
4. 324×53
5. 272×524
6. $7\,236 \times 36$
7. $4\,005 \times 736$
8. $8\,236 \times 5\,274$
9. $9\,821 \times 3\,890$
10. $17\,235 \times 111$
11. $(-5)(-4)$
12. $(32)(-5)$
13. $(-14)(-23)$
14. $(-324)(48)$
15. $(-723)(-420)$
16. $(840)(-233)$
17. $(-4\,256)(-3\,023)$
18. $(-27\,845)(327)$
19. $(-82\,462)(2\,732)$
20. $(12\,734)(-4\,263)$
21. $(-5)(-3)(-7)$
22. $(3)(-2)(-5)$
23. $(6)(-1)(-3)$
24. $(5)(4)(-3)(-1)$
25. $(-9)(-8)(-3)(4)$
26. $(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)$
27. $(4)(-7)(2)(-1)(-5)(-6)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Cada tren del metro de la Ciudad de México tiene 9 vagones, cada uno con 8 puertas y cada una de dos hojas corredizas. Si se desea cambiar las hojas de los 120 trenes existentes en la ciudad, ¿cuántas hojas se van a cambiar?

Solución

Para obtener el número total de hojas, se multiplica el número de trenes por el número de vagones por el número de puertas y por el número de hojas:

$$\text{Número de hojas} = (120)(9)(8)(2) = 17\,280$$

Entonces, el número de hojas a cambiar son 17 280

EJERCICIO 15

Resuelve los siguientes problemas:

1. En una caja hay 24 refrescos, ¿cuántos refrescos habrá en 9 cajas?
2. ¿Cuántos libros hay en 12 repisas, si cada una contiene 15 textos?
3. Juan tiene 3 docenas de canicas, Julio 5 docenas y Daniel tiene sólo 9 canicas, ¿cuántas canicas tienen en total los 3?
4. Se van a sembrar en un terreno 25 filas, cada una con 30 árboles, ¿cuántos árboles se van a plantar en total?
5. Rafael tiene 8 piezas de tela de 12 metros cada una, pretende vender a $10 el metro, ¿cuánto dinero puede obtener por la venta de todas las piezas?
6. ¿Cuántos minutos hay en una semana, si una semana tiene 7 días, cada día tiene 24 horas y cada hora 60 minutos?
7. En un vecindario hay 28 edificios, cada uno tiene 12 departamentos, ¿cuántos departamentos hay en el vecindario?
8. Una caja de lapiceros contiene 20 paquetes, los que a su vez tienen 12 lapiceros cada uno, si hay 25 cajas, ¿cuántos lapiceros se tienen en total?
9. Rodrigo percibe un sueldo quincenal de $2 700, ¿cuánto dinero recibe al cabo de un año?
10. Un autobús tiene capacidad para 42 pasajeros y un conductor, si a un evento asisten 3 grupos de 5 autobuses y cada uno se llena a su máxima capacidad, ¿cuántas personas en total asisten a dicho evento?
11. Una empresa de productos lácteos ocupa, para vender y distribuir leche, camiones con una capacidad de carga de 250 cajas, cada una de ellas contiene 12 litros y el precio del litro es de $10, si un supermercado realiza un pedido de 4 cargas, ¿cuánto debe pagar por la compra del lácteo a la empresa?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación con signos de agrupación

Los signos de agrupación que se utilizan son: ( ), [ ], { }, $\overline{\quad}$; cuyos nombres respectivamente son: paréntesis, corchetes, llaves y vínculo.

Para simplificar y obtener el resultado de una operación con signos de agrupación, hay que suprimir éstos y multiplicar los números del interior de los signos por el número o signo que los anteceden.

Después se agrupan y suman los números del mismo signo y los resultados se restan.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $3(4-2)-5(1-4)-(8+9)$.

Solución

Los signos de agrupación se suprimen al multiplicar por los números y signos que les anteceden.

$$3(4-2)-5(1-4)-(8+9)=12-6-5+20-8-9$$

Se agrupan y suman los números con el mismo signo, los resultados se restan:

$$\begin{aligned}&=12+20-6-5-8-9\\&=32-28\\&=4\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado de la operación es 4

2 Realiza $-6-\overline{-2-7}+(2-1)$.

Solución

Se realizan las operaciones en el paréntesis y en el vínculo (barra horizontal que abarca a −2 y −7). Se suprimen los signos de agrupación y se efectúan las operaciones para obtener el resultado.

$$\begin{aligned}-6-\overline{-2-7}+(2-1)&=-6-\overline{-9}+(1)\\&=-6-(-9)+1\\&=-6+9+1\\&=4\end{aligned}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $6-4\{2-5(4-3)+3(3-2)\}$?

Solución

En este caso, primero se suprimen los paréntesis y los números se multiplican por los números que les anteceden:

$$6-4\{2-5(4-3)+3(3-2)\}=6-4\{2-20+15+9-6\}$$

Ahora, se eliminan las llaves al multiplicar por −4,

$$=6-8+80-60-36+24$$

Por último, se realiza la operación al agrupar signos iguales y los resultados obtenidos se restan:

$$\begin{aligned}&=6+80+24-8-60-36\\&=110-104\\&=6\end{aligned}$$

4 Obtén el resultado de $-8-\{2-3[5-2(1-3)+4(8-10)]\}+3[2-5(1-3)-10]$.

Solución

Otra forma de realizar operaciones con signos de agrupación es, primero, efectuar las sumas o restas que encierran los signos con menor cantidad de números, en este caso son los paréntesis.

$$-8-\{2-3[5-2(1-3)+4(8-10)]\}+3[2-5(1-3)-10]=-8-\{2-3[5-2(-2)+4(-2)]\}+3[2-5(-2)-10]$$

Para eliminar los paréntesis se multiplica por el número que los antecede:

$$=-8-\{2-3[5+4-8]\}+3[2+10-10]$$

Ahora los signos a eliminar son los corchetes, para hacerlo se realizan las sumas y restas que encierran, y posteriormente las multiplicaciones:

$$= -8 - \{2 - 3[1]\} + 3[2]$$
$$= -8 - \{2 - 3\} + 6$$

Se sigue el mismo procedimiento para eliminar las llaves:

$$= -8 - \{-1\} + 6$$
$$= -8 + 1 + 6$$
$$= -8 + 7$$
$$= -1$$

Por consiguiente, el resultado de la operación propuesta es −1

EJERCICIO 16

Realiza las siguientes operaciones:

1. $2(7 - 4) + 3(1 - 5) + 8$
2. $-4(2 - 3 - 1) + 2(8 - 5) + 3(4 - 5)$
3. $-6 + \{3 - [4 - 2(4 - 7)]\}$
4. $8 - \{5 - 4[-6 + 7(5 - 2)] - 3\}$
5. $-\{-6 + 4[2 - 5(4 - 3(4 - 3) + 2(7 - 3))] + 2\} - 1$
6. $6 - [4 - 3(4 - 2)] - \{7 - 5\,[4 - 2(7 - 1)]\}$
7. $-2 + \{-3 - [7 + 4(-2 + 5)]\} - 4$
8. $12 + 3\,\{-6 + 2[\,5 - 4(3 - 2) + 5(7 - 8)] - 5\}$
9. $-2(-7 + 11) - 5 - \{-2 + (-3 + 5) - [4 - (2 + 3)]\}$
10. $-11 + 7 - 2\{-4 + 1 - [-2(-3 + 4) - 2 + \overline{4 + 7} - 8] - 4\}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 El costo y la disponibilidad de boletos para un concierto en el centro de espectáculos “El Huracán” es: preferente A, 224 a \$840; preferente B, 184 a \$650; balcón C, 125 a \$430; y balcón D, 96 a \$280. Si para el día del evento se agotaron los boletos, ¿cuál es el ingreso de las entradas?

Solución

Se multiplica el número de boletos por el costo de cada boleto de cada sección, al final se suman los resultados y se obtiene el ingreso total de entradas.

$$\text{Ingreso total} = (840)(224) + (650)(184) + (430)(125) + (280)(96)$$
$$= 188\,160 + 119\,600 + 53\,750 + 26\,880$$
$$= 388\,390$$

Por tanto, el ingreso total fue de \$388 390

2 Se desea realizar un viaje a Huatulco, 4 días y 3 noches todo incluido, y se tienen contempladas 232 personas, el costo por persona es de \$780 en habitación doble y \$865 en habitación individual. Si sólo 15 personas no realizan el viaje y se sabe que se alquilaron 75 habitaciones dobles, ¿cuántas habitaciones individuales se alquilaron y cuál fue el monto total del viaje?

Solución

El número de personas que realizaron el viaje son: 232 − 15 = 217

De ellas se hospedaron en habitación doble 2(75) = 150
Esto indica que en habitación individual se hospedaron 217 − 150 = 67
Luego, todos se hospedaron 3 noches,
3(780)(150) + 3(865)(67) = 351 000 + 173 865 = 524 865

Por tanto, el monto total del viaje es de $524 865

3 Una familia de 5 miembros asiste a un restaurante de comida rápida que en todos sus paquetes tiene descuentos; el padre y la madre compran cada quien paquetes de $52, con un descuento de $15. Los niños piden cada uno paquetes de $42, con un descuento de $10 por paquete. ¿Cuánto es lo que pagan por todos los paquetes?

Solución

Para obtener el resultado se multiplica el número de paquetes por el costo de éstos, ya incluido el descuento.

$$\begin{aligned} 2(52-15)+3(42-10) &= 2(37)+3(32) \\ &= 74+96 \\ &= 170 \end{aligned}$$

Por consiguiente, los padres pagan $170

EJERCICIO 17

Resuelve los siguientes problemas:

1. Karen recibe un salario de $850 semanales y, por ser una buena estudiante, tiene asignada una beca de $1 000 mensuales. ¿Cuál es la cantidad de dinero que recibe en un mes? (Considera un mes igual a 4 semanas.)
2. A Maritza le da su papá $20 diarios. Si en un año ella destina para pasajes y diversión $2 300 anuales, ¿qué cantidad de dinero le sobra para sus otros gastos? (Considera un año igual a 365 días.)
3. Un cuarteto de músicos recibe como pago $240 diarios por tocar entre semana en un restaurante, mientras que por tocar en el mismo lugar los fines de semana el pago es de $480 diarios. ¿Cuánto dinero percibe cada integrante del grupo, si lo que ganan se reparte en forma equitativa? (Considera una semana igual a 7 días.)
4. El sueldo de un capturista de datos es de $150 diarios con su respectivo descuento de $30 por concepto de impuestos. ¿Qué cantidad recibe en un mes? (Considera un mes igual a 30 días.)
5. En la repartición de una herencia el abuelo designa en partes iguales un terreno de 12 hectáreas a 3 de sus nietos, si el precio por metro cuadrado es de $250, ¿cuál es el monto que recibió cada uno de los herederos? (Considera una hectárea igual a 10 000 m^2.)
6. Roberto tiene 12 años, Mónica es 4 años más grande que Roberto y Julián tiene el doble de la edad de Mónica. ¿Cuánto es la suma de las edades de Roberto, Mónica y Julián?
7. Pablo asistió a las ofertas de una tienda departamental y se compró 3 pantalones en $750 cada uno, con un descuento de $225 por prenda; 4 camisas de $600 la pieza con su respectivo descuento de $120 por camisa y 5 playeras cuyas etiquetas marcaban un costo de $250 y su descuento de $75 en cada pieza, ¿cuánto pagó Pablo por los artículos?
8. Un granjero realiza la venta de media docena de borregos, 8 conejos y 3 cerdos: si el precio de un borrego es de $600, el de un conejo $150 y el de un cerdo es de $450, ¿cuál es el importe que recibe por la venta de estos animales?
9. La hipoteca que contrajo Damián en enero de 2008 con un banco asciende a $425 000, si durante el primer año Damián realiza el pago de $6 500 mensuales, ¿a cuánto asciende su deuda para enero de 2009?
10. En un estadio hay 3 tipos de ubicaciones con diversos costos cada una: 25 000 en preferente especial, 15 000 lugares en la sección de preferente y 30 000 en general, si el costo de un boleto en preferente especial es de $150, el de preferente $100 y el de general de $80, ¿cuál es el ingreso de la taquilla si hay un lleno total en el estadio?

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

División

Si a y b son números enteros, la división de a entre b, siendo b un número entero diferente de cero, consiste en encontrar a los números enteros p y r tales que:

$$a = bp + r \text{ Para todo } a > b \quad \text{y} \quad b > r.$$

Donde a recibe el nombre de dividendo, b el de divisor, p el de cociente y r residuo.

Ejemplo

En la división de 25 entre 4, el cociente es 6 y el residuo, 1 ya que:

$$25 = 4(6) + 1$$

Ejemplo

En la división de 36 entre 9, el cociente es 4 y el residuo es 0, ya que:

$$36 = 9(4) + 0$$

Cuando en una división el residuo es igual a 0, entonces se dice que la división es exacta.

Las divisiones se representan con los siguientes símbolos:

Con una caja divisora $\overline{\big|\quad}$

Por medio de dos puntos 9 : 7

Con el signo ÷

Con una raya horizontal (fracción) $\frac{24}{8}$

Algoritmo de la división

Para dividir a entre b con $a > b$, se efectúan los siguientes pasos:

1. Se acomoda el dividendo dentro de la caja divisora y el divisor fuera de ella.

$$\text{Divisor} \longrightarrow b\overline{\big)a} \longleftarrow \text{dividendo}$$

2. Del dividendo se toman las cifras necesarias para formar un número mayor o igual que el divisor.
3. El dividendo parcial se divide entre el divisor y resulta la primera cifra del cociente, que se coloca encima de la última cifra del dividendo parcial, enseguida se multiplica la primera cifra del cociente por el divisor y el producto se resta del dividendo parcial y se escribe la diferencia debajo del dividendo parcial.
4. A la derecha de la diferencia se baja la siguiente cifra del dividendo original, con lo que se forma un nuevo dividendo parcial al que se le repite el proceso descrito.
5. Se continúa con el proceso hasta bajar todas las cifras del dividendo original.
6. Si algún dividendo parcial resulta ser menor que el divisor, se escribe cero en el cociente y se baja la siguiente cifra del dividendo original.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Divide 9 entre 4.

Solución

Se acomodan las cantidades en la caja divisora.

$$4\overline{\big)9}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se busca un número que al multiplicar por 4 se aproxime a 9 sin excederlo ($4 \times 2 = 8$), de forma que la diferencia del dividendo 9 y el producto 8 sea menor que 4

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 4 & 9 \\ & 1 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es igual a 2 y el residuo 1

2 Efectúa la división de 47 entre 3.

Solución

Se colocan el dividendo y el divisor en la caja divisora, en sus respectivos lugares.

$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline 3 & 47 \end{array}$$

Se elige un dividendo parcial y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 3 & 4,7 \\ & 1 \end{array}$$

Se baja la siguiente cifra del dividendo original y se divide entre 3 nuevamente.

$$\begin{array}{r|l} & 1\ 5 \\ \hline 3 & 4,7 \\ & 1\ 7 \\ & \ \ \ 2 \end{array}$$

El resultado de la división es 15 y el residuo 2

3 Efectúa $23 \overline{)1\ 217}$.

Solución

Se elige el dividendo parcial y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{r|l} & \ \ \ 5 \\ \hline 23 & 121,7 \\ & \ 06 \end{array}$$

Se baja la siguiente cifra del dividendo original y se divide nuevamente para obtener el resultado de la división propuesta.

$$\begin{array}{r|l} & \ \ \ 5\ 2 \\ \hline 23 & 121,7 \\ & \ 06\ 7 \\ & \ \ \ 2\ 1 \end{array}$$

Por consiguiente, el cociente es 52 y el residuo 21

4 Divide 65 975 entre 325.

Solución

Se acomodan los números en la caja divisora.

$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline 325 & 65\ 975 \end{array}$$

Se elige el dividendo parcial y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{r|l} & \ \ \ 2 \\ \hline 325 & 659,75 \\ & 009 \end{array}$$

Al bajar la siguiente cifra, el nuevo dividendo parcial 97 es menor que el divisor 325.

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\ \ 2\ \ \ \ \ } \\ 325 & 659{,}75 \\ & 009\ 7 \end{array}$$

Por lo tanto, en el cociente se escribe 0 a la derecha de 2 y se baja la última cifra del dividendo original.

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\ \ 2\ 0\ \ \ } \\ 325 & 659{,}75 \\ & 009\ 75 \end{array}$$

Se efectúa la división de 975 entre 325 y se obtiene el resultado.

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\ \ 2\ 03\ } \\ 325 & 659{,}75 \\ & 009\ 75 \\ & \ \ \ 0\ 00 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es 203 y el residuo 0, la división fue exacta.

EJERCICIO 18

Realiza las siguientes divisiones.

1. $3\,\overline{)\,8}$
2. $5\,\overline{)\,16}$
3. $7\,\overline{)\,343}$
4. $9\,\overline{)\,2\,674}$
5. $12\,\overline{)\,96}$
6. $18\,\overline{)\,236}$
7. $23\,\overline{)\,485}$
8. $35\,\overline{)\,1\,216}$
9. $125\,\overline{)\,3\,724}$
10. $853\,\overline{)\,4\,296}$
11. $526\,\overline{)\,15\,396}$
12. $903\,\overline{)\,42\,874}$
13. $1\,205\,\overline{)\,63\,472}$
14. $4\,621\,\overline{)\,80\,501}$
15. $12\,503\,\overline{)\,120\,973}$
16. $42\,524\,\overline{)\,3\,123\,274}$
17. $10\,053\,\overline{)\,2\,000\,382}$
18. $22\,325\,\overline{)\,110\,121\,874}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

En el auditorio de una escuela se presenta una obra de teatro para maestros y alumnos. Si en la escuela hay 28 maestros y 585 alumnos, y el auditorio sólo tiene capacidad para 80 personas, ¿cuántas presentaciones se deben realizar para que todo el alumnado y todos los profesores la presencien?

Solución

En total hay 28 + 585 = 613 personas; luego, se realiza una división entre el total de personas y la capacidad del auditorio para obtener el número de presentaciones.

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\ \ \ \ 7} \\ 80 & 613 \\ & \ \ 53 \end{array}$$

Se observa que el cociente 7 representa al número de presentaciones con auditorio lleno, pero sobran 53, entonces se necesita una presentación más para que todos puedan asistir a la obra de teatro. Por lo tanto, se tienen que realizar 8 presentaciones.

EJERCICIO 19

Resuelve los siguientes problemas:

1. ¿Cuántas veces cabe el número 15 en 345?
2. Ciento ochenta y seis mil pesos es lo que ahorraron 62 alumnos del Tecnológico de ingeniería para su graduación, si cada estudiante ahorró la misma cantidad, ¿cuánto dinero ahorró cada uno?
3. El producto de 2 números es 137 196, uno de ellos es 927, ¿cuál es el otro número?
4. ¿Cuántas horas hay en 3 360 minutos, si se sabe que una hora tiene 60 minutos?
5. Se reparten 7 200 libros de matemáticas a 4 escuelas, si cada una de ellas tiene 600 alumnos, ¿cuántos libros le tocan a cada estudiante?
6. ¿En cuántas horas recorrerá 144 kilómetros un automóvil que viaja a 16 kilómetros por hora?
7. ¿Cuántos días necesitará Fabián para capturar en su computadora los datos de un libro de matemáticas que contiene 224 páginas, si copia 4 páginas en una hora y trabaja 8 horas por día?
8. Un reloj se adelanta 3 minutos cada 4 horas, ¿cuánto se habrá adelantado al cabo de 20 horas?
9. Una fuente tiene capacidad para 2 700 litros de agua, ¿qué cantidad de este líquido debe echar por minuto una llave que la llena en 5 horas?
10. En una tienda de ropa, Omar compra igual número de pantalones que de chamarras con un costo total de $1 500, cada pantalón cuesta $200 y cada chamarra $550, ¿cuántos pantalones y chamarras compró?
11. Los 3 integrantes de una familia deciden repartir los gastos que se generan en su casa: el recibo bimestral de luz llega de $320; el recibo del teléfono de $240 mensuales; la televisión por cable $260 mensuales y el predio es de $3 600 anuales. ¿Cuánto dinero le toca aportar mensualmente a cada integrante, si los gastos se reparten de manera equitativa?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 3

TEORÍA DE NÚMEROS

Reseña HISTÓRICA



Euclides es el matemático más famoso de la Antigüedad y quizá también el más nombrado y conocido de la historia de las matemáticas.

Su obra más importante es un tratado de geometría y aritmética que recibe el título de *Los elementos*.

Esta obra es importante, no tanto por la originalidad de sus contenidos, sino por la sistematización, el orden y la argumentación con la que fue redactada. Euclides recopila, ordena y argumenta los conocimientos geométrico-matemáticos de su época, que ya eran muchos.

Los elementos consta de 13 libros sobre geometría y aritmética, de los cuales sólo los libros del VII al IX tratan la teoría de los números (aritmética), discuten relaciones con números primos (Euclides prueba ya en un teorema que no hay una cantidad finita de números primos), mínimo común múltiplo, progresiones geométricas, etcétera.

Euclides
(300 a. C.)

Divisibilidad

Sean a y b números enteros. Se dice que a es divisible entre b si el residuo de $a \div b$ es cero.

Ejemplos

48 es divisible entre 16, porque 48 = (16)(3) + 0, es decir,

```
      3
16 | 48
      0 ———→ Residuo
```

1 512 es divisible entre 42, porque 1 512 = (42)(36) + 0, entonces,

```
        36
42 | 1 512
       252
         0 ———→ Residuo
```

385 no es divisible entre 12, porque 385 = (12)(32) + 1, es decir, el residuo es diferente de 0

```
      32
12 | 385
      25
       1 ———→ Residuo
```

Múltiplo. El múltiplo de un número es el que lo contiene un número exacto de veces.

Ejemplos

36 es múltiplo de 9, porque lo contiene 4 veces.
240 es múltiplo de 12, porque lo contiene 20 veces.
Los múltiplos de un número k se obtienen al multiplicar k por los números naturales.

Ejemplos

Los múltiplos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, … , porque 3(1) = 3, 3(2) = 6, 3(3) = 9, 3(4) = 12, 3(5) = 15, 3(6) = 18, ...
Los múltiplos de 5 son: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, … , porque 5(1) = 5, 5(2) = 10, 5(3) = 15, 5(4) = 20, 5(5) = 25, 5(6) = 30, ...
Los múltiplos de 8 son: 8, 16, 24, 32, 40, 48, … , porque 8(1) = 8, 8(2) = 16, 8(3) = 24, 8(4) = 32, 8(5) = 40, 8(6) = 48, ...

Número compuesto. Es aquel que además de ser divisible entre sí mismo y la unidad, lo es entre otro factor.

Ejemplos

12 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
28 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 4, 7, 14 y 28.

Criterios de divisibilidad

Nos permiten visualizar cuándo un número es divisible entre otro sin efectuar la división. A continuación se enuncian algunos de ellos:

- **Divisibilidad entre 2.** Un número entero es divisible entre 2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8, los números divisibles entre 2 se llaman pares.

Ejemplo

20, 12, 114, 336, 468 son divisibles entre 2, ya que terminan en 0, 2, 4, 6 y 8, respectivamente.

- **Divisibilidad entre 3.** Un número entero es divisible entre 3, si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.

Ejemplos

51 es divisible entre 3, ya que 5 + 1 = 6 y 6 es múltiplo de 3.
486 es divisible entre 3, ya que 4 + 8 + 6 = 18 y 18 es múltiplo de 3.

- **Divisibilidad entre 4.** Un número entero es divisible entre 4, si sus últimos 2 dígitos son 0 o un múltiplo de 4.

Ejemplos

900 es divisible entre 4, porque termina en doble 0.
628 es divisible entre 4, porque 28 es múltiplo de 4.

- **Divisibilidad entre 5.** Un número entero es divisible entre 5, si su último dígito es 0 o 5.

Ejemplo

5 215 y 340 son divisibles entre 5, ya que terminan en 5 y 0, respectivamente.

- **Divisibilidad entre 6.** Un número entero es divisible entre 6, si a su vez es divisible entre 2 y 3.

Ejemplos

216 es divisible entre 2, ya que termina en 6, y es divisible entre 3, porque la suma de sus dígitos es múltiplo de 3. Por tanto, 216 es divisible entre 6.
9 000 es divisible entre 6, ya que es divisible entre 2 y 3.

- **Divisibilidad entre 7.** Un número entero es divisible entre 7, cuando al multiplicar el último dígito por 2 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o un múltiplo de 7.

Ejemplos

315 es divisible entre 7, ya que $5 \times 2 = 10$ y $31 - 10 = 21$ y 21 es múltiplo de 7.
147 es divisible entre 7, porque $7 \times 2 = 14$ y $14 - 14 = 0$.

- **Divisibilidad entre 8.** Un número entero es divisible entre 8, cuando sus 3 últimos dígitos de la derecha son 0 o forman un múltiplo de 8.

Ejemplos

6 000 es divisible entre 8, ya que sus últimos 3 dígitos son 0.
3 160 es divisible entre 8, porque los 3 últimos dígitos, 160, forman un múltiplo de 8.

- **Divisibilidad entre 9.** Un número entero es divisible entre 9, si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9.

Ejemplos

1 233 es divisible entre 9, ya que 1 + 2 + 3 + 3 = 9, y 9 es múltiplo de 9.
6 786 es divisible entre 9, ya que 6 + 7 + 8 + 6 = 27, y 27 es múltiplo de 9.

- **Divisibilidad entre 10.** Un número entero es divisible entre 10, si el último dígito es 0.

Ejemplos

360 es divisible entre 10, porque su último dígito es 0.
2 500 es divisible entre 10, ya que termina en 0.

- **Divisibilidad entre 11.** Un número entero es divisible entre 11, si el valor absoluto de la diferencia entre la suma de los dígitos en posición par y la suma de los dígitos en posición impar es 0 o múltiplo de 11.

Ejemplos

1 364 es divisible entre 11, ya que $|(3+4)-(1+6)| = |7-7| = |0| = 0$.

82 918 es divisible entre 11, porque $|(2+1)-(8+9+8)| = |3-25| = |-22| = 22$, y 22 es múltiplo de 11.

- **Divisibilidad entre 13.** Un número entero es divisible entre 13, si al multiplicar el último dígito por 9 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 13.

Ejemplos

273 es divisible entre 13, ya que $27-(3\times 9)=27-27=0$.
442 es divisible entre 13, porque $44-(2\times 9)=44-18=26$, y 26 es múltiplo de 13.

- **Divisibilidad entre 17.** Un número entero es divisible entre 17, si al multiplicar el último dígito por 5 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 17.

Ejemplos

357 es divisible entre 17, ya que $35-(7\times 5)=35-35=0$.
493 es divisible entre 17, porque $49-(3\times 5)=49-15=34$, y 34 es múltiplo de 17.

- **Divisibilidad entre 19.** Un número entero es divisible entre 19, si al multiplicar el último dígito por 17 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 19.

Ejemplos

342 es divisible entre 19, ya que $34-(2\times 17)=34-34=0$.
1 045 es divisible entre 19, porque $104-(5\times 17)=104-85=19$, y 19 es múltiplo de 19.

EJERCICIO **20**

De los siguientes números:

1. 105, 243, 73, 2 457, 3 589, ¿cuáles son divisibles entre 3?
2. 800, 112, 324, 1 426, 13 564, ¿cuáles son divisibles entre 4?
3. 105, 3 176, 8 910, 34 615, 217 583, ¿cuáles son divisibles entre 5?
4. 80, 78, 314, 768, 1 470, ¿cuáles son divisibles entre 6?
5. 175, 157, 576, 1 645, 3 528, ¿cuáles son divisibles entre 7?
6. 700, 3 128, 5 024, 9 000, 10 018, ¿cuáles son divisibles entre 8?
7. 225, 349, 1 008, 2 925, 23 619, ¿cuáles son divisibles entre 9?
8. 66, 111, 253, 935, 540, ¿cuáles son divisibles entre 11?
9. 195, 315, 540, 713, 1 105, ¿cuáles son divisibles entre 13?
10. 1 007, 1 062, 380, 719, 1 596, ¿cuáles son divisibles entre 19?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Números primos

Un número primo sólo es divisible entre sí mismo y la unidad. El 1, por definición, no es primo.

Ejemplos

7 es número primo porque sólo es divisible entre sí mismo y la unidad.
15 no es número primo, ya que además de ser divisible entre sí mismo y la unidad, también lo es entre 3 y 5.

Tabla de números primos. Para obtener los primeros n números primos de los números naturales se puede utilizar la criba de Eratóstenes, la cual consiste en hacer una tabla con los números del 1 hasta n.

El procedimiento es señalar con un paréntesis los números que sean primos y tachar los que no lo sean. Se empieza por tachar el 1 y escribir entre paréntesis el 2, a continuación se tachan los múltiplos de 2, posteriormente se busca el primer número no tachado, en este caso (3), se pone entre paréntesis y se tachan todos sus múltiplos. El procedimiento se sigue hasta tener marcados todos los números.

Criba de Eratóstenes

~~1~~	(2)	(3)	~~4~~	(5)	~~6~~	(7)	~~8~~	~~9~~	~~10~~
(11)	~~12~~	(13)	~~14~~	~~15~~	~~16~~	(17)	~~18~~	(19)	~~20~~
~~21~~	~~22~~	(23)	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	(29)	~~30~~
(31)	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	(37)	~~38~~	~~39~~	~~40~~
(41)	~~42~~	(43)	~~44~~	~~45~~	~~46~~	(47)	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	(53)	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	(59)	~~60~~
(61)	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	(67)	~~68~~	~~69~~	~~70~~
(71)	~~72~~	(73)	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	(79)	~~80~~
~~81~~	~~82~~	(83)	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	(89)	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	(97)	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Por tanto, los números primos entre 1 y 100 son:

$$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97\}$$

Descomposición de un número en sus factores primos

La descomposición de un número en sus factores primos es su expresión como el producto de sus factores primos. Para obtenerlo, se divide el número entre el menor divisor primo posible, el cociente que se obtiene se vuelve a dividir entre el menor divisor primo posible, y así hasta que el último cociente sea 1, este procedimiento también se conoce como factorización completa de un número.

EJEMPLOS

1 Expresa 144 como el producto de sus factores primos.

Solución

Se divide 144 entre 2, el cociente 72, se vuelve a dividir entre 2, y así sucesivamente.

$$\begin{aligned} 144 \div 2 &= 72 \\ 72 \div 2 &= 36 \\ 36 \div 2 &= 18 \\ 18 \div 2 &= 9 \\ 9 \div 3 &= 3 \\ 3 \div 3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ \hline 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Por tanto, $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

2 Expresa 105 como el producto de sus factores primos.

Solución

105 se divide entre 3 y se continúa con el procedimiento.

$$105 \div 3 = 35 \qquad 35 \div 5 = 7 \qquad 7 \div 7 = 1$$

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ \hline 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Por consiguiente, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

3 Encuentra la factorización completa de 294.

Solución

294 se divide entre 2 y se continúa con el procedimiento.

$$294 \div 2 = 147 \qquad 147 \div 3 = 49 \qquad 49 \div 7 = 7 \qquad 7 \div 7 = 1$$

$$\begin{array}{r|l} 294 & 2 \\ \hline 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces, la factorización completa de 294 es $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

EJERCICIO 21

Realiza la descomposición en sus factores primos de los siguientes números:

1. 72
2. 96
3. 225
4. 576
5. 945
6. 210
7. 840
8. 2 310
9. 3 675
10. 2 376
11. 7 020
12. 29 400
13. 30 240
14. 16 200
15. 30 030

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Máximo común divisor (MCD)

Es el mayor de los divisores en común de 2 o más números.

Ejemplo

Los divisores de 18 y 24 son:

Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9 y 18
Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24
Los divisores comunes son: 1, 2, 3 y 6, el mayor de los divisores en común es el 6

Por tanto, el máximo común divisor de 18 y 24 es 6

Para calcular el MCD de varios números se descomponen simultáneamente en sus factores primos, hasta que ya no tengan un divisor primo en común. Cuando los números sólo tienen a la unidad como común divisor, los números reciben el nombre de "primos relativos".

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el máximo común divisor de 48, 36 y 60.

Solución

Se descomponen simultáneamente en factores primos.

48	36	60	2
24	18	30	2
12	9	15	3
4	3	5	

4, 3 y 5 no tienen divisores primos en común, los números primos obtenidos se multiplican y el producto es el resultado.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Por consiguiente, el máximo común divisor de 48, 36 y 60 es 12.

2 Determina el MCD(72,180).

Solución

Se realiza la descomposición de 72 y 180, en sus factores primos.

72	180	2
36	90	2
18	45	3
6	15	3
2	5	

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

Por tanto, el MCD(72,180) = 36

3 Calcula el MCD(11,23).

Solución

Los números sólo tienen a la unidad como común divisor, lo cual quiere decir que 11 y 23 son primos relativos.

Por consiguiente, el MCD(11,23) = 1

4 Encuentra el máximo común divisor de 234, 390 y 546.

Solución

Se descomponen simultáneamente en factores primos.

234	390	546	2
117	195	273	3
39	65	91	13
3	5	7	

$$2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$$

Por consiguiente, el máximo común divisor de 234, 390 y 546 es 78

EJERCICIO 22

Calcula el MCD de los siguientes números:

1. 108 y 72
2. 270 y 900
3. 243 y 125
4. 60, 72 y 150
5. 27, 25 y 28
6. 80, 675 y 900
7. 216, 300 y 720
8. 126, 210 y 392
9. 308, 1 617 y 1 925
10. 572, 4 719 y 7 865

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Mínimo común múltiplo (mcm)

El mínimo común múltiplo es el menor de todos los múltiplos comunes de 2 o más números.

Ejemplo

Al obtener los múltiplos de 4 y 6 se tiene:

Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, …
Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, …
Los múltiplos comunes son: 12, 24, 36, 48, …
El menor de todos los múltiplos en común es 12

Por tanto, el mínimo común múltiplo de 4 y 6 es 12

Para calcular el mcm de varios números se descomponen simultáneamente en factores primos hasta que los cocientes sean 1, si alguno de los números no es divisible entre el factor dado, se baja y se continúa hasta encontrar el factor primo que lo divida.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el mcm [28,42].

Solución

Se descomponen ambos números en factores primos

28	42	2
14	21	2
7	21	3
7	7	7
1	1	

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Por consiguiente, el mcm [28,42] es 84

2 Determina el mcm [25,30,150].

Solución

Se descomponen los números en factores primos

25	30	150	2
25	15	75	3
25	5	25	5
5	1	5	5
1	1	1	

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$

Por tanto, el mcm [25,30,150] es 150

3 Calcula el mínimo común múltiplo de 36, 48 y 60.

Solución

Se descomponen simultáneamente en factores primos y los números primos que resultan se multiplican.

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	2
9	6	15	2
9	3	15	3
3	1	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720$

Entonces el mcm de 36, 48 y 60 es 720

EJERCICIO 23

Calcula el mcm de los siguientes números:

1. 108 y 72
2. 18 y 45
3. 27 y 16
4. 36, 20 y 90
5. 45, 54 y 60
6. 28, 35 y 63
7. 20, 30 y 50
8. 720, 600 y 540
9. 220, 275 y 1 925
10. 605, 1 925 y 2 695

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 En una reunión de academia del área de matemáticas se repartieron 18 bocadillos, 24 vasos con refresco y 12 rebanadas de pastel, ¿cuántos profesores asistieron a la reunión y qué cantidad de bocadillos, vasos con refresco y rebanadas de pastel recibió cada uno?

Solución

Se calcula el máximo común divisor de 18, 24 y 12

18	24	12	2
9	12	6	3
3	4	2	

$MCD(18,24,12) = 2 \cdot 3 = 6$

Por consiguiente, a la reunión de academia asistieron 6 profesores y a cada uno le tocó 3 bocadillos, 4 vasos con refresco y 2 rebanadas de pastel.

2 Tres escuelas deciden hacer una colecta de dinero entre sus alumnos para donar a varias instituciones de beneficencia. Si la primera junta 120 mil, la segunda 280 mil y la tercera 360 mil pesos, ¿cuál es la mayor cantidad que recibirá cada institución de tal manera que sea la misma y cuántas instituciones podrán ser beneficiadas?

Solución

Se calcula el máximo común divisor de 120, 280 y 360

120	280	360	2
60	140	180	2
30	70	90	2
15	35	45	5
3	7	9	

MCD(120, 280, 360) = 2 · 2 · 2 · 5 = 40

Cada institución recibirá 40 mil pesos y el número de instituciones beneficiadas será la suma de los residuos 3 + 7 + 9 = 19.

Por tanto, 19 son las instituciones beneficiadas y cada una recibirá $40 000.

3 Al hacer el corte del día en un restaurante, el administrador hace 3 rollos de billetes de la misma denominación, en el primero hay $1 350, en el segundo $1 700 y en el tercero $3 550, ¿cuántos billetes hay en cada rollo y de qué denominación son?

Solución

Se calcula el máximo común divisor de 1 350, 1 700 y 3 550

1 350	1 700	3 550	2
675	850	1 775	5
135	170	355	5
27	34	71	

MCD(1 350, 1 700, 3 550) = 2 · 5 · 5 = 50

La denominación de cada billete es de $50, en el primer rollo hay 27 billetes, en el segundo 34 y en el tercero 71.

4 Una persona viaja a la Ciudad de México cada 12 días, otra lo hace cada 20 días y una tercera cada 6 días. Si hoy han coincidido en estar las 3 en la ciudad, ¿dentro de cuántos días, como mínimo, volverán a coincidir?

Solución

Se calcula el mínimo común múltiplo de 12, 20 y 6

12	20	6	2
6	10	3	2
3	5	3	3
1	5	1	5
1	1	1	

El mínimo común múltiplo es: 2 · 2 · 3 · 5 = 60.

Por tanto, el mínimo de días que trascurrirán para que las 3 personas coincidan en la Ciudad de México es de 60 días.

5 Un médico receta a un paciente tomar una pastilla cada 6 horas y un jarabe cada 8 horas. Si al iniciar el tratamiento toma la pastilla y el jarabe a la misma hora, ¿después de cuántas horas volverá a tomar ambos medicamentos al mismo tiempo?

Solución

Se calcula el mínimo común múltiplo de 6 y 8

6	8	2
3	4	2
3	2	2
3	1	3
1	1	

El mínimo común múltiplo es 2 · 2 · 2 · 3 = 24.

Entonces transcurrirán 24 horas para que el paciente tome los medicamentos juntos.

EJERCICIO 24

Resuelve las siguientes aplicaciones:

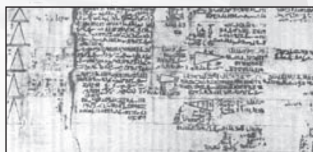
1. Tres cajas contienen, cada una, 12 kilogramos de carne de res, 18 de carne de cerdo y 24 de carne de pollo. La carne de cada caja está contenida en bolsas del mismo tamaño y con la máxima cantidad de carne posible, ¿cuánto pesa cada bolsa y cuántas hay por caja?
2. Gerardo fabrica un anuncio luminoso con focos de color rojo, amarillo y verde, de tal manera que los focos rojos enciendan cada 10 segundos, los amarillos cada 6 y los verdes cada 15, si al probar el anuncio encienden todos los focos a la vez, ¿después de cuántos segundos volverán a encender juntos?
3. Un ebanista quiere cortar en cuadros lo más grande posible una plancha de madera de 300 cm de largo y 80 cm de ancho, ¿cuál debe ser la longitud de los lados de cada cuadro?
4. Un ciclista da una vuelta a una pista en 6 minutos, mientras que otro tarda 4 minutos. Si ambos inician sus recorridos juntos, ¿después de qué tiempo volverán a encontrarse y cuántas vueltas habrán dado cada uno?
5. Una llave vierte 4 litros de agua por minuto, otra 3 y una tercera, 8. ¿Cuál es la cantidad menor de litros que puede tener un pozo para que se llene en un número exacto de minutos por cualquiera de las 3 llaves?
6. Tres rollos de tela de 30, 48 y 72 metros de largo se quieren cortar para hacer banderas con pedazos iguales y de mayor longitud, ¿cuál será el largo de cada pedazo?
7. Un parque de diversiones quiere construir balsas con 3 troncos de palmera, los cuales miden 15, 9 y 6 metros, ¿cuánto deben medir los pedazos de tronco si tienen que ser del mismo tamaño?, ¿cuántos pedazos de troncos saldrán?
8. El abuelo Eduardo da dinero a 3 de sus hijos para que lo repartan a los nietos de manera equitativa. A su hijo Rubén le da $5 000, a su hijo Anselmo le da $6 000, mientras que a Horacio sólo $3 000, ¿cuál es la mayor cantidad de dinero que podrán darle a sus hijos y cuántos nietos tiene Eduardo?
9. Fabián tiene un reloj que da una señal cada 18 minutos, otro que da una señal cada 12 minutos y un tercero cada 42 minutos. A las 11 de la mañana los 3 relojes han coincidido en dar la señal, ¿cuántos minutos como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir?, ¿a qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?
10. Daniel y Omar tienen 60 canicas azules, 45 verdes y 90 amarillas; quieren hacer costalitos iguales con el número mayor de canicas sin que sobren, ¿cuántos costalitos pueden hacer y cuántas canicas tendrá cada uno?
11. Ricardo tiene en su papelería los lapiceros en bolsas. En la caja "A" tiene bolsitas de 30 lapiceros cada una y no sobran, en la caja "B" tiene bolsitas de 25 lapiceros cada una y tampoco sobran. El número de lapiceros que hay en la caja "A" es igual al que hay en la caja "B", ¿cuántos lapiceros como mínimo hay en cada caja?
12. Rosa tiene cubos de color lila de 8 cm de arista y de color rojo de 6 cm de arista. Ella quiere apilar los cubos en 2 columnas, una de cubos de color lila y otra de color rojo, desea conseguir que ambas columnas tengan la misma altura, ¿cuántos cubos, como mínimo, tiene que apilar de cada color?
13. Tres amigos pasean en bicicleta por un camino que rodea a un lago, para dar una vuelta completa, uno de ellos tarda 10 minutos, otro tarda 15 y el tercero, 18 minutos. Parten juntos y acuerdan interrumpir el paseo la primera vez que los 3 pasen simultáneamente por el punto de partida, ¿cuánto tiempo duró el paseo?, ¿cuántas vueltas dio cada uno?
14. En 1994 se realizaron elecciones para presidente y para jefe de gobierno, el periodo presidencial es de 6 años y el de jefe de gobierno de 4. ¿En qué año volverán a coincidir las elecciones?
15. El piso de una habitación tiene 425 cm de largo por 275 cm de ancho, si se desea poner el menor número de mosaicos cuadrados de mármol, ¿cuáles serán las dimensiones máximas de cada mosaico?, ¿cuántos mosaicos se necesitan?

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Capítulo 4

Números racionales

Reseña HISTÓRICA



La idea de número racional como relación entre dos enteros fue utilizada por los pitagóricos en el siglo VI a. C. Años antes, los babilonios y los egipcios utilizaron algunas fracciones, las que tenían como numerador 1, por ejemplo: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, y algunas en particular como: $\frac{2}{3}$.

Después fueron los hindúes quienes se encargaron de formalizar las reglas para ejecutar las operaciones entre números fraccionarios. Algunas reglas generales las plantearon Aryabhata, y luego Bramagupta, en los siglos VI y VII, respectivamente. Tiempo después fueron los mismos hindúes quienes se encargaron de sistematizar y ampliar estas reglas. De modo que las reglas que utilizamos en la actualidad para trabajar con fracciones, fueron obra de Mahavira, en el siglo IX, y Bháskara, en el siglo XII.

Durante el siglo XV el matemático persa Al-kashi planteó la escritura decimal de los números fraccionarios y, al mismo tiempo, estableció las reglas de cálculo con los números decimales. En el Occidente cristiano a las fracciones decimales se les conocía como fracciones de los turcos.

Posteriormente a las fracciones equivalentes, que pueden ser simplificadas, se les denominó números racionales, mientras que la fracción siempre será un término que no tiene factores comunes entre el numerador y el denominador, es decir, es irreducible.

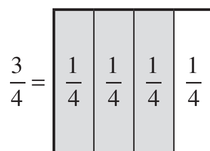
Al inicio del papiro de Rhind aparece una tabla en la que se expresan las fracciones de numerador 2 y de denominador impar entre 5 y 101, como suma de fracciones unitarias; con ellas efectuaban las cuatro operaciones aritméticas con fracciones.

Fracción común

Si a y b son números enteros, y b es diferente de cero, se llama fracción común a la expresión $\frac{a}{b}$, donde a recibe el nombre de numerador y b el de denominador. En una fracción común el denominador indica el número de partes iguales en que se divide la unidad y el numerador indica el número de partes que se toman de la unidad.

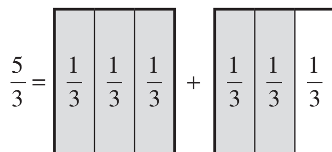
EJEMPLOS

1 La fracción $\frac{3}{4}$, indica que la unidad se divide en 4 partes iguales, de las cuales se toman únicamente 3, la representación gráfica de esta fracción es:



La parte sombreada de la figura representa al numerador.

2 La fracción $\frac{5}{3}$ indica que la unidad se divide en 3 partes iguales, de las cuales se deben tomar 5, lo cual no es posible. Por lo tanto, se toman 2 unidades y se dividen en 3 partes iguales cada una, de la primera unidad se toman las 3 partes y de la segunda únicamente 2 para completar las 5 partes indicadas en el numerador.



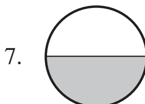
Otra manera de representar la fracción $\frac{5}{3}$ es con un número formado por una parte entera y una parte fraccionaria: $1\frac{2}{3}$, este tipo de fracciones reciben el nombre de mixtas.

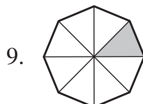
EJERCICIO 25

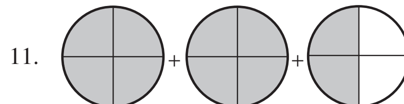
Representa gráficamente las siguientes fracciones:

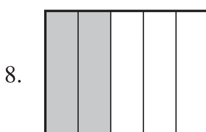
1. $\frac{3}{8}$
2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{3}{5}$
4. $\frac{7}{6}$
5. $\frac{6}{2}$
6. $\frac{9}{4}$

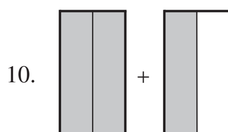
Indica la fracción que representa la parte sombreada de las figuras.

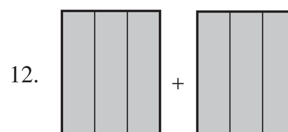
7. 

9. 

11. 

8. 

10. 

12. 

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

En la familia que forman 3 hombres y 4 mujeres, ¿qué fracción de la familia representan las mujeres?

Solución

En este ejemplo la unidad la representa la familia, que a su vez está formada por 7 miembros (3 + 4 = 7), la fracción de la familia que representan las mujeres es el número de ellas dividida entre el total de miembros. Por lo tanto, la fracción es igual a $\frac{4}{7}$.

EJERCICIO 26

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una caja tiene 9 pelotas verdes y 5 azules, ¿qué porción de las pelotas que hay en la caja son azules?
2. ¿Qué fracción del día ha transcurrido cuando un reloj marca las 6:00 p.m.?
3. En una caja hay 40 listones rojos y 60 de color amarillo, ¿qué fracción del total de éstos representan los listones rojos y los amarillos?
4. Un obrero trabaja diariamente jornadas de 8 horas, ¿qué fracción del día ocupa para realizar sus otras actividades?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Clasificación

Fracciones propias. Son aquellas que tienen el numerador menor que el denominador.

Ejemplo

Las fracciones $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}, -\frac{3}{4}, \frac{8}{21}, \frac{1}{3}$ tienen el numerador menor que el denominador, por lo tanto, son propias.

Fracciones impropias. Son aquellas cuyo numerador es mayor o igual que el denominador.

Ejemplo

Las fracciones $\frac{8}{3}, \frac{6}{5}, -\frac{4}{3}, \frac{21}{8}, \frac{3}{1}$ son impropias, ya que el numerador es mayor que el denominador.

EJERCICIO 27

Identifica las fracciones propias y las impropias.

1. $\frac{7}{8}$	4. $\frac{12}{16}$	7. $\frac{16}{9}$	10. $\frac{53}{7}$	13. $\frac{345}{435}$
2. $\frac{8}{6}$	5. $\frac{5}{5}$	8. $\frac{2}{15}$	11. $\frac{38}{45}$	14. $\frac{229}{228}$
3. $\frac{9}{12}$	6. $\frac{9}{24}$	9. $\frac{32}{17}$	12. $\frac{345}{87}$	15. $\frac{213}{1\,028}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fracciones mixtas. Son aquellas formadas por una parte entera y una parte fraccionaria.

Ejemplo

Las fracciones: $2\frac{1}{3}, 5\frac{3}{4}, 3\frac{2}{3}$ son ejemplos de fracciones mixtas.

Conversiones

Para realizar la conversión de una fracción impropia a mixta se efectúa la división del numerador entre el denominador, el cociente es la parte entera, el residuo es el numerador de la fracción y el divisor es el denominador.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte a fracción mixta $\frac{43}{6}$.

Solución

Se efectúa la división:

$$\begin{array}{r|l} & 7 \leftarrow \text{parte entera} \\ \text{denominador} \rightarrow 6 & 43 \\ & 1 \leftarrow \text{numerador} \end{array}$$

Por lo tanto, la fracción $\frac{43}{6}$ en forma mixta es $7\frac{1}{6}$

2 Expresa en fracción mixta $\frac{125}{12}$.

Solución

Se realiza el cociente:

$$\begin{array}{r|l} & 10 \\ 12 & 125 \\ & 005 \end{array}$$

se obtiene que $\frac{125}{12} = 10\frac{5}{12}$

EJERCICIO 28

Convierte las siguientes fracciones impropias a fracciones mixtas.

1. $\frac{4}{3}$	7. $\frac{41}{6}$	13. $\frac{19}{18}$
2. $\frac{7}{5}$	8. $\frac{18}{3}$	14. $\frac{45}{16}$
3. $\frac{3}{2}$	9. $\frac{27}{7}$	15. $\frac{131}{40}$
4. $\frac{13}{4}$	10. $\frac{36}{13}$	16. $\frac{488}{65}$
5. $\frac{12}{3}$	11. $\frac{28}{13}$	17. $\frac{539}{105}$
6. $\frac{13}{8}$	12. $\frac{25}{12}$	18. $\frac{1\,258}{305}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para convertir una fracción mixta a impropia se multiplica la parte entera de la fracción mixta por el denominador de la parte fraccionaria y al producto se le suma el numerador.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte a fracción impropia $2\frac{3}{5}$.

Solución

Al aplicar el procedimiento anterior se obtiene:

$$2\frac{3}{5}=\frac{(2\times 5)+3}{5}=\frac{10+3}{5}=\frac{13}{5}$$

Por consiguiente, $2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$

2 La fracción impropia de $1\frac{7}{9}$ es igual a:

Solución

Se realiza el procedimiento para obtener:

$$1\frac{7}{9}=\frac{(1\times 9)+7}{9}=\frac{9+7}{9}=\frac{16}{9}$$

por tanto, $1\frac{7}{9}=\frac{16}{9}$

EJERCICIO 29

Convierte las siguientes fracciones mixtas en fracciones impropias.

1. $3\frac{2}{5}$	4. $5\frac{4}{6}$	7. $1\frac{9}{10}$	10. $7\frac{6}{19}$	13. $15\frac{19}{20}$	16. $50\frac{4}{7}$
2. $1\frac{2}{9}$	5. $7\frac{2}{3}$	8. $2\frac{8}{13}$	11. $12\frac{3}{10}$	14. $23\frac{1}{12}$	17. $121\frac{3}{5}$
3. $4\frac{2}{7}$	6. $8\frac{3}{4}$	9. $5\frac{3}{16}$	12. $18\frac{2}{30}$	15. $36\frac{3}{14}$	18. $223\frac{1}{7}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fracciones equivalentes

Son aquellas que se expresan de manera diferente, pero representan la misma cantidad. Para averiguar si 2 fracciones son equivalentes se efectúa la multiplicación del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, y el resultado debe ser igual a la multiplicación del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{15}{20}$?

Solución

Se efectúan las multiplicaciones indicadas y se comparan los resultados:

$$(3)(20) \text{ y } (4)(15)$$
$$60 = 60$$

Por tanto, las fracciones son equivalentes.

2 ¿Son equivalentes las fracciones $1\frac{1}{4}$ y $\frac{30}{24}$?

Solución

Se convierte la fracción mixta en fracción impropia $1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ y entonces para comparar $\frac{5}{4}$ con $\frac{30}{24}$ se realizan los productos:

$$(5)(24) \text{ y } (4)(30)$$
$$120 = 120$$

Las fracciones, por consiguiente, son equivalentes.

EJERCICIO 30

Indica si las siguientes fracciones son equivalentes.

1. $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$
2. $\frac{3}{8}$ y $\frac{48}{17}$
3. $\frac{1}{6}$ y $\frac{12}{72}$
4. $\frac{4}{9}$ y $\frac{28}{72}$
5. $\frac{18}{24}$ y $\frac{6}{8}$
6. $\frac{80}{15}$ y 6
7. $1\frac{3}{8}$ y $\frac{66}{48}$
8. $\frac{9}{7}$ y $1\frac{9}{35}$
9. $\frac{7}{4}$ y $1\frac{18}{24}$
10. $1\frac{1}{3}$ y $1\frac{9}{27}$
11. $\frac{13}{4}$ y $3\frac{3}{4}$
12. 6 y $5\frac{7}{8}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Propiedades

El valor de una fracción no se altera al multiplicar su numerador y denominador por un mismo número.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Al multiplicar por 2 al numerador y denominador de la fracción $\frac{6}{7}$, se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{6}{7}=\frac{6\times 2}{7\times 2}=\frac{12}{14}$$

2 Si al numerador y denominador de la fracción $\frac{5}{3}$ se les multiplica por 4, se obtiene la fracción equivalente $\frac{20}{12}$.

$$\frac{5}{3}=\frac{5\times 4}{3\times 4}=\frac{20}{12}$$

El valor de una fracción no se altera cuando al numerador y denominador se les divide entre el mismo número. A este procedimiento se le conoce como "simplificación de una fracción".

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica la fracción $\frac{12}{14}$.

Solución

Para simplificar la fracción $\frac{12}{14}$, se debe dividir al numerador y denominador entre 2, que es el máximo común divisor de 12 y 14

$$\frac{12}{14} = \frac{12 \div 2}{14 \div 2} = \frac{6}{7}$$

Por tanto, $\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

2 ¿Cuál es la fracción que resulta al simplificar $\frac{36}{24}$?

Solución

Otra forma de simplificar una fracción es dividir al numerador y al denominador entre un número primo, este proceso se realiza hasta que ya no exista un divisor primo común.

$$\frac{36}{24} = \frac{36 \div 2}{24 \div 2} = \frac{18}{12} = \frac{18 \div 2}{12 \div 2} = \frac{9}{6} = \frac{9 \div 3}{6 \div 3} = \frac{3}{2}$$

Por consiguiente, $\frac{36}{24} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

EJERCICIO 31

Simplifica las siguientes fracciones:

1. $\frac{20}{24}$
2. $\frac{18}{12}$
3. $\frac{9}{12}$
4. $\frac{28}{42}$
5. $\frac{25}{10}$
6. $\frac{12}{60}$
7. $\frac{90}{200}$
8. $\frac{42}{48}$
9. $\frac{132}{165}$
10. $\frac{245}{70}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ubicación en la recta numérica

Para ubicar la fracción $\frac{a}{b}$ en la recta numérica, se divide cada unidad en el número de partes que indica el denominador b y se toman las partes que indica el numerador a.

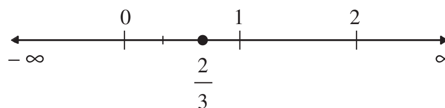
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Localiza en la recta numérica el número $\frac{2}{3}$.

Solución

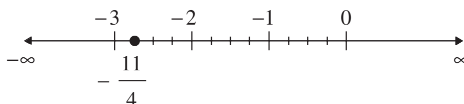
Se divide la unidad en 3 partes iguales y se toman 2



2 Grafica la fracción $-2\frac{3}{4}$ en la recta numérica.

Solución

Se convierte la fracción mixta a fracción impropia $-2\frac{3}{4}=-\frac{11}{4}$, ahora se divide en 4 partes iguales a las unidades que se encuentran a la izquierda del 0 y se toman 11 de esas divisiones.



EJERCICIO 32

Grafica en la recta numérica las siguientes fracciones:

1. $\frac{5}{8}$
2. $-\frac{9}{4}$
3. $-\frac{2}{6}$
4. $\frac{9}{5}$
5. $\frac{5}{9}$
6. $\frac{8}{12}$
7. $1\frac{1}{5}$
8. $-2\frac{1}{3}$
9. $-1\frac{2}{6}$
10. $2\frac{5}{10}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta con igual denominador

Se suman o restan los numeradores y se escribe el denominador en común.

EJEMPLOS

1 Efectúa la operación $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$.

Solución

Se suman los numeradores, el resultado tiene como denominador 4 y la fracción resultante se simplifica.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+2+1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Por tanto, el resultado de la operación es $\frac{3}{2}$

2 Efectúa la siguiente operación $\frac{7}{9}-\frac{5}{9}$.

Solución

El denominador de las fracciones es el mismo, por lo tanto, se restan únicamente los numeradores y el resultado tiene el mismo denominador.

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9}=\frac{2}{9}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{2}{9}$

3 ¿Cuál es el resultado de $1\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-2\frac{1}{5}$?

Solución

Se convierten las fracciones mixtas en fracciones impropias y se efectúan las operaciones.

$$1\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-2\frac{1}{5}=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}-\frac{11}{5}=\frac{8+4-11}{5}=\frac{1}{5}$$

El resultado es $\frac{1}{5}$

EJERCICIO 33

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}$
2. $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$
3. $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$
4. $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$
5. $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}+\frac{6}{7}$
6. $\frac{3}{10}+\frac{7}{10}+\frac{1}{10}+\frac{5}{10}$
7. $1\frac{5}{9}+3\frac{1}{9}+\frac{7}{9}$
8. $\frac{13}{16}+2\frac{9}{16}+4\frac{1}{16}+1\frac{3}{16}$
9. $1\frac{5}{8}+\frac{13}{8}+2\frac{7}{8}+\frac{6}{8}+\frac{9}{8}$
10. $\frac{12}{5}-\frac{8}{5}$
11. $\frac{4}{9}-\frac{1}{9}$
12. $\frac{11}{15}-\frac{7}{15}$
13. $3\frac{1}{3}-\frac{8}{3}$
14. $1\frac{2}{17}-\frac{14}{17}$
15. $\frac{4}{6}+\frac{7}{6}-\frac{8}{6}$
16. $\frac{3}{12}-\frac{5}{12}+\frac{10}{12}$
17. $\frac{3}{20}+\frac{18}{20}-\frac{13}{20}-\frac{4}{20}$
18. $\frac{7}{9}-\frac{11}{9}+\frac{15}{9}-\frac{6}{9}-\frac{1}{9}$
19. $1\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-3\frac{1}{2}$
20. $2\frac{7}{9}-\frac{4}{9}-\frac{7}{9}$
21. $1\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$
22. $1\frac{3}{5}+7\frac{4}{5}-9\frac{2}{5}$
23. $3\frac{2}{7}+1\frac{3}{7}-4\frac{3}{7}$
24. $2\frac{3}{5}+1\frac{1}{5}-2\frac{4}{5}-\frac{2}{5}$
25. $2\frac{1}{8}-\frac{7}{8}-1\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$
26. $\frac{14}{13}-1\frac{7}{13}-\frac{2}{13}+1\frac{9}{13}$
27. $3\frac{2}{5}+1\frac{1}{5}+\frac{6}{5}-4\frac{4}{5}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta con diferente denominador

Se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, también conocido como común denominador, éste se divide entre cada uno de los denominadores de las fracciones y los resultados se multiplican por su correspondiente numerador. Los números que resultan se suman o se restan para obtener el resultado final.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}$.

Solución

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 6, se divide por cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su respectivo numerador, posteriormente se suman los resultados de los productos.

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{(3)(3)+(2)(1)+(1)(2)}{6}=\frac{9+2+2}{6}=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$$

Por tanto, el resultado de la suma es $\frac{13}{6}$ o $2\frac{1}{6}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$?

Solución

El común denominador de 2 y 5 es 10, se efectúan las operaciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$$

3 Realiza $3\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

Solución

Se convierten las fracciones mixtas a fracciones impropias, enseguida se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se realiza el procedimiento para obtener el resultado.

$$3\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{19}{6}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{19-9+2}{6}=\frac{12}{6}=2$$

EJERCICIO **34**

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
2. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$
3. $\frac{5}{10}+\frac{3}{2}$
4. $\frac{7}{24}+\frac{11}{30}$
5. $\frac{8}{26}+\frac{15}{39}$
6. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
7. $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$
8. $\frac{5}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{18}$
9. $\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{16}$
10. $\frac{5}{8}-\frac{1}{4}$
11. $\frac{5}{12}-\frac{7}{24}$
12. $\frac{11}{64}-\frac{5}{8}$
13. $\frac{7}{5}+\frac{8}{35}-\frac{9}{21}$
14. $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1}{10}$
15. $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{11}{12}$
16. $\frac{7}{12}+\frac{3}{8}-\frac{1}{20}$
17. $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{3}{20}$
18. $3+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$
19. $\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}$
20. $\frac{4}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$
21. $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}$

22. $3+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}+\frac{7}{2}$

23. $\frac{7}{5}-\frac{1}{2}-\frac{3}{10}-\frac{32}{20}$

24. $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

25. $4\frac{3}{10}-\frac{3}{5}$

26. $4\frac{1}{2}-6$

27. $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-2\frac{3}{4}$

28. $1\frac{1}{6}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

29. $4\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}+2$

30. $7\frac{1}{2}-1\frac{2}{5}+\frac{9}{10}$

31. $6\frac{1}{5}+3\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}$

32. $3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}$

33. $2\frac{1}{4}+3\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}+1\frac{1}{6}$

34. $1\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}+1\frac{7}{12}$

35. $1\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-2\frac{1}{8}$

36. $1\frac{1}{6}-\frac{3}{2}+2\frac{7}{12}-4+\frac{1}{3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Para preparar un pastel se emplean los siguientes ingredientes: $1\frac{1}{2}$ kg de harina, $\frac{1}{2}$ kg de huevo, una taza de leche que equivale a $\frac{1}{4}$ kg y azúcar $\frac{5}{8}$ kg. ¿Cuántos kilogramos pesan estos ingredientes?

Solución

Se suman los kilogramos de todos los ingredientes y se obtiene:

$$1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{12+4+2+5}{8}=\frac{23}{8}=2\frac{7}{8}$$

Por consiguiente, los ingredientes pesan $2\frac{7}{8}$ kg

2 Miguel perdió $\frac{1}{3}$ de su dinero y prestó $\frac{1}{4}$. ¿Qué parte de su dinero le queda?

Solución

Se suma la porción que perdió con la que prestó y este resultado se resta a la unidad que representa lo que tenía.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12} \qquad 1-\frac{7}{12}=\frac{1}{1}-\frac{7}{12}=\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12}$$

Por tanto, a Miguel le sobran $\frac{5}{12}$ de su dinero.

EJERCICIO 35

Resuelve los siguientes problemas:

1. Juan compró en el supermercado $\frac{1}{2}$ kg de azúcar, $\frac{3}{4}$ kg de harina y 1 kg de huevo, estos productos los colocó en una bolsa, ¿cuántos kilogramos pesa dicha bolsa?
2. Dos calles tienen las siguientes longitudes: $2\frac{2}{5}$ y $1\frac{3}{4}$ de kilómetro, ¿cuál es la longitud total de ambas?
3. Al nacer un bebé pesó $2\frac{1}{4}$ kilogramos, en su primera visita al pediatra éste informó a los padres que el niño había aumentado $\frac{1}{2}$ kilogramo; en su segunda visita observaron que su aumento fue de $\frac{5}{8}$ de kilogramo. ¿Cuántos kilos pesó el bebé en su última visita al médico?

4. A Joel le pidieron que realizara una tarea de física que consistía en contestar un cuestionario y resolver unos problemas. Se tardó $\frac{3}{4}$ de hora en responder el cuestionario y $2\frac{1}{2}$ para solucionar los problemas, ¿cuánto tiempo le tomó a Joel terminar toda la tarea?
5. En su dieta mensual una persona debe incluir las siguientes cantidades de carne: la primera semana $\frac{1}{4}$ de kilogramo, la segunda $\frac{3}{8}$, la tercera $\frac{7}{16}$ y la última semana $\frac{1}{2}$ kilogramo. ¿Cuántos kilos consumió durante el mes?
6. Tres cuerdas tienen las siguientes longitudes: $3\frac{2}{5}$, $2\frac{3}{10}$ y $4\frac{1}{2}$ metros, cada una. ¿Cuál es la longitud de las 3 cuerdas juntas?
7. La fachada de una casa se va a pintar de color blanco y azul, si $\frac{5}{12}$ se pintan de color blanco, ¿qué porción se pintará de color azul?
8. Un ciclista se encuentra en una competencia y ha recorrido $\frac{5}{9}$ de la distancia que debe cubrir para llegar a la meta, ¿qué fracción de la distancia total le falta por recorrer?
9. Un sastre realiza una compostura a un pantalón cuyo largo originalmente es de 32 pulgadas, si para hacer la valenciana se dobla hacia arriba $1\frac{3}{4}$ de pulgada, ¿de qué largo quedó el pantalón después de la compostura?
10. De una bolsa de 1 kilogramo de azúcar se extrae una porción que equivale a $\frac{3}{8}$ de kilogramo, ¿cuánta azúcar queda en la bolsa?
11. Un depósito contiene agua hasta $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad, si se ocupa una cantidad de agua equivalente a la mitad de la capacidad del depósito, ¿qué fracción de su máxima capacidad sobra?
12. Enrique vende $\frac{1}{4}$ de terreno de su finca, alquila $\frac{1}{6}$ y lo restante lo cultiva. ¿Qué porción de la finca siembra?
13. De un rollo de tela se han cortado las siguientes porciones: $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{6}$ de metro, ¿qué porción del rollo queda?
14. Luis, Jorge y Adán se organizan para realizar una tarea: Luis se compromete a hacer la mitad y Jorge hará la octava parte, ¿qué fracción de la tarea le corresponde a Adán?
15. Los $\frac{2}{5}$ de un terreno se venden, $\frac{1}{4}$ del resto se siembra de chile de árbol, ¿qué parte del terreno sobra?
16. $\frac{3}{10}$ de los alumnos de una escuela están en cuarentena debido a que se encuentran enfermos de sarampión, además $\frac{1}{5}$ de la población escolar llega tarde y las autoridades no les permiten la entrada. ¿Qué porción de alumnos asistió a la escuela?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Para realizar esta operación se multiplican los numeradores y los denominadores. En caso de que existan fracciones mixtas, se deben convertir a fracciones impropias y posteriormente realizar los productos.

EJEMPLOS



1 Efectúa $\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}$.

Solución

Se aplica el procedimiento descrito y se simplifica el resultado.

$$\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2\times1}{5\times6}=\frac{2}{30}=\frac{2\div2}{30\div2}=\frac{1}{15}$$

Por tanto, el resultado es $\frac{1}{15}$

2 ¿Cuál es el resultado de $3\frac{2}{4}\times4\frac{1}{6}$?

Solución

Se convierten las fracciones mixtas a impropias y se efectúa el producto.

$$3\frac{2}{4}\times4\frac{1}{6}=\frac{14}{4}\times\frac{25}{6}=\frac{350}{24}=\frac{350\div2}{24\div2}=\frac{175}{12}=14\frac{7}{12}$$

El resultado del producto es $\frac{175}{12}$ o $14\frac{7}{12}$

3 Realiza $\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\times1\frac{1}{3}\times2$.

Solución

Se convierten las fracciones mixtas a impropias, se observa que existen factores iguales en el numerador y denominador, por lo tanto, es recomendable simplificar la expresión para obtener el resultado.

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\times1\frac{1}{3}\times2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{1}=\frac{3\times1\times4\times2}{4\times6\times3\times1}=\frac{1\times2}{6\times1}=\frac{2}{6}=\frac{2\div2}{6\div2}=\frac{1}{3}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{1}{3}$

EJERCICIO 36

Efectúa los siguientes productos:

1. $\frac{2}{5}\times\frac{10}{8}$
2. $\frac{5}{4}\times\frac{2}{7}$
3. $\frac{3}{6}\times\frac{2}{9}$
4. $\frac{3}{4}\times\frac{6}{3}$
5. $\frac{3}{4}\times2\frac{3}{5}$
6. $3\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}$
7. $1\frac{2}{5}\times2\frac{5}{7}$
8. $\frac{6}{3}\times2\frac{1}{2}$
9. $1\frac{3}{5}\times4\frac{5}{8}$
10. $2\frac{2}{3}\times3\frac{1}{5}$
11. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$
12. $\frac{1}{5}\times\frac{9}{4}\times\frac{12}{6}$
13. $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}$
14. $\frac{3}{4}\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{5}$
15. $1\frac{1}{6}\times\frac{12}{7}\times\frac{14}{2}$
16. $\frac{7}{9}\times\frac{8}{5}\times\frac{3}{14}\times15$
17. $2\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{1}{3}\times1\frac{3}{5}$
18. $\frac{2}{9}\times\frac{7}{5}\times\frac{3}{14}\times5$
19. $2\frac{4}{9}\times2\frac{1}{4}\times1\frac{3}{11}\times1\frac{1}{3}$
20. $2\times7\frac{3}{5}\times1\frac{6}{19}\times\frac{3}{4}$
21. $1\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times2\frac{2}{5}\times2\frac{1}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 En un grupo hay 40 alumnos, de ellos las tres quintas partes son mujeres, ¿cuántas mujeres hay en el grupo?

Solución

Para obtener el total de mujeres del grupo se multiplica el total de alumnos por la fracción que representan las mujeres.

$$40\times\frac{3}{5}=\frac{40}{1}\times\frac{3}{5}=\frac{120}{5}=24\,\text{mujeres}$$

Por consiguiente, hay 24 mujeres en el grupo.

2 Se realizó una encuesta para averiguar qué medios informativos se prefieren; de cada 10 personas, 4 prefieren el periódico; si se encuestó a 600 individuos, ¿cuántas prefieren otros medios?

Solución

La fracción $\frac{4}{10}$ representa a las personas que prefieren el periódico, por lo tanto, $\frac{6}{10}$ representa a las personas que prefieren otros medios, entonces, para obtener el número de personas que representa esta última fracción se multiplica por el total de la muestra.

$$\frac{6}{10}\times 600=\frac{6}{10}\times\frac{600}{1}=\frac{3600}{10}=360\text{ personas prefieren otros medios.}$$

EJERCICIO 37

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una alberca tiene capacidad para 3 000 litros de agua, si sólo se encuentra a tres cuartas partes de su capacidad, ¿cuántos litros tiene?
2. En un estadio de béisbol $\frac{2}{3}$ de los aficionados apoyan al equipo local, si el número de asistentes es de 6 300 personas, ¿cuántas apoyan al equipo visitante?
3. La tercera parte de una población de 2 100 habitantes es afectada por cierto virus, ¿cuántos habitantes no padecen el virus?
4. Se sabe que los viernes por la noche en el D.F. $\frac{1}{4}$ del total de automovilistas manejan en estado de ebriedad, si se realiza un sondeo entre 600 conductores un viernes por la noche, ¿cuántos automovilistas se espera que manejen en estado inconveniente?
5. En una caja hay 120 pelotas: verdes, rojas y azules, si las pelotas rojas son la tercera parte del total y las azules equivalen a la sexta parte, ¿cuántas hay de cada color?
6. El costo de un kilogramo de azúcar es de $8, ¿cuál es el precio de $3\frac{3}{4}$ kg?
7. Julián tenía $1 500, si compró 3 libros que le costaron dos quintas partes de su dinero, ¿cuánto le sobró?
8. La velocidad de un automóvil es de 100 kilómetros por hora, ¿qué distancia recorre en un tiempo de $2\frac{3}{4}$ horas?
9. Determina los dos tercios de los tres cuartos de la mitad de 240.

10. En un grupo de 60 alumnos, las dos terceras partes se inclinan por la física, de éstos, la mitad quieren ser físicos nucleares y la cuarta parte de ellos desea realizar una maestría en el extranjero. ¿Cuántos alumnos desean estudiar su maestría en otro país?

11. Si a 2 de cada 10 personas les gusta el rock, de una población de 4 500, ¿cuántas prefieren otros ritmos?

12. La recomendación de un doctor a un enfermo de gripe es que se tome $1\frac{1}{2}$ pastillas de ácido acetilsalicílico (aspirina) durante 4 días cada 8 horas, para contrarrestar los malestares de esta enfermedad infecciosa. Si el paciente sigue cabalmente las indicaciones del doctor, ¿cuántas pastillas de aspirina tomará?

13. Las calorías y los joules en la física son unidades de energía; además, se sabe que una caloría equivale a $\frac{21}{5}$ joules. ¿Cuánta energía en joules habrá en un alimento de 120 calorías?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

- Se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el producto es el numerador de la fracción resultante.
- Se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, el producto es el denominador de la fracción resultante.

Para realizar esta operación:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$.

Solución

Se aplican los pasos y se simplifica el resultado.

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2\times 5}{3\times 4}=\frac{10}{12}=\frac{10\div 2}{12\div 2}=\frac{5}{6}$$

Por tanto, $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{5}{6}$

2 Determina el resultado de $4\frac{2}{5}\div 2\frac{3}{4}$.

Solución

Se convierten las fracciones mixtas en impropias y se efectúa la división.

$$4\frac{2}{5}\div 2\frac{3}{4}=\frac{22}{5}\div\frac{11}{4}=\frac{22\times 4}{5\times 11}=\frac{88}{55}=\frac{88\div 11}{55\div 11}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$$

Por consiguiente: $4\frac{2}{5}\div 2\frac{3}{4}=1\frac{3}{5}$

EJERCICIO 38

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\frac{1}{6}\div\frac{2}{3}$
2. $\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$
3. $\frac{6}{8}\div\frac{1}{4}$
4. $\frac{13}{9}\div\frac{4}{3}$
5. $\frac{5}{12}\div\frac{5}{6}$
6. $\frac{7}{8}\div\frac{21}{16}$
7. $\frac{4}{3}\div\frac{5}{30}$
8. $\frac{28}{7}\div\frac{4}{5}$
9. $\frac{4}{6}\div 1\frac{2}{3}$
10. $2\frac{2}{3}\div\frac{4}{15}$
11. $1\frac{4}{5}\div\frac{13}{10}$
12. $\frac{1}{2}\div 3\frac{1}{4}$
13. $\frac{4}{9}\div 8$
14. $3\frac{1}{4}\div 26$
15. $1\div 1\frac{1}{4}$
16. $34\div 2\frac{5}{6}$
17. $\frac{11}{9}\div 3\frac{2}{3}$
18. $5\frac{1}{4}\div 1\frac{1}{6}$
19. $5\frac{5}{8}\div 3\frac{3}{4}$
20. $1\frac{11}{13}\div 8$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

¿Cuántas bolsas de $\frac{5}{8}$ de kilogramo se pueden llenar con 20 kilogramos de galletas?

Solución

Se dividen los 20 kilogramos entre la capacidad de las bolsas para obtener el número de las que se pueden llenar:

$$20\div\frac{5}{8}=\frac{20}{\frac{5}{8}}=\frac{\frac{20}{1}}{\frac{5}{8}}=\frac{20\times 8}{5\times 1}=\frac{160}{5}=32$$

Por tanto, con 20 kilos se pueden llenar 32 bolsas de $\frac{5}{8}$ de kilogramo.

EJERCICIO 39

Resuelve los siguientes problemas:

1. El peso aproximado de una pizza familiar es de un kilogramo y si la pizza se divide en 8 porciones iguales, ¿cuánto pesa cada rebanada?
2. ¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro se llenan con 60 litros de agua?
3. ¿Cuántas piezas de $2\frac{2}{3}$ de metro de longitud se obtienen de una varilla de $13\frac{1}{3}$ metros de largo?
4. Si una llave vierte $6\frac{1}{3}$ litros de agua por minuto, ¿cuánto tiempo empleará en llenar un depósito de $88\frac{2}{3}$ litros de capacidad?
5. ¿Cuál es la velocidad por hora de un automóvil que en $2\frac{1}{2}$ horas recorre 120 kilómetros?
6. Francisco compró $8\frac{2}{3}$ kilogramos de jamón con \$156, ¿cuál es el costo de un kilogramo?
7. Una familia de 6 integrantes consume diariamente $1\frac{1}{2}$ litros de leche, si todos ingieren la misma cantidad, ¿cuánto toma cada uno?
8. Javier repartió 160 kilogramos de arroz entre un grupo de personas, de tal forma que a cada una le tocaron $6\frac{2}{3}$ kg, ¿cuántas personas eran?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Operaciones con signos de agrupación

Se realizan las operaciones que se encuentran dentro de un signo de agrupación, posteriormente éstos se suprimen, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $2\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$.

Solución

Se efectúan las operaciones que encierran los paréntesis, los resultados se multiplican por las cantidades de fuera y se simplifican para sumarse después y obtener el resultado final.

$$2\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=2\left(\frac{5-2}{4}\right)+3\left(\frac{3-2}{6}\right)$$
$$=2\left(\frac{3}{4}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{4}+\frac{3}{6}$$
$$=\frac{6}{4}+\frac{3}{6}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

El resultado de la operación es 2

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{5}{4}\div\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$?

Solución

Se efectúa la suma, el resultado se simplifica y después se realiza la división para obtener el resultado de la operación propuesta.

$$\frac{5}{4}\div\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{4}\div\left(\frac{2+1}{6}\right)$$
$$=\frac{5}{4}\div\left(\frac{3}{6}\right)=\frac{5}{4}\div\frac{1}{2}$$
$$=\frac{5\times 2}{4\times 1}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{5}{2}$ o $2\frac{1}{2}$

3 Realiza $\left(1\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$.

Solución

Se realizan las restas, después la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\left(1\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{7}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{14-9}{12}\right)\left(\frac{5-2}{10}\right)$$
$$=\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{15}{120}=\frac{15\div 15}{120\div 15}=\frac{1}{8}$$

Por tanto, el resultado es $\frac{1}{8}$

4 ¿Cuál es el resultado de $\left(1\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)$?

Solución

Se realizan las restas y posteriormente la división para obtener el resultado final.

$$\left(1\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{8-5}{6}\right)\div\left(\frac{3-6}{8}\right)$$
$$=\frac{3}{6}\div\frac{-3}{8}=\frac{24}{-18}=-\frac{4}{3}$$

Por consiguiente, el resultado es $-\frac{4}{3}$

EJERCICIO 40

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{3}{7}(2)-\frac{5}{14}(4)$
2. $\frac{3}{4}(3)+1\frac{1}{2}$
3. $\frac{3}{8}(4-2)+\frac{5}{16}(8-4)$
4. $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$
5. $\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)$
6. $\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-2\frac{1}{3}\right)$
7. $\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(3-2\frac{1}{2}\right)$
8. $\left(5\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{12}{17}\right)$
9. $\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{7}-\frac{3}{14}\right)$
10. $\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)$
11. $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{7}{10}\right)\div\left(\frac{3}{4}\right)$
12. $\left(1\frac{1}{9}\right)\div\left(4-2\frac{1}{3}\right)$
13. $\left(\frac{17}{22}+1\right)\div\left(2-\frac{9}{11}\right)$
14. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\div\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\right)$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 La matrícula de una escuela aumentó $\frac{1}{4}$ con respecto al año pasado. Si había 400 alumnos, ¿cuántos alumnos hay este año?

Solución

Se obtiene la cuarta parte de 400: $\frac{1}{4}$ (400) y se suman los 400 alumnos del año pasado.

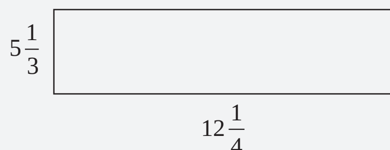
$$\frac{1}{4}(400)+400=\frac{400}{4}+400$$
$$=100+400$$
$$=500$$

Por tanto, hay 500 alumnos este año.

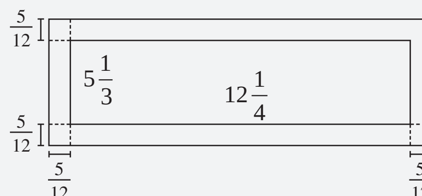
2 Una fotografía mide $5\frac{1}{3}$ pulgadas de ancho por $12\frac{1}{4}$ pulgadas de largo. Si esta fotografía se coloca en un marco que tiene un ancho constante de $\frac{5}{12}$ pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la fotografía colocada ya en el marco?

Solución

Fotografía:



Fotografía con marco



Entonces las dimensiones son:

ancho: $5\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}\right)=\frac{16}{3}+\frac{10}{12}=\frac{16}{3}+\frac{5}{6}=\frac{32+5}{6}=\frac{37}{6}=6\frac{1}{6}$ pulgadas.

largo: $12\frac{1}{4}+\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}\right)=\frac{49}{4}+\frac{10}{12}=\frac{49}{4}+\frac{5}{6}=\frac{147+10}{12}=\frac{157}{12}=13\frac{1}{12}$ pulgadas.

EJERCICIO 41

Resuelve los siguientes problemas:

1. Se sabe que cuando un fluido se congela aumenta $\frac{1}{12}$ del volumen que ocupaba en su estado líquido, si una botella de agua tiene un volumen de 3 600 mililitros en su estado líquido, ¿cuál será el volumen del mismo fluido en estado sólido?
2. Agustín se ejercita caminando todas las tardes de la semana para mejorar su presión arterial, entre semana camina $\frac{1}{2}$ hora, mientras que el fin de semana camina $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Cuánto tiempo invierte Agustín en caminar?
3. Jorge y David deciden juntar parte de sus ahorros para comprar un nuevo juego de video, Jorge aporta $\frac{3}{5}$ de $2 000 ahorrados, mientras que David decide aportar $\frac{1}{3}$ de $3 000, ¿cuál fue el costo del juego de video?
4. Roberto divide su sueldo de la siguiente forma, $\frac{1}{3}$ a alimentación, $\frac{1}{2}$ al pago de renta y servicios y $\frac{1}{6}$ a diversión. Si Roberto percibe en un mes $12 000, ¿cuánto dinero designa a cada rubro?
5. En una bodega hay 4 cajas de 20 bolsas de $\frac{1}{2}$ kilogramo de detergente, 6 cajas con 15 bolsas de $\frac{3}{4}$ de kilogramo y 3 cajas con 10 bolsas de un kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de detergente hay en la bodega?
6. En pruebas de manejo se ha detectado que por efecto del uso y del calor, la presión de los neumáticos de un automóvil aumenta $\frac{1}{14}$ con respecto a la presión que tienen si el automóvil se encuentra estático. ¿Cuál era la presión de unos neumáticos, que después de ser sometidos a una prueba de manejo registraron una presión de $30\frac{lb}{in^2}$?
7. Una fotografía mide $6\frac{1}{4}$ pulgadas de ancho por $10\frac{1}{2}$ pulgadas de largo. Si esta fotografía se coloca en un marco que tiene un ancho constante de $\frac{3}{8}$ pulgadas, ¿cuáles son las nuevas dimensiones de la fotografía colocada ya en el marco?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fracciones complejas

Se llama así a la fracción que está formada por una serie de operaciones subsecuentes con fracciones.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $\dfrac{1-\dfrac{3}{4}}{1+\dfrac{1}{8}}$.

Solución

Primero se efectúan las operaciones $1-\dfrac{3}{4}$ y $1+\dfrac{1}{8}$, sus resultados se dividen y se simplifican para obtener el resultado que se desea.

$$\frac{1-\dfrac{3}{4}}{1+\dfrac{1}{8}}=\frac{\dfrac{4-3}{4}}{\dfrac{8+1}{8}}=\frac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{9}{8}}=\frac{8\times 1}{9\times 4}=\frac{8}{36}=\frac{8\div 4}{36\div 4}=\frac{2}{9}$$

Por consiguiente, el resultado es $\dfrac{2}{9}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}}}$?

Solución

Se inicia con la operación $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}$ y las subsecuentes hasta obtener el resultado.

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{2-1}{4}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}}}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$$

Por tanto, el resultado que se buscaba es $\dfrac{1}{5}$

EJERCICIO 42

Resuelve las siguientes fracciones complejas:

1. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{7}{2}-3}}$

2. $1+\dfrac{2}{3+\dfrac{5}{1-\dfrac{1}{3}}}$

3. $3+\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}}}$

4. $2-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}$

5. $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}}$

6. $\dfrac{\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{3}{4}}+\dfrac{1+\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{4}}}{1-\dfrac{1}{2}}\times\dfrac{9}{40}$

7. $\dfrac{\dfrac{1+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}-\dfrac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}}{1+\frac{2}{3}}\times\left(10\frac{1}{3}-3\frac{2}{3}\right)$

8. $\dfrac{\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}+\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}-\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{10}}}{\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$

9. $\dfrac{\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}+\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}-\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}}{\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}-\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}}$

10. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}}}}$

11. $\dfrac{\dfrac{3-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}-\dfrac{2-\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}}{3-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{25}\right)$

12. $\dfrac{\dfrac{2+\frac{1}{3}}{7}+\dfrac{1-\frac{1}{4}}{3}}{\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}-\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}}\times\left(\frac{2}{7}\div\frac{4}{19}\right)$

13. $\dfrac{\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1+\dfrac{2}{2-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1-\dfrac{2}{1+\frac{1}{2}}}}{7+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\frac{7}{6}}}}$

14. $\dfrac{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+2}}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$

15. $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3-\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

CAPÍTULO 5

NÚMEROS DECIMALES

Reseña HISTÓRICA



Al-Kashi (n. 1380) contribuyó al desarrollo de las fracciones decimales no sólo para aproximar números algebraicos, sino también para números reales como *pi*. Su aporte a las fracciones decimales es tan importante que por muchos años se le consideró su inventor. Sin embargo, en la década de los ochenta del siglo pasado se halló evidencia de que el empleo de fracciones decimales se remonta al siglo X en el Islam, por al-Uqlidisi; de hecho, el sistema de notación que empleó al-Uqlidisi era superior al de al-Kashi.

Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud
al-Kashi (1380-1450)

Definición

Un **número decimal** o **fracción decimal** es el cociente de números racionales o el resultado de una fracción común. Existen dos tipos de números decimales, los exactos y los inexactos.

Números decimales exactos. Son aquellos que tienen un número finito de cifras decimales.

Ejemplos

0.25, es un número de 2 cifras decimales
0.732, tiene 3 cifras decimales
2.1, tiene una cifra entera y una decimal

Números decimales inexactos. Son aquellos que tienen un número infinito de cifras decimales. En estos números, los puntos suspensivos indican que existe un número infinito de cifras o que el residuo de la división nunca es cero.

Ejemplos

$$0.96525..., \quad 0.85858585..., \quad 6.333333...$$

- **Números decimales inexactos periódicos**

Decimal que tiene una o más cifras que se repiten indefinidamente después del punto o de una cierta cifra decimal. La cifra o cifras repetidas reciben el nombre de periodo.

Ejemplos

Los decimales periódicos se expresan de la siguiente forma:

$0.33333... = 0.\overline{3}$, en este ejemplo el periodo consta de una cifra
$0.32565656... = 0.32\overline{56}$, el periodo es 56 y la parte no periódica es 32
$5.315024024024... = 5.315\overline{024}$, 5 es la parte entera, 315 la decimal y 024 el periodo

- **Números decimales inexactos no periódicos**

Decimal que no tiene un periodo. Estos números representan a los números irracionales (no se expresan como el cociente de 2 números enteros).

Ejemplos

$$1.7320508... = \sqrt{3}, \quad 3.141592654... = \pi, \quad 2.7182818... = e$$

Lectura y escritura

Para leer o escribir números decimales, se toma como referencia la siguiente tabla.

Unidades			Decimales					
Centenas	Decenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diezmilésimos	Cienmilésimos	Millonésimos

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Lee el número 0.18.

Solución

0.18 se acomoda de izquierda a derecha haciendo coincidir el cero con el periodo de las unidades.

Unidades	Décimos	Centésimos
0	1	8

El número dado está formado por 1 décimo y 8 centésimos, y se lee: "dieciocho centésimos".

2 Lee el número 5.037.

Solución

5.037 se acomoda de izquierda a derecha haciendo coincidir al 5 con el periodo de las unidades.

Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos
5	0	3	7

El número está formado por 5 unidades, 0 décimos, 3 centésimos y 7 milésimos. Se lee: "cinco enteros treinta y siete milésimos".

EJERCICIO 43

Lee los siguientes números:

1. 0.31
2. 1.098
3. 20.004
4. 2.809
5. 12.0915
6. 3.567
7. 13.0876
8. 0.00005
9. 245.06093
10. 2.040009
11. 18.040506
12. 342.000256


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para expresar una cantidad numéricamente, se acomoda dicha cantidad en la tabla como lo ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Escribe con número "un entero, veinticinco centésimos".

Solución

El número abarca hasta el periodo de los centésimos, se acomoda la cantidad en la tabla y queda expresada como:

Unidades	Décimos	Centésimos
1	2	5

un entero, veinticinco centésimos = 1.25

2 Expresa con número "seis enteros, nueve cienmilésimos".

Solución

La cantidad de acuerdo con la tabla inicia en las unidades y termina en el periodo de los cienmilésimos, por lo tanto se expresa como:

Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diez-milésimos	Cien-milésimos
6	0	0	0	0	9

seis enteros, nueve cienmilésimos = 6.00009

EJERCICIO **44**

Expresa con números las siguientes cantidades:

1. Cinco diezmilésimos.
2. Cuarenta y ocho cienmilésimos.
3. Seiscientos setenta y ocho diezmilésimos.
4. Dos enteros cuatro décimos.
5. Seis enteros cuarenta y tres milésimos.
6. Cinco enteros veintinueve cienmilésimos.
7. Treinta y dos mil quinientos veinticuatro cienmilésimos.
8. Sesenta y seis cienmilésimos.
9. Un entero cuatrocientos setenta y siete millonésimos.
10. Tres millonésimos.
11. Cuatrocientos setenta y dos enteros doscientos treinta y dos mil ciento un millonésimos.
12. Cuarenta y ocho enteros treinta mil doscientos quince millonésimos.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Se acomodan los elementos de la operación en forma vertical con el punto decimal como referencia y se hacen coincidir las clases, para después efectuar las operaciones correspondientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de 2.0098 + 0.37 + 105.4056.

Solución

Se acomodan las cantidades de manera vertical y se efectúan las operaciones columna por columna de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{r} 2.0098 \\ +\quad 0.37 \\ 105.4056 \\ \hline 107.7854 \end{array}$$

Por tanto, el resultado de la operación es 107.7854

2 ¿Cuál es el resultado de 13.284 – 5.73?

Solución

Se acomodan los números y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{r} 13.284 \\ -\quad 5.73 \\ \hline 7.554 \end{array}$$

El resultado de la resta es 7.554

EJERCICIO 45

Efectúa las siguientes operaciones:

1. 5.7 + 39.4 + 4.0318 + 21.68
2. 28.018 + 37.42 + 4.0318 + 3.028 + 5.084
3. 4.036 + 28.032 + 586.25 + 3 146.6 + 0.078
4. 481.08 + 0.216 + 39.5 + 26.49 + 0.8347
5. 8 576 + 0.3867 + 2.64 + 38 + 0.5643 + 213
6. 4.273 – 3.16
7. 12 – 8.963
8. 123.6504 – 98.45694
9. 400 – 278.00258
10. 5 276.2369 – 4 998.269889
11. $$\begin{array}{r} 3.08 \\ 48.047 \\ 6.8 \\ +\quad 15.16 \\ 216.37 \\ 38.415 \\ \hline \end{array}$$
12. $$\begin{array}{r} 98.765 \\ 146.38 \\ 2.675 \\ +\quad 36.4186 \\ 2.3 \\ 158.16 \\ \hline \end{array}$$

13. $\begin{array}{r} 4\,897.08 \\ 38\,926.785 \\ + \quad 4\,876.845 \\ 12\,000.009 \\ \hline \end{array}$

14. $\begin{array}{r} 396.086 \\ 4\,845.6 \\ 36.0876 \\ + \quad 0.318 \\ 26.031 \\ 8\,216.208 \\ \hline \end{array}$

15. $\begin{array}{r} 86\,543.32 \\ 858\,796.076 \\ + \quad 29\,198.007 \\ 938\,009.108 \\ \hline \end{array}$

16. $\begin{array}{r} 48.567 \\ -\ 38.3265 \\ \hline \end{array}$

17. $\begin{array}{r} 4\,875.0086 \\ -\ 2\,356.54 \\ \hline \end{array}$

18. $\begin{array}{r} 386.08 \\ -\ 28.00486 \\ \hline \end{array}$

19. $\begin{array}{r} 38\,654.032 \\ -\ 654.087 \\ \hline \end{array}$

20. $\begin{array}{r} 2\,384.6282 \\ -\ 1\,432.4908 \\ \hline \end{array}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Benito estudió 1.5 horas el lunes, 2.3 el martes, 1.25 el miércoles y una hora el jueves, ¿cuántas horas estudió para presentar su examen el viernes?

Solución

Para obtener el tiempo total que estudió se suman las horas que dedicó por día.

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ 2.3 \\ +\ 1.25 \\ 1 \\ \hline 6.05 \end{array}$$

Por consiguiente, Benito estudió 6.05 horas para preparar su examen.

2 Si un corredor recorre 3.75 km de una distancia de 5 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para finalizar la ruta?

Solución

Se efectúa la resta y se obtiene la distancia que falta por recorrer.

$$\begin{array}{r} 5.00 \\ -\ 3.75 \\ \hline 1.25 \end{array}$$

Por tanto, le faltan 1.25 km para terminar.

3 De una bolsa de azúcar de 3.00 kg, se extraen las siguientes cantidades: 0.50, 0.20 y 0.75 kilogramos, ¿qué cantidad queda en la bolsa?

Solución

Se suman las cantidades de azúcar que se extrajeron de la bolsa y el resultado se resta a los 3 kg.

$$\begin{array}{r} 0.50 \\ +\ 0.20 \\ 0.75 \\ \hline 1.45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.00 \\ -\ 1.45 \\ \hline 1.55 \end{array}$$

En la bolsa quedan 1.55 kg.

EJERCICIO 46

Resuelve los siguientes problemas:

1. En el año 2000 el número de habitantes de una población fue de 1.8 millones, para el año siguiente su incremento fue de 0.25 millones y para el tercer año aumentó 0.75 millones, ¿cuántos habitantes había al final del año 2002?
2. Jerónimo se prepara para una competencia de atletismo: el lunes recorre 3.75 km, el martes 2.85, el miércoles 3.5, el jueves 3 y el viernes 2.95 km. ¿Qué distancia recorre durante los 5 días?
3. De un saco de arroz se han tomado 23.55 kg, después 15.85 kg y más tarde 24.525 kg, si el saco quedó vacío, ¿cuántos kilogramos del cereal contenía?
4. Los lados de un terreno hexagonal irregular miden: 8.65, 12.50, 13, 12, 9.35 y 10 metros, respectivamente. ¿Cuál es su perímetro?
5. Rodrigo pintó 4 habitaciones de una casa, en la primera utilizó 1.5 galones de pintura, 2.15 en la segunda, 1.85 en la tercera y 2 en la última. ¿Cuántos galones ocupó en total?
6. Un tráiler se carga con las siguientes toneladas de productos: 8 toneladas de comestibles, 3.5 de herramientas y 7.25 de material para la construcción. ¿Cuál es el peso total en toneladas si la caja del remolque pesa 6 toneladas?
7. El registro de precipitación pluvial del segundo cuatrimestre del año en la selva de Chiapas es: mayo 11.4 centímetros, junio 12.6, julio 15.8 y en agosto 18.75. ¿Cuál fue la precipitación pluvial durante este periodo?
8. En un edificio existen 5 departamentos con un gasto promedio mensual de energía eléctrica de: en el departamento 1 se consumen 120.8 kilowatts; en el 2, 135.6; en el 3, 118.5; en el 4, 233.6, y en el 5, 160.7, ¿cuál es el consumo mensual de energía eléctrica en todo el edificio?
9. Tania fue al mercado y compró 2.5 kilogramos de papa, 1.5 kilogramos de aguacate, 0.50 kilogramos de limón y 6.5 kilogramos de naranja. ¿Cuál es el peso total de la mercancía que compró Tania?
10. Delia regularmente consume en el desayuno 120.7 calorías; durante el almuerzo 190.3, en la comida 258.3 y durante la cena 97.2. ¿Cuál es su ingesta calórica en un día?
11. Durante el recreo una niña consume: una torta de $18.50, un jugo de $8, una paleta de $3.80, caramelos de $6.70 y frituras de $5.50, ¿cuánto debe pagar por su consumo?
12. Para preparar un pastel se emplean estos ingredientes en kilogramos: 0.750 de harina, 0.200 de azúcar, 0.008 de royal y 3 huevos, cuyo peso es 0.065 cada uno. ¿En total cuánto pesa el pastel?
13. Las canciones del último disco de sencillos del "Marqués de la canción", duran en minutos: 4.56, 3.58, 4.05, 3.51 y 4.12, ¿cuál es el tiempo total de duración de la obra musical?
14. Un ciclista ha recorrido 35.55 kilómetros de una ruta de 78 kilómetros, ¿qué distancia le falta por recorrer?
15. De 897.025 restar 587.995.
16. Restar 126.78 de 302.01.
17. De un depósito de agua que contiene 5 865.325 litros, se han extraído 1 457.348 litros, ¿cuánta agua queda?
18. Una computadora tiene un disco duro de 368 MB de memoria, si varios programas ocupan 128.75 MB, ¿qué cantidad de memoria está libre?
19. En un depósito de 2 500 litros de agua hay 2 llaves de salida. La primera desaloja 1 585.175 litros por hora y la segunda, 748.235 litros en el mismo tiempo, ¿cuántos litros quedan en el depósito después de una hora?
20. Julieta fue al supermercado y compró un desodorante de $23.81, una caja de pañuelos desechables de $17.55, una caja de cereal de $32.08 y una botella de agua de $5.40; si pagó con un billete de $100, ¿cuánto fue su cambio?
21. Una carrera ciclista consta de 3 etapas: en la primera se cubre una distancia de 125.50 kilómetros y la segunda de 183.75; si la distancia total que se debe cubrir es de 450 kilómetros, ¿cuál es la longitud de la última etapa?

22. Un atleta participa en la maratón de la Ciudad de México, la cual consta de 10 km; si este participante lleva recorridos 3 560 metros, ¿cuántos kilómetros le hacen falta para concluir la carrera? (Considera que 1 kilómetro equivale a 1 000 metros).
23. La estatura de Raquel es de 1.66 metros, mientras que la de Ana es de 1.27 metros. ¿Cuánto más alta es Raquel que Ana?
24. La distancia entre las ciudades de México y Morelia es aproximadamente de 380.65 kilómetros, ¿cuántos kilómetros le falta recorrer a un turista que viaja entre ambas capitales, si lleva recorridos 176.12 kilómetros?
25. Una persona tiene en su cuenta bancaria $12 359.32, si retira $2 000 y el banco le cobra una comisión de $5.50, ¿cuál es el saldo del cuentahabiente?
26. Un paciente vestido pesa 65.765 kilogramos, si el peso de la vestimenta es de 1.8 kilogramos, ¿cuál es su peso corporal?
27. ¿Qué número hay que sumar a 2 013.507 para que el resultado sea 2 147.25?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Se efectúa igual que la multiplicación de números enteros. Para ubicar el punto decimal se cuentan las cifras que contengan ambos factores a la derecha del punto decimal, lo que indica el lugar que debe ocupar el punto decimal, de derecha a izquierda, en el resultado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: 23.87 × 5.3.

Solución

Se acomodan los factores en forma vertical y se realiza la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 23.87 \\ \times\, 5.3 \\ \hline 7161 \\ 11935 \\ \hline 126.511 \end{array}$$

Al contar las cifras que se encuentran a la derecha del punto decimal en los factores, se observa que son 3 cifras, entonces el punto decimal del resultado se coloca 3 lugares de derecha a izquierda. Por lo tanto, el resultado final es: 126.511

2 Realiza la siguiente operación: 3.002 × 4.56.

Solución

Se acomodan los factores en forma vertical y se multiplica.

$$\begin{array}{r} 3.002 \\ \times\, 4.56 \\ \hline 18012 \\ 15010 \\ 12008 \\ \hline 13.68912 \end{array}$$

Finalmente, el resultado de 3.002 × 4.56 = 13.68912

Multiplicación por múltiplos de 10

Cuando se multiplica una cantidad por un múltiplo de 10 (10, 100, 1 000, 10 000, …), el punto decimal se recorre hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga el múltiplo de 10.

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de 3.102×100?

Solución

El múltiplo de 10 es 100 y está formado por 2 ceros, por lo tanto, el punto decimal se recorre 2 lugares a la derecha de su posición inicial y se obtiene como resultado:

$$3.102 \times 100 = 310.2$$

EJERCICIO 47

Efectúa las siguientes operaciones:

1. 4.56×3.45
2. 42.25×6.2
3. 328.654×3.02
4. $3\,425 \times 2.005$
5. $12\,572 \times 0.0025$
6. $20\,000 \times 0.00005$
7. 4.85×10
8. 28.05×100
9. 3.8436×100
10. $3.875 \times 1\,000$
11. $5.4 \times 1\,000$
12. $28.1367 \times 1\,000$

13. 58.608×2.007

15. 248.67×27.08

17. 465.67×3.8506

19. 4.656×100

21. $48.26 \times 1\,000$

14. 56.865×217.8

16. 56.861×26.310

18. 73.05×10

20. 216.5×100

22. $386.2 \times 1\,000$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

¿Cuál es la superficie de un terreno rectangular de 30.45 m de largo y 12.52 m de ancho?

Solución

Para obtener el área o la superficie del terreno, se multiplica el largo por el ancho.

$$\begin{array}{r} 30.45 \\ \times\, 12.52 \\ \hline 6090 \\ 15225 \\ 6090 \\ 3045 \\ \hline 381.2340 \end{array}$$

Al colocar el punto decimal se obtiene como resultado: 381.2340 m^2 de superficie.

EJERCICIO 48

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una pintura tiene un costo de $25.75 el litro, una persona compra 48 litros, ¿cuánto es lo que paga?
2. Si 57 litros de aceite tienen un costo de $1 850 y se vende el litro a $45.80, ¿de cuánto es la ganancia?
3. Un automóvil viaja a 85.3 kilómetros por hora en una carretera, ¿qué distancia recorre en 6 horas?
4. La señora Alcántara dispone de $1 500 para surtir su despensa, de acuerdo con la siguiente lista: 6 kilogramos de azúcar le cuestan $15.50 cada uno, 4 kilogramos de arroz a $9.80 cada uno, 16 kilogramos de harina a $18.50 cada kilogramo, 5 paquetes de jabón a $8 cada paquete. ¿Cuánto dinero le queda después de la compra?
5. Una familia de 6 personas asiste a un espectáculo y cada una de ellas realiza los siguientes gastos: $12.25 de pasaje, $53.50 de comida y $150 por boleto de entrada, ¿cuánto se gastaron en total?
6. Un grupo de 250 empleados asiste a un banquete y cada cubierto tiene un costo de $180.75, ¿cuánto debe pagarse al restaurante?
7. ¿Cuál es el área de un terreno rectangular que tiene de largo 45.30 m y de ancho 26.45 m?
8. En una construcción se emplean 38 hombres, cada uno de ellos recibe $150.80 diarios. Si el trabajo dura 25 días, ¿a cuánto asciende la nómina total y por persona, durante ese lapso?
9. Si una librería vende durante un día 35 libros de $180.50 cada uno, 56 ejemplares más de $97.50 el ejemplar y 125 volúmenes de $65 por libro, ¿a cuánto asciende su venta?
10. Los nutriólogos recomiendan que una persona debe tomar en promedio 2.5 litros de agua en un día, para que esté bien hidratada. ¿Cuántos litros de agua debe tomar una persona en un mes para que cumpla con una buena hidratación? (Considera un mes igual a 30 días).
11. Un carpintero desea saber, ¿a cuántos centímetros equivalen 20 pulgadas? (Considera una pulgada equivalente a 2.54 centímetros).
12. A un paciente con hipertensión arterial se le recomienda que tome 1.5 pastillas diarias de un fármaco llamado metildopa, el cual controla este mal. ¿Cuántas pastillas consumirá durante 15 días, si cumple con las indicaciones?
13. El volumen de una caja se obtiene de la multiplicación del largo por el ancho y por el alto. Si se tiene una caja con 30.48 centímetros de largo, 17.78 de ancho y 12.7 de alto, ¿cuál es el volumen?

14. Una escalera tiene 26 escalones y la separación que existe entre cada uno es de 0.28 metros, ¿qué tan alta es la escalera?
15. Una gasolinera cuenta con 6 bombas expendedoras de combustible, si cada bomba vende 800 litros diarios y el litro de gasolina es de $7.40, ¿cuál es su ingreso en un día?
16. El costo del pasaje en el metrobús es de $3.50 por persona, si cada camión tiene una capacidad máxima de 82 personas, ¿cuál es el ingreso de un autobús, si éste va totalmente lleno?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

División de un número decimal entre un número entero

Primero se divide la parte entera entre el divisor. Al llegar al punto decimal, éste se sube al cociente y se continúa la operación como si fueran números enteros. Las cifras subsecuentes del cociente quedarán después del punto decimal. Si la parte entera es menor que el divisor, entonces la primera cifra del cociente queda inmediatamente después del punto decimal.

Ejemplo

Obtén el cociente de 38.316 entre 17.

Solución

Al efectuar los pasos descritos, se obtiene el resultado de la división.

```
     2.253
17 | 38.316
     4 3
     0 91
       066
        15
```

Por tanto, el cociente es 2.253 y el residuo 0.015

División de un número entero entre un número decimal

Se multiplica el divisor por 10, 100, 1 000, …, según se necesite para hacerlo entero, esta cantidad por la que se multiplicó el divisor también se multiplica por el dividendo, y posteriormente se efectúa la división.

Ejemplo

Divide 325 entre 0.16.

Solución

Se multiplica a 325 y 0.16 por 100:

$$0.16 \times 100 = 16 \text{ y } 325 \times 100 = 32\,500$$

Entonces el cociente de 325 entre 0.16 se convierte en la división de 32 500 entre 16

```
     2 031.25
16 | 32 500
     0 50
       020
         040
           080
             00
```

Por tanto, el resultado de la división es igual a: 2 031.25

EJERCICIO 49

Efectúa las siguientes divisiones hasta con 3 decimales:

1. 58.76 entre 12
2. 38.25 entre 216
3. 49 364 entre 12
4. 5 867.56 entre 39.6
5. 23.56 entre 10
6. 1 entre 0.005
7. 125 entre 1.25
8. 368.5476 entre 480.5
9. 1 276 entre 0.25
10. 4.008 entre 0.016
11. 658.23 entre 217
12. 4 entre 0.26
13. 4.5 entre 0.28
14. 8.46 entre 0.07
15. 38 entre 0.175
16. 38 entre 2.6
17. 496.5 entre 2.086
18. 7 856.421 entre 1 315

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Un empleado percibe \$3 850.20 por 6 días de trabajo. ¿Cuál es su salario por día?

Solución

Para obtener el salario por día del empleado, se divide el sueldo que percibe entre los 6 días de trabajo.

```
      641.70
  6 |3 850.20
      25
       10
        4 2
         00
```

Por consiguiente, el salario diario del empleado es de \$641.70

EJERCICIO 50

Resuelve los siguientes problemas:

1. El precio de un artículo es de \$6.25 y se pagaron \$143.75 por varios de ellos, ¿cuántos se adquirieron?
2. El precio de 385 artículos comerciales es de \$1 232. ¿Cuál es el precio unitario?
3. Un metro de tela tiene un precio de \$15.25, si se compra un rollo de dicha tela en \$915, ¿cuántos metros tiene?
4. Si se desea embotellar 4 500 litros de refresco en envases de 0.75 litros de capacidad, ¿cuántos envases se necesitan?
5. Para embotellar 847 litros de refresco se emplearon 484 botellas. ¿Cuál es la capacidad de cada una de ellas?
6. Si un automóvil recorre 850 kilómetros en 12.5 horas, ¿cuál es su velocidad?
7. Un rectángulo tiene una superficie de 60.5 cm^2, si su ancho mide 5 cm, ¿cuánto mide su longitud?
8. Las temperaturas que se registraron durante la semana fueron: 22.5, 18.6, 20.1, 23.4, 28, 24.2 y 23.7 grados Celsius. ¿Cuál fue el promedio de temperatura?
9. Un grupo de 42 personas va de excursión a un zoológico y en la taquilla pagan \$2 457. ¿Cuál es el costo de entrada por persona?

10. Aurelio pagó $94.50 en una sala de videojuegos, en donde por esa cantidad le dieron 21 fichas para jugar. ¿Cuál es el precio que pagó por cada ficha?
11. Un sanitario es abastecido por un tinaco, cuya capacidad es de 300 litros de agua; si cada descarga del líquido es de 12.5 litros, ¿para cuántas descargas alcanza el agua?
12. Un libro que contiene 200 páginas tiene 2.5 centímetros de grosor. ¿Cuál es el grueso de cada una de sus hojas? No consideres las pastas.
13. Una naranja tiene un peso aproximado de 0.125 kilogramos, ¿cuántas naranjas habrán en una tonelada, si se considera el mismo peso para cada una?
14. El ingreso durante un día en una caseta de la autopista México-Querétaro es de $98 439; si por esta caseta cruzan 1 254 automóviles, ¿cuál es el costo de peaje por automóvil?
15. ¿Por cuál número hay que multiplicar 125.42 para que el resultado sea 2 676.4628?
16. Un empleado gubernamental percibe quincenalmente $6 641.25 por concepto de su salario. ¿Cuál es su sueldo diario?
17. Un contratista pagó por un pedido de ladrillo $29 767.50, si cada millar cuesta $850.50, ¿cuántos millares de material compró?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Un carpintero compra 2 kilogramos de clavos, 3 kilos de tornillos y 10 piezas de lijas, si el kilogramo de clavos tiene un costo de $12.50, el de tornillos de $14.25 y cada pieza de lija cuesta $2.25, ¿cuánto pagó en total?

Solución

Se calculan los precios de cada artículo y se suman para obtener el costo total.

Clavos	Tornillos	Lijas	Costo total
$12.50 \times 2 = \$25.00$	$14.25 \times 3 = \$42.75$	$2.25 \times 10 = \$22.50$	$25.00 + 42.75 + 22.50 = \$90.25$

Por consiguiente, el carpintero pagó $90.25

2 Cuatro amigos compraron en el supermercado 3 refrescos de $14.50 cada uno, 2 bolsas grandes de papas de $28.50 cada una, 3 bolsas de cacahuates de $6.75 cada una, un paquete de vasos desechables de $9.25 y un paquete de platos de $18, si el gasto se lo repartieron en partes iguales, ¿cuánto le tocó aportar a cada uno?

Solución

Se calcula el gasto total y se divide entre 4 para obtener la cantidad que deben aportar individualmente los amigos.

Refrescos	Papas	Cacahuates	Vasos y platos	Total	División
$14.50 \times 3 = \$43.50$	$28.50 \times 2 = \$57.00$	$6.75 \times 3 = \$20.25$	$9.25 + 18.00 = \$27.25$	$43.50 + 57.00 + 20.25 + 27.25 = \$148.00$	$148.00 \div 4 = 37.00$ (28, 0 00)

Por consiguiente, a cada uno de los amigos le corresponde aportar $37

3 Javier y sus 4 amigos deciden ir a ver un partido de futbol. Para llegar toman diversos transportes que cobran por persona: \$4.50, \$2.50 y \$3.50. Si Javier pagó los pasajes con un billete de \$100, ¿cuánto le sobró?

Solución

Se suman los pasajes de cada persona y se multiplican por 5, el resultado se resta a \$100 y se obtiene el dinero que le sobró a Javier.

Pasajes por persona	Total de pasajes	Cambio de Javier
4.50		
+ 2.50	10.50	100.00
3.50	× 5	− 52.50
\$10.50	\$52.50	\$47.50

Por tanto, a Javier le sobraron \$47.50

EJERCICIO 51

Resuelve los siguientes problemas:

1. Lourdes necesita fotocopiar unos manuales que contienen 180 hojas en tamaño carta y 250 hojas en tamaño oficio. El costo por fotocopia en tamaño carta es de \$0.20, mientras que la de tamaño oficio es de \$0.25. Si Lourdes paga con un billete de \$200, ¿cuánto dinero va a recibir de cambio?
2. Rebeca surte una lista de útiles escolares que contiene 5 libros, cuyo precio unitario es \$30.50, 6 lápices de \$5.60 por unidad, 3 plumas de las cuales cada pieza cuesta \$6.20 y además un millar de hojas de \$105, ¿cuánto pagó Rebeca en total?
3. Elizabeth rompe su alcancía y se da cuenta de que tiene 16 monedas de \$10, 13 de \$5, 42 de \$2, 33 de \$1, 15 monedas de \$0.50 (50 centavos) y 16 de \$0.20 (20 centavos). ¿Cuál es el monto de su ahorro?
4. Las calificaciones de Héctor son: matemáticas 8.5, español 9.0, geografía 8.2, literatura 7.5, física 8.4 y química 9.4. ¿Cuál es el promedio de sus calificaciones?
5. El perímetro de un rectángulo se define como el doble de la suma de la longitud del largo más el ancho. ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo cuyo largo es 13.456 centímetros y ancho 8.044 centímetros?
6. En una tienda departamental se lleva a cabo una campaña de beneficencia por parte de una fundación civil. Ésta consiste en redondear las cuentas de los clientes, pero además por cada peso y centavo que aporta una persona la fundación pone la misma cantidad de dinero que el cliente. Si un cliente consume en la tienda \$425.82 y decide voluntariamente redondear su cuenta a \$430, ¿cuál es el monto total de lo aportado a dicha labor altruista?
7. Un vagón de tren vacío pesa 6 425 kilogramos, si este vagón se carga con 3 contenedores, cuyo peso unitario es de 845.75 kilogramos y con 2 cilindros de combustible que pesan 650.8 kilogramos, ¿cuál es el peso del vagón ya cargado?
8. Un metal sufre una deformación llamada dilatación al ser expuesto durante largos periodos al calor. Si una vía de ferrocarril mide 6.32 centímetros de ancho y se expande una décima parte, ¿cuál será su ancho en un día extremadamente caluroso?
9. Un regalo es empacado en una caja de cartón, cuyo peso es de 25.2 gramos y después se envuelve en un papel de terciopelo que pesa 6.37 gramos. Si todo el paquete pesa 800 gramos, ¿cuál es el peso del regalo?
10. Cuando un comerciante compra 50 juguetes, le cobran 15 centésimos extra del costo total por concepto de impuestos; si el pago fue de \$2 541.50 incluyendo los impuestos, ¿cuál es el costo de cada uno de los juguetes?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Conversiones

Cualquier fracción común puede representarse como un número decimal y viceversa. A continuación se explican y ejemplifican las diferentes formas.

Dada la fracción común, para convertirla en número decimal se divide el numerador entre el denominador.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $\frac{3}{4}$ a número decimal.

Solución

Se efectúa la división y se obtiene el número decimal.

$$4\overline{)3.00}\quad 0.75$$

```
   0.75
4 |3.00
    20
     0
```

Por tanto, $\frac{3}{4} = 0.75$

2 Convierte $1\frac{2}{3}$ a número decimal.

Solución

Se transforma la fracción mixta en impropia $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, se efectúa la división para obtener el resultado.

```
   1.666
3 |5.000
   2 0
     20
      20
       2
```

Esta fracción representa un decimal periódico, por lo tanto, $1\frac{2}{3} = 1.666... = 1.\overline{6}$

EJERCICIO 52

Convierte a número decimal las siguientes fracciones:

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{1}{5}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{2}{5}$
5. $\frac{5}{4}$
6. $\frac{3}{5}$
7. $\frac{9}{6}$
8. $\frac{1}{10}$
9. $\frac{3}{8}$
10. $1\frac{4}{5}$
11. $1\frac{5}{8}$
12. $2\frac{5}{16}$
13. $1\frac{9}{10}$
14. $3\frac{5}{11}$
15. $2\frac{7}{8}$
16. $4\frac{7}{12}$
17. $3\frac{8}{25}$
18. $4\frac{7}{30}$
19. $5\frac{11}{30}$
20. $7\frac{5}{18}$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Para convertir un número decimal exacto a fracción común, se colocan los denominadores 10, 100, 1 000, …, según corresponda la fracción decimal, el numerador se multiplica por la misma cantidad colocada en el denominador y la fracción resultante se simplifica, de ser posible.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en fracción común 0.5.

Solución

La fracción decimal corresponde a cinco décimos, por lo tanto, se multiplica y divide por 10

$$0.5 = \frac{0.5 \times 10}{10} = \frac{5}{10} = \frac{5 \div 5}{10 \div 5} = \frac{1}{2}$$

Por consiguiente, $0.5 = \frac{1}{2}$

2 Expresa en fracción común 0.003.

Solución

El número es tres milésimos, entonces se multiplica y divide por mil.

$$0.003 = \frac{0.003 \times 1000}{1000} = \frac{3}{1000}$$

La fracción resultante no se puede simplificar, por lo tanto, $0.003 = \frac{3}{1000}$

3 Expresa en fracción común 1.75.

Solución

Se multiplica y divide por 100, ya que la fracción decimal corresponde a setenta y cinco centésimos.

$$1.75 = \frac{1.75 \times 100}{100} = \frac{175}{100} = \frac{175 \div 25}{100 \div 25} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

El resultado es $\frac{7}{4}$ o $1\frac{3}{4}$

EJERCICIO 53

Convierte las siguientes fracciones decimales a fracciones comunes.

1. 0.20
2. 0.33
3. 0.25
4. 0.44
5. 0.66
6. 1.5
7. 2.75
8. 3.08
9. 0.005
10. 1.346

 Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para convertir un número decimal periódico a una fracción común se utiliza la siguiente fórmula:

$$\text{Número decimal periódico} = \frac{R - v}{10^h - 10^c}$$

Donde:

R: es el entero que resulta de recorrer el punto decimal hasta la última cifra del periodo.

h: lugares recorridos para obtener R.

v: es el entero que resulta de recorrer el punto hasta una cifra antes del periodo.

c: lugares recorridos para obtener v.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $0.\overline{3}$ a fracción común.

Solución

Al asignar los valores respectivos a cada uno de los términos.

$$R = 3,\ h = 1,\ v = 0 \text{ y } c = 0$$

Al sustituir, se obtiene:

$$0.\overline{3} = \frac{3-0}{10^1 - 10^0} = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente, $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$

2 Convierte $5.3\overline{52}$ a fracción común.

Solución

Al asignar los valores a cada uno de los términos en la fórmula:

$$R = 5\,352,\ h = 3,\ v = 53,\ c = 1$$

Al sustituir, se obtiene:

$$5.3\overline{52} = \frac{5\,352 - 53}{10^3 - 10^1} = \frac{5\,299}{1000 - 10} = \frac{5\,299}{990}$$

El resultado de la conversión es: $5.3\overline{52} = \frac{5\,299}{990} = 5\frac{349}{990}$

La fórmula para convertir una fracción decimal periódica a fracción común, también se emplea para convertir una fracción decimal exacta a fracción común, donde el periodo de la función es cero.

Ejemplos

$$0.36 = 0.36\overline{0},\quad 1.375 = 1.375\overline{0},\quad 0.0024 = 0.0024\overline{0}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte el número 0.25 a fracción común mediante la fórmula.

Solución

La fracción decimal es exacta, para que sea una fracción periódica agregamos un cero periódico, esto es, $0.25\overline{0}$ y de este número obtenemos valores.

$$R = 250,\ h = 3,\ v = 25 \text{ y } c = 2$$

Al sustituir en la fórmula:

$$0.25\overline{0} = \frac{250-25}{10^3-10^2} = \frac{225}{1\,000-100} = \frac{225}{900} = \frac{225 \div 225}{900 \div 225} = \frac{1}{4}$$

Por tanto, $0.25 = \frac{1}{4}$

Si el periodo en una cifra es el número 9, dicha cifra se redondea al siguiente número decimal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $0.2\overline{9}$ a fracción común.

Solución

Se asignan los valores a las variables de la fórmula.

$$R = 29,\ h = 2,\ v = 2 \text{ y } c = 1$$

Al sustituir los valores, se determina que:

$$0.2\overline{9} = \frac{29-2}{10^2-10^1} = \frac{27}{100-10} = \frac{27}{90} = \frac{27 \div 9}{90 \div 9} = \frac{3}{10}$$

El resultado de $0.2\overline{9} = \frac{3}{10}$, se observa que $0.2\overline{9}$ se redondea a $0.3 = \frac{3}{10}$

2 ¿Cuál es el resultado de convertir $1.\overline{9}$ a fracción común?

Solución

Se asignan los valores a las variables:

$$R = 19,\ h = 1,\ v = 1 \text{ y } c = 0$$

Al sustituir en la fórmula:

$$1.\overline{9} = \frac{19-1}{10^1-10^0} = \frac{18}{10-1} = \frac{18}{9} = 2$$

Por consiguiente, $1.\overline{9} = 2$

EJERCICIO **54**

Convierte a fracción común las siguientes fracciones decimales.

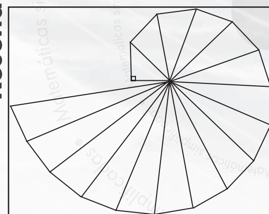
1. $0.\overline{8}$	3. $1.\overline{2}$	5. $0.\overline{2}$	7. $9.\overline{032}$	9. $5.\overline{19}$
2. $0.\overline{18}$	4. $4.\overline{21}$	6. $3.\overline{121}$	8. $3.12\overline{14}$	10. $3.\overline{47}$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Capítulo 6

Potenciación y radicación

Reseña HISTÓRICA



El exponente

El primero que colocó el exponente en una posición elevada con respecto a la línea base fue Chuquet en el siglo XV. Sin embargo, lo colocaba directamente al coeficiente, de modo que $5x^2$, lo escribía como 5^2.

En 1636 James Hume publicó una edición del álgebra de Viète en la que utilizó una notación prácticamente igual a la actual, salvo que utilizó números romanos. Así, $5x^2$ lo escribía como $5x^{ii}$.

Sería Descartes quien sustituyó en su obra *Géométrie* los incómodos numerales romanos por los indoarábigos. No deja de ser curioso, sin embargo, que para la potencia cuadrada no utilizase la notación elevada, sino que siguiese escribiendo, como muchos hasta entonces, x^2 como xx.

El símbolo $\sqrt{\ }$ y los irracionales

Al parecer fueron los griegos en el siglo V a. C., los descubridores de la existencia de números no racionales. Este descubrimiento hizo tambalear uno de los principios de los pitagóricos, que consistía en considerar que la esencia de todas las cosas, tanto en la geometría como en los asuntos teóricos y prácticos del hombre, era explicable en términos de *arithmos*, es decir, de propiedades de los números enteros y de sus razones.

Puesto que la existencia de tales números era evidente, los griegos no tuvieron más remedio que aceptarlos con el nombre de irracionales.

De esta manera, el campo de los números se extendió para superar la incapacidad de los racionales para representar todas las medidas de magnitudes. En el siglo IX, el filósofo árabe al-Farabi generalizó el concepto de número a los racionales y a los irracionales positivos.

En 1525 el matemático alemán Christoph Rudolff introdujo el signo $\sqrt{\ }$ que indica la raíz cuadrada de un número. El mismísimo Euler conjeturó en 1775 que se trataba de una forma estilizada de la letra *r*, inicial del término latino *radix*, "radical".

Una construcción clásica que tiene que ver con los irracionales es la llamada espiral de Teodoro, la cual permite obtener las raíces cuadradas de los números enteros a partir de un triángulo rectángulo isósceles de lado 1.

La espiral de Teodoro es un método para construir geométricamente los segmentos de longitud $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$,...$\sqrt{17}$.

Potenciación

Es la operación en la cual la cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente. De lo anterior se define:

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a ...}_{n\text{-veces}}$, donde: a es la base y n el exponente.
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla 5^2.

Solución

Al ser el exponente 2, la base 5 se debe multiplicar 2 veces ella misma:

$$5^2 = (5)(5) = 25$$

Por tanto, el resultado de $5^2 = 25$

2 ¿Cuál es el resultado de $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$?

Solución

La fracción se debe multiplicar 3 veces por ella misma.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

El resultado es $\dfrac{1}{8}$

3 Desarrolla 3^{-4}.

Solución

Se aplica la definición y luego se desarrolla 3^4 para obtener el resultado.

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{(3)(3)(3)(3)} = \frac{1}{81}$$

Por consiguiente, $3^{-4} = \dfrac{1}{81}$

Cuando un número negativo se eleva a una potencia par, el resultado es positivo, pero si se eleva a una potencia impar, el resultado es negativo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $(-6)^4$?

Solución

La potencia es par, por tanto, el resultado es positivo.

$$(-6)^4 = 6^4 = 1296$$

2 Efectúa $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$.

Solución

El exponente es impar, por consiguiente, el resultado será negativo.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\left(\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$$

3 Desarrolla $(-4+1)^2$.

Solución

Se efectúa la operación encerrada en el paréntesis y después se resuelve la potencia para obtener el resultado.

$$(-4+1)^2 = (-3)^2 = 3^2 = 9$$

EJERCICIO 55

Desarrolla las siguientes expresiones:

1. $(-4)^2$
2. -5^6
3. $(6)^{-4}$
4. $(-1)^8$
5. $(-9)^3$
6. -2^{-5}
7. $(-3)^4$
8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$
9. $\left(-\frac{1}{4}\right)^4$
10. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
11. $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$
12. $\left(\frac{7}{3}\right)^3$
13. $\left(\frac{5}{9}\right)^5$
14. $-(1+2)^2$
15. $(3-1)^2$
16. $(5+11)^3$
17. $(0.5+3.8)^2$
18. $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^3$
19. $\left(5+\frac{1}{4}\right)^2$
20. $\left(\frac{1}{10}+1\right)^3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teoremas

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplo

Demuestra que se cumple $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2}$.

Solución

Se realiza la potenciación $2^3 \cdot 2^2 = (8)(4) = 32$ y $2^{3+2} = 2^5 = 32$

Por lo tanto, se demuestra que $2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$

- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Ejemplo

Demuestra que se cumple $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2}$.

Solución

Se realiza $\frac{3^5}{3^2} = \frac{243}{9} = 27$ y $3^{5-2} = 3^3 = 27$.

Se observa que ambos resultados son iguales, por lo tanto, se cumple que: $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2}$

➡ $\boldsymbol{a^0 = 1}$

Ejemplo

Demuestra que $7^0 = 1$.

Solución

Para esta demostración se emplea arbitrariamente que $1 = \frac{343}{343} = \frac{7^3}{7^3} = 7^{3-3} = 7^0$

Por consiguiente, $7^0 = 1$

➡ $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

Ejemplo

Demuestra que $(4^3)^2 = 4^{(3)(2)}$.

Solución

Se realiza $(4^3)^2 = (64)^2 = 4\,096$, además $4^{(3)(2)} = 4^6 = 4\,096$

Por último: $(4^3)^2 = 4\,096 = 4^{(3)(2)}$

➡ $\boldsymbol{(a \cdot b \cdot c)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m}$

Ejemplo

Verifica que se cumple $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

Solución

Se realiza el producto de $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ y después se eleva $(30)^2 = 900$

Además: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$

Entonces, se cumple que $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

➡ $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}$

Ejemplo

Demuestra que se cumple $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$.

Solución

Primero se eleva $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$; por otro lado, $\frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Entonces, se verifica que $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Operaciones

Son aquellas que se realizan con la aplicación de los teoremas de los exponentes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la simplificación de $\left(2^3 \cdot 5^{-2}\right)\left(2^{-2} \cdot 5^4\right)$.

Solución

La operación es una multiplicación, entonces los exponentes se suman:

$$\left(2^3 \cdot 5^{-2}\right)\left(2^{-2} \cdot 5^4\right) = 2^{3+(-2)} \cdot 5^{-2+4} = 2^1 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$$

El resultado es 50

2 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-4}}{2^3 \cdot 3^{-3}}$.

Solución

Se aplican los teoremas de exponentes:

$$\frac{2^5 \cdot 3^{-4}}{2^3 \cdot 3^{-3}} = 2^{5-3} \cdot 3^{-4-(-3)} = 2^2 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Por tanto, el resultado de la expresión es $\dfrac{4}{3}$

3 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{27^2}{9^3}$.

Solución

En este ejercicio el 27 y el 9 se descomponen en factores primos para después aplicar los teoremas y finalmente obtener el resultado:

$$\frac{\left(3^3\right)^2}{\left(3^2\right)^3} = \frac{3^6}{3^6} = 3^{6-6} = 3^0 = 1$$

4 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{6^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 9^2}$.

Solución

Se descomponen 6 y 9 en sus factores primos, se simplifica y se obtiene el resultado:

$$\frac{6^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 9^2} = \frac{(2 \cdot 3)^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot \left(3^2\right)^2} = \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^4} = \frac{2^3 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^4} = 2^{3-3} \cdot 3^{5-4} = 2^0 \cdot 3^1 = 3$$

5 ¿Cuál es el resultado de $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$?

Solución

Se elevan ambas fracciones, se multiplican y posteriormente se dividen para obtener el resultado.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{1^2}{3^2} \cdot \frac{3^{-3}}{2^{-3}} = \frac{3^{-3}}{3^2 \cdot 2^{-3}} = 3^{-3-2} \cdot 2^3 = 3^{-5} \cdot 2^3 = \frac{1}{3^5} \cdot 2^3 = \frac{8}{243}$$

6 Simplifica la expresión $\left[\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2}$.

Solución

Se simplifica la operación que encierra el corchete y se eleva al exponente –2 para obtener el resultado final.

$$\left[\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2}=\left[\dfrac{\frac{1^3}{2^3}}{\frac{2^2}{3^2}}\right]^{-2}=\left[\dfrac{1^3\cdot 3^2}{2^3\cdot 2^2}\right]^{-2}=\left[\dfrac{3^2}{2^5}\right]^{-2}=\dfrac{\left(3^2\right)^{-2}}{\left(2^5\right)^{-2}}=\dfrac{3^{-4}}{2^{-10}}=\dfrac{\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{2^{10}}}=\dfrac{2^{10}}{3^4}=\dfrac{1024}{81}$$

Por tanto, el resultado final es $\dfrac{1024}{81}$

7 Simplifica $\left(\dfrac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}$.

Solución

En este ejercicio primero se aplica el teorema correspondiente a los números que se encuentran dentro del paréntesis, después se realizan las operaciones.

$$\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{2^3}{2^4}\right)^{-2}=\left(2^{-1}\right)^{-2}=2^2=4$$

Por consiguiente, $\left(\dfrac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}=4$

EJERCICIO **56**

Simplifica las siguientes expresiones, emplea las definiciones y teoremas de los exponentes:

1. $5^2\cdot 5^2$
2. $3^{-5}\cdot 3^2$
3. $3^2\cdot 3^{-3}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$
4. $\left(2^7\cdot 3^{-4}\right)\left(2^{-5}\cdot 3^4\right)$
5. $\left(3^5\cdot 5^{-4}\right)\cdot\left(2^3\cdot 3^{-7}\cdot 5^6\right)$
6. $\left(4^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)\left(2^{-1}\cdot 3^{-\frac{7}{3}}\right)$
7. $4^2\cdot 2^3\cdot 8^2$
8. $\dfrac{6^7}{6^4}$
9. $\dfrac{5^8}{5^{10}}$
10. $\dfrac{3^{-6}}{3^{-10}}$
11. $\dfrac{5^4}{5^4}$
12. $\dfrac{2^7\cdot 3^{-5}}{2^5\cdot 3^{-4}}$
13. $\dfrac{3^5\cdot 4^{-6}}{3^7\cdot 4^{-8}}$
14. $\dfrac{7^5\cdot 3^3}{7^3\cdot 3^5}$

15. $\dfrac{2^{-8}\cdot 3^{5}\cdot 5^{-6}}{2^{-7}\cdot 3^{6}\cdot 5^{-5}}$

16. $\dfrac{2^{-4}\cdot 3^{-5}\cdot 5^{-6}}{2^{-6}\cdot 3^{-3}\cdot 5^{-6}}$

17. $\dfrac{2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{3}{2}}}{2^{-\frac{7}{4}}\cdot 5^{-\frac{5}{2}}}$

18. $\dfrac{2^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}\cdot 4^{2}}{2^{\frac{5}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{3}{2}}}$

19. $\dfrac{4^{-\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{8}}\cdot 6^{-3}}{4^{\frac{5}{6}}\cdot 9^{-\frac{5}{8}}\cdot 6^{-3}}$

20. $\dfrac{8^{4}}{4^{4}}$

21. $\dfrac{12^{3}\cdot 3^{3}}{6^{3}\cdot 2^{2}}$

22. $\left(2^{2}\right)^{2}$

23. $\left((-5)^{2}\right)^{3}$

24. $\left(-5^{2}\right)^{3}$

25. $(4^{\frac{1}{3}})^{6}$

26. $(5^{-\frac{1}{5}})^{-10}$

27. $(3\cdot 5)^{2}$

28. $\left(2^{-3}\cdot 3^{2}\right)^{2}$

29. $\left(2^{4}\cdot 3^{-6}\cdot 5^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

30. $\left(3^{-2}\cdot 5^{2}\right)^{3}\left(3^{3}\cdot 5^{-3}\cdot 7\right)^{2}$

31. $\left(\dfrac{2^{2}\cdot 3^{5}\cdot 4^{2}}{2^{4}\cdot 3^{2}}\right)^{2}$

32. $\left(\dfrac{2^{-1}\cdot 3^{\frac{1}{4}}}{2^{-3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$

33. $\left(\dfrac{3^{-4}\cdot 5^{-1}}{3^{2}\cdot 5^{-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3^{4}\cdot 5^{3}}{3^{2}\cdot 5^{4}}\right)^{-1}$

34. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2}$

35. $\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2}\right]^{4}$

36. $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}\right]^{3}$

37. $\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{4}\right]^{-\frac{1}{2}}$

38. $\left(\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^{2}$

39. $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2}\right]^{2}$

40. $\left(-\dfrac{1}{3^{-3}}\right)^{-2}$

41. $\left(\dfrac{1}{2^{-3}}-\dfrac{1}{2^{-1}}\right)^{-3}$

42. $\left(\dfrac{7^{-1}}{2^{-1}+3^{-1}+6^{-1}}\right)^{-2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Radicación

Operación que permite hallar un valor que multiplicado tantas veces como lo indica el índice, dé el valor que se encuentra dentro del radical, el cual recibe el nombre de radicando. Para lo anterior se define:

- $\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}$, donde: a es la base, m el exponente y n el índice.

Ejemplo

Verifica que se cumpla la igualdad $\sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}}$

Solución

Se descomponen ambas bases en factores primos y se aplica el teorema correspondiente de exponentes y la definición:

$$\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{\left((2)^3\right)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4 \quad \text{además} \quad 8^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$

Se observa que los 2 resultados son iguales, entonces se demuestra que $\sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}} = 4$.

Las raíces pares de números negativos no pertenecen al conjunto de los números reales ya que son cantidades imaginarias, las raíces impares de números negativos son negativas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Aplica la definición de radicación y calcula $\sqrt[4]{625}$.

Solución

Se descompone la base en factores primos y se aplica la definición para obtener el resultado final.

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5^{\frac{4}{4}} = 5$$

2 Encuentra la raíz quinta de –1 024.

Solución

Se descompone –1 024 en sus factores primos y se aplica la definición:

$$\sqrt[5]{-1024} = -\sqrt[5]{1024} = -\sqrt[5]{2^{10}} = -2^{\frac{10}{5}} = -2^2 = -4$$

Por consiguiente, el resultado es –4

Teoremas

Los teoremas de los exponentes también se aplican a radicales, ya que se expresan como exponentes fraccionarios.

- $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = (a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Aplica los teoremas de los exponentes y obtén el resultado de $\sqrt[3]{216}$.

Solución

Se descompone 216 en sus factores primos, se aplica el teorema correspondiente y la definición para obtener el resultado.

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = 2^{\frac{3}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} = 2 \cdot 3 = 6$$

Por tanto, $\sqrt[3]{216} = 6$

2 ¿Cuál es el resultado de $\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{3^5}\cdot 125^{\frac{1}{2}}\right)$?

Solución

Se descompone 125 es sus factores primos y el radical se expresa como exponente fraccionario, se aplican las leyes de los exponentes y se obtiene el resultado final.

$$\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{3^5}\cdot 125^{\frac{1}{2}}\right)=\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}\cdot\left(5^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=2^{\frac{1}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)}\cdot 3^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=2^{-\frac{4}{4}}\cdot 3^{\frac{2}{2}}\cdot 5^{\frac{2}{2}}$$

$$=2^{-1}\cdot 3\cdot 5=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5=\frac{15}{2}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$?

Solución

Se descompone la base en factores primos y se aplica el teorema de radicales para obtener el resultado.

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}=\left(3^6\right)^{\frac{1}{(3)(2)}}=\left(3^6\right)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{6}{6}}=3$$

Por tanto, el resultado de la operación es 3

4 Simplifica la expresión $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}\cdot 2^3}}{\sqrt[4]{32}}$.

Solución

Se transforman los radicales a exponentes fraccionarios y se realizan las operaciones con la aplicación de los respectivos teoremas.

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{2}\cdot 2^3}}{\sqrt[4]{32}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^3\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2^5\right)^{\frac{1}{4}}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{1}{2}+3}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{4}}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{4}}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2^{\frac{7}{4}}}{2^{\frac{5}{4}}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}}=2^{\frac{2}{2}}=2$$

Por último, el resultado es 2

EJERCICIO 57

Aplica las definiciones y los teoremas de los exponentes y efectúa los siguientes ejercicios:

1. $\sqrt{49}$
2. $\sqrt{729}$
3. $\sqrt{289}$
4. $\sqrt[3]{-512}$
5. $\sqrt[4]{81}$
6. $\sqrt[4]{625}$
7. $\sqrt[4]{6\,561}$
8. $\sqrt[5]{-243}$
9. $\sqrt{196}$
10. $\sqrt{441}$
11. $\sqrt{576}$
12. $\sqrt[3]{216}$
13. $\sqrt[3]{-1\,728}$
14. $\sqrt[3]{3375}$
15. $\sqrt[3]{13824}$
16. $\sqrt[5]{7\,776}$
17. $\sqrt[5]{248\,832}$
18. $\sqrt[5]{4\,084\,101}$

Simplifica las siguientes expresiones:

19. $\sqrt{2^2 \cdot 3^2}$

20. $\sqrt{5^2 \cdot 3^2}$

21. $\sqrt{5^2 \cdot 6^2 \cdot 3^4}$

22. $\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^9}$

23. $\sqrt[3]{3^6 \cdot 5^3}$

24. $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^6 \cdot 3^3}$

25. $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 5^{10}}$

26. $\sqrt[6]{2^{12} \cdot 3^{24}}$

27. $\sqrt[3]{8^4 \cdot 4^3}$

28. $\dfrac{11^7 \cdot \sqrt{6}}{11^5 \cdot 6^{\frac{3}{2}}}$

29. $\sqrt{\dfrac{6^2}{3^2}}$

30. $\sqrt{\dfrac{2^2}{5^{-2}}}$

31. $\left(\sqrt{\dfrac{27}{125}}\right)\left(\sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}\right)$

32. $\left(\sqrt[8]{9}\right)^4$

33. $\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{25}\right)^2$

34. $\sqrt[3]{\sqrt{9^3}}$

35. $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

36. $\sqrt{\dfrac{2^3 \cdot 5^5}{2^{-1} \cdot 5^3}} \cdot \left(\dfrac{2^4 \cdot 5^{-1}}{2^5 \cdot 5^{-1}}\right)$

37. $\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt[12]{\dfrac{1}{27}}}$

38. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{10}}{2^{\frac{-5}{3}} \cdot 5^{\frac{-11}{3}}}}$

39. $\left(\dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}}{5^2}\right)^{-1} \cdot \sqrt{\dfrac{5^{-1} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}}$

40. $\sqrt{\dfrac{3^{-1} + 6^{-1}}{8^{-1}}}$

41. $\sqrt{\dfrac{1}{3^{-2}} + \dfrac{1}{2^{-4}}}$

42. $\sqrt{2^{-6} + 6^{-2}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simplificación

Procedimiento que consiste en expresar un radical en su forma más simple. Para simplificar un radical, el exponente de la base debe ser mayor que el índice del radical.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica $\sqrt{8}$.

Solución

Se descompone el radicando en factores primos.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$$

2^3 se expresa como $2^2 \cdot 2$ y se aplica el teorema correspondiente de radicales.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Por consiguiente, la simplificación de $\sqrt{8}$ es $2\sqrt{2}$

2 Simplifica $\sqrt{45}$.

Solución

Se descompone el radicando en factores primos y se procede a aplicar los teoremas.

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Por tanto, $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

3 Simplifica $\sqrt[3]{72}$.

Solución

Se descompone la base en factores primos y se simplifica la expresión.

$$\sqrt[3]{72}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^2}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^2}=2\sqrt[3]{9}$$

El resultado es $2\sqrt[3]{9}$

4 Simplifica $\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}$.

Solución

Se simplifica el radical y el resultado se multiplica por la fracción para obtener el resultado de la operación.

$$\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}=\frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5\cdot 3}=\frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{3}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{3}$$

EJERCICIO 58

Simplifica las siguientes expresiones:

1. $\sqrt{20}$
2. $\sqrt{72}$
3. $\sqrt[3]{16}$
4. $\sqrt[3]{135}$
5. $\sqrt[3]{250}$
6. $\sqrt{162}$
7. $\sqrt{180}$
8. $2\sqrt[4]{405}$
9. $\frac{2}{7}\sqrt[3]{686}$
10. $\frac{1}{3}\sqrt{540}$
11. $\frac{2}{5}\sqrt[4]{1250}$
12. $\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{3600}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Estas operaciones se pueden efectuar si y sólo si el índice del radical y el radicando son iguales (radicales semejantes).

$$a\sqrt[n]{d}+b\sqrt[n]{d}-c\sqrt[n]{d}=(a+b-c)\sqrt[n]{d}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $2\sqrt[3]{5}+11\sqrt[3]{5}$.

Solución

Los radicales son semejantes, por tanto se realizan las operaciones con los números que les anteceden (coeficientes del radical).

$$2\sqrt[3]{5}+11\sqrt[3]{5}=(2+11)\sqrt[3]{5}=13\sqrt[3]{5}$$

Entonces, el resultado es: $13\sqrt[3]{5}$

2 ¿Cuál es el resultado de la operación $3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-4\sqrt{2}$?

Solución

Al ser semejantes los radicales, se efectúan las operaciones con los coeficientes.

$$3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(3+7-4)\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

El resultado es: $6\sqrt{2}$

3 Efectúa $\frac{3}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}$.

Solución

Se realizan las operaciones con las fracciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{3}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\sqrt{6}=\frac{7}{12}\sqrt{6}$$

Si los radicandos son diferentes, no se pueden sumar o restar los radicales de primera instancia, entonces se simplifican; si resultan semejantes se efectúan las operaciones, de lo contrario, se dejan indicadas.

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$?

Solución

Se simplifican los radicales y se realiza la operación.

$$\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}=\sqrt{2^2\cdot 5}+\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2^2\sqrt{5}=(2+3-4)\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

Por tanto, el resultado es $\sqrt{5}$

2 Efectúa $\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}$.

Solución

Se simplifican los radicales, se realizan las operaciones y se obtiene el resultado final.

$$\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}=\sqrt[3]{3^3\cdot 7}+\sqrt[3]{2^3\cdot 7}=3\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{7}=5\sqrt[3]{7}$$

3 Realiza $\frac{2}{15}\sqrt{405}-\frac{1}{6}\sqrt{128}-\frac{1}{10}\sqrt{125}+3\sqrt{32}$.

Solución

Se simplifican los radicales, se multiplican por las cantidades que les anteceden y se simplifican las fracciones:

$$\begin{aligned}\frac{2}{15}\sqrt{405}-\frac{1}{6}\sqrt{128}-\frac{1}{10}\sqrt{125}+3\sqrt{32}&=\frac{2}{15}\sqrt{3^4\cdot 5}-\frac{1}{6}\sqrt{2^6\cdot 2}-\frac{1}{10}\sqrt{5^2\cdot 5}+3\sqrt{2^4\cdot 2}\\&=\frac{2}{15}\left(3^2\sqrt{5}\right)-\frac{1}{6}\left(2^3\sqrt{2}\right)-\frac{1}{10}\left(5\sqrt{5}\right)+3\left(2^2\sqrt{2}\right)\\&=\frac{18}{15}\sqrt{5}-\frac{8}{6}\sqrt{2}-\frac{5}{10}\sqrt{5}+12\sqrt{2}\\&=\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+12\sqrt{2}\end{aligned}$$

Se agrupan los radicales semejantes y se realizan las operaciones para obtener el resultado.

$$\begin{aligned}&=\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+12\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}\\&=\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}+\left(12-\frac{4}{3}\right)\sqrt{2}=\frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{32}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es $\frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{32}{3}\sqrt{2}$

EJERCICIO 59

Realiza las siguientes operaciones:

1. $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$
3. $3\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{5}$
4. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{9}$
5. $4\sqrt{2}-9\sqrt{2}$
6. $7\sqrt{5}-3\sqrt{5}-6\sqrt{5}$
7. $\frac{5}{3}\sqrt[4]{7}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{7}$
8. $5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-16\sqrt[3]{2}$
9. $\frac{2}{5}\sqrt{6}+3\sqrt{6}-\frac{7}{4}\sqrt{6}$
10. $\sqrt{8}+\sqrt{18}$
11. $\sqrt{12}-\sqrt{3}$
12. $2\sqrt{5}+\sqrt{80}$
13. $4\sqrt{32}-7\sqrt{8}-3\sqrt{18}$
14. $\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{75}$
15. $3\sqrt{12}-2\sqrt{5}-7\sqrt{3}+\sqrt{125}$
16. $5\sqrt{8}-\sqrt{27}-\sqrt{32}+3\sqrt{3}+\sqrt{2}$
17. $4\sqrt{75}+6\sqrt{18}-\sqrt{128}-\sqrt{245}-\sqrt{98}-3\sqrt{125}$
18. $\sqrt{200}+\sqrt{50}-\sqrt{98}-\sqrt{338}$
19. $\frac{1}{4}\sqrt{192}-\frac{2}{5}\sqrt{75}+\frac{1}{7}\sqrt{147}$
20. $\frac{1}{22}\sqrt{605}+\frac{1}{30}\sqrt{1\,125}-\frac{1}{34}\sqrt{1\,445}$
21. $\frac{3}{4}\sqrt{176}-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{8}\sqrt{320}+\frac{1}{5}\sqrt{275}$
22. $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{192}$
23. $3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{54}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{375}$
24. $\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{128}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{54}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Multiplicación de radicales con índices iguales. Cuando los índices de los radicales son iguales, se multiplican los radicandos y de ser posible se simplifica el resultado.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}$$

EJEMPLOS

1 Efectúa $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$.

Solución

Se multiplican ambos factores:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{(3)(5)}=\sqrt{15}$$

Por consiguiente, el resultado de la operación es $\sqrt{15}$

2 ¿Cuál es el resultado del producto $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$?

Solución

Se realiza el producto y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{(6)(3)(2)}=\sqrt{36}=\sqrt{2^2\cdot 3^2}=\sqrt{2^2}\sqrt{3^2}=2\cdot 3=6$$

El resultado del producto es 6

3 Realiza $\left(2\sqrt[3]{4}\right)\left(3\sqrt[3]{10}\right)$.

Solución

Se multiplica y simplifica el resultado.

$$\left(2\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(3\sqrt[3]{10}\right)=6\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{10}=6\sqrt[3]{(4)(10)}=6\sqrt[3]{40}=6\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=6\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}=6(2)\sqrt[3]{5}=12\sqrt[3]{5}$$

Por lo tanto, el resultado es $12\sqrt[3]{5}$

Multiplicación de radicales con índices diferentes. Para multiplicar radicales con índices diferentes se busca un índice común, que resulta del mínimo común múltiplo de los índices de los radicales y recibe el nombre de "mínimo común índice".

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}$?

Solución

El mínimo común índice es 6, entonces los índices de los radicales se convierten a dicho índice.

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\times 2]{(2)^2}=\sqrt[6]{2^2}\quad\text{además}\quad\sqrt{5}=\sqrt[2\times 3]{(5)^3}=\sqrt[6]{5^3}$$

Se efectúa el producto y se observa que no se puede simplificar el radical, por consiguiente se desarrollan las potencias y se realiza la multiplicación.

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{2^2\cdot 5^3}=\sqrt[6]{4\cdot 125}=\sqrt[6]{500}$$

Finalmente, el resultado es $\sqrt[6]{500}$

2 Efectúa $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}$.

Solución

Se descompone 8 en factores primos y el mínimo común índice es 4, por lo tanto, al transformar los radicales se obtiene:

$$\sqrt[2\times 2]{(2)^2}=\sqrt[4]{2^2}\ \text{ y }\ \sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}$$

Se efectúa la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2^2\cdot 2^3}=\sqrt[4]{2^5}=\sqrt[4]{2^4\cdot 2}=\sqrt[4]{2^4}\sqrt[4]{2}=2\sqrt[4]{2}$$

Finalmente, el resultado de la operación es $2\sqrt[4]{2}$

3 Multiplica $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$.

Solución

Se convierten los índices de los radicales a índice 8 y se realizan las respectivas operaciones.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[2\times 4]{2^4}\cdot\sqrt[4\times 2]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2^4}\cdot\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2^4\cdot 2^2\cdot 2}=\sqrt[8]{2^7}=\sqrt[8]{128}$$

Por tanto, el resultado es $\sqrt[8]{128}$

EJERCICIO 60

Realiza las siguientes multiplicaciones:

1. $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$
2. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$
3. $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$
4. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}$
5. $\sqrt{15}\cdot\sqrt{12}$
6. $\sqrt{24}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$
7. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}$
8. $\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{27}$
9. $\left(3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{6}\right)\sqrt{12}$
10. $\left(2\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{12}\right)\left(\frac{1}{12}\sqrt{18}\right)$
11. $\left(\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)\left(\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)$
12. $\left(2\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{20}\right)$
13. $\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt[3]{9}$
14. $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{20}$
15. $\left(2\sqrt[3]{10}\right)\left(5\sqrt[3]{72}\right)$
16. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}$
17. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}$
18. $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt{2}$
19. $\sqrt[5]{96}\cdot\sqrt[3]{3}$
20. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$
21. $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}$
22. $\sqrt[6]{6}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{6}$
23. $\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)\left(\frac{2}{6}\sqrt[6]{12}\right)$
24. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{6}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

División de radicales con índices iguales. Para efectuar la división se aplica el siguiente teorema:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

EJEMPLOS

1 Realiza $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$.

Solución

Los radicales son de igual índice, entonces se dividen los radicandos.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{10}{2}}=\sqrt{5}$$

El resultado de la operación es $\sqrt{5}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}}$?

Solución

Se simplifican los radicales y se realiza la operación.

$$\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}}=\frac{6\sqrt{2^2\cdot 7}}{\sqrt{3^2\cdot 7}}=\frac{6\sqrt{2^2}\sqrt{7}}{\sqrt{3^2}\sqrt{7}}=\frac{6(2)}{3}\sqrt{\frac{7}{7}}=\frac{12}{3}\sqrt{1}=4(1)=4$$

Por tanto, el cociente es 4

Para introducir una cantidad a un radical, se debe elevar la cantidad a un exponente igual al índice del radical.

Ejemplo

Realiza $\frac{\sqrt{48}}{2}$.

Solución

El divisor se expresa como $2=\sqrt{2^2}$ y se realiza la operación para obtener el resultado.

$$\frac{\sqrt{48}}{2}=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{4}}=\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

División de radicales con índices diferentes. Se transforman los radicales a un índice común y después se realiza la división.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Halla el cociente de $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}$.

Solución

Se transforman los índices de los radicales a 12 y se realiza la operación.

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[4\times 3]{\left(2^3\right)^3}}{\sqrt[3\times 4]{\left(2^2\right)^4}}=\frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^8}}=\sqrt[12]{\frac{2^9}{2^8}}=\sqrt[12]{2^{9-8}}=\sqrt[12]{2}$$

El resultado de la operación es $\sqrt[12]{2}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}$?

Solución

Se divide cada término del numerador entre el denominador y se obtiene:

$$\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{\frac{12}{3}}+\frac{\sqrt[3\times 2]{(2\cdot 3)^2}}{\sqrt[2\times 3]{3^3}}=3\sqrt{4}+\frac{\sqrt[6]{2^2\cdot 3^2}}{\sqrt[6]{3^3}}$$

$$=3(2)+\sqrt[6]{\frac{2^2\cdot 3^2}{3^3}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot 3^{-1}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot\frac{1}{3}}=6+\sqrt[6]{\frac{4}{3}}$$

EJERCICIO 61

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$
3. $\frac{5\sqrt{120}}{6\sqrt{40}}$
4. $\frac{7\sqrt{140}}{8\sqrt{7}}$
5. $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$
6. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)\div\left(2\sqrt{2}\right)$
7. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}\right)\div\left(2\sqrt[3]{2}\right)$
8. $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$
9. $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[3]{4}}$
10. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$
11. $\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[10]{16}}$
12. $\frac{\sqrt[7]{6}}{\sqrt[14]{3}}$
13. $\frac{\sqrt{200}-\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$
14. $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{6}}{\sqrt{2}}$
15. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$
16. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[5]{16}}{\sqrt{8}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Racionalización

Racionalizar es representar una fracción en otra equivalente que contenga una raíz en el numerador, cuyo numerador o denominador sea un número racional respectivamente.

Racionalización del denominador. Dada una expresión de la forma $\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}$, se racionaliza de la siguiente manera:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}=\frac{c}{a}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}$$

EJEMPLOS

1 Transforma $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en otra expresión equivalente que carezca de raíz en el denominador.

Solución

La fracción $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3^{2-1}}=\sqrt{3}$ tanto denominador como numerador.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, la expresión equivalente a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ es $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 Racionaliza la expresión $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Solución

Se debe separar la expresión en raíces y se multiplican por $\sqrt{5^{2-1}}=\sqrt{5}$ tanto numerador como denominador, para obtener el resultado:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Finalmente, el resultado de la racionalización es $\frac{\sqrt{10}}{5}$

Racionalización de un denominador binomio. Para racionalizar una fracción cuyo denominador es un binomio $(a\pm b)$ y alguno o ambos elementos tienen una raíz cuadrada, se multiplica por el conjugado del binomio $(a \mp b)$.

$$\frac{c}{a\pm b}=\frac{c}{a\pm b}\cdot\frac{a\mp b}{a\mp b}=\frac{c\cdot(a\mp b)}{a^2-b^2}$$

EJEMPLOS

1 Racionaliza la expresión $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplica el numerador y el denominador de la expresión por $1-\sqrt{2}$, que es el conjugado del denominador $1+\sqrt{2}$

$$\frac{3}{1+\sqrt{2}}=\frac{3}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{3-3\sqrt{2}}{(1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3-3\sqrt{2}}{1-2}=\frac{3-3\sqrt{2}}{-1}=3\sqrt{2}-3$$

La expresión equivalente a la propuesta es $3\sqrt{2}-3$

2 Racionaliza la expresión $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Solución

Se multiplica por el conjugado del denominador y se simplifica para obtener el resultado.

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{5-3}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{2}$$

3 Racionaliza $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplica al numerador y denominador por $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$, y se efectúa la simplificación.

$$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{6\left(\sqrt{3}\right)^2+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}-2\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{18-\sqrt{6}-4}{12-2}=\frac{14-\sqrt{6}}{10}$$

EJERCICIO 62

Racionaliza los siguientes denominadores:

1. $\frac{2}{\sqrt{5}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{3}}$
3. $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$
4. $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$
5. $\frac{12}{\sqrt{6}}$
6. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
7. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$
8. $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$
9. $\frac{10}{\sqrt{20}}$
10. $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{30}}{\sqrt{5}}$
11. $\frac{\sqrt{45}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$
12. $\frac{8}{3+\sqrt{7}}$
13. $\frac{4}{\sqrt{6}+2}$
14. $\frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
15. $\frac{3+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$
16. $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$
17. $\frac{1}{1-\sqrt{7}}$
18. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$
19. $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
20. $\frac{2}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Racionalización de un numerador. Dada una expresión de la forma $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}$, el numerador se racionaliza de la siguiente forma:

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^n}}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{a}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Racionaliza el numerador de $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Solución

Se multiplica el numerador y denominador de la fracción por $\sqrt{2^{2-1}}=\sqrt{2}$ y se obtiene el resultado.

$$\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2^2}}{3\sqrt{2}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

2 ¿Cuál es la expresión equivalente que resulta al racionalizar el numerador de $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}$?

Solución

Se multiplica por $\sqrt[4]{3^{4-1}}=\sqrt[4]{3^3}$ ambos elementos de la fracción para obtener el resultado.

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}}=\frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{5\cdot 3^3}}=\frac{3}{\sqrt[4]{5\cdot 27}}=\frac{3}{\sqrt[4]{135}}$$

Racionalización de un numerador binomio. Para racionalizar un numerador binomio que contenga 1 o 2 raíces cuadradas en el numerador, se efectúa el mismo procedimiento que se empleó para racionalizar un denominador.

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{a\pm b}{c}\cdot\frac{a\mp b}{a\mp b}=\frac{a^2-b^2}{c\cdot(a\mp b)}$$

EJEMPLOS

1 Racionaliza el numerador de $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Solución

Se multiplican los elementos de la fracción por $1-\sqrt{2}$ que es el conjugado del numerador.

$$\frac{1+\sqrt{2}}{3}=\frac{1+\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{3\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{1-2}{3\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{-1}{3\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{-1}{3-3\sqrt{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}-3}$$

Por consiguiente, el resultado de la racionalización es $\frac{1}{3\sqrt{2}-3}$

2 Racionaliza el numerador de $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Solución

Se multiplica numerador y denominador por $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ que es el conjugado del numerador, se efectúan las multiplicaciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{4\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{15}-2\sqrt{15}+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4(3)-5}{4(3)-4\sqrt{15}+5}$$

$$=\frac{12-5}{12-4\sqrt{15}+5}=\frac{7}{17-4\sqrt{15}}$$

EJERCICIO 63

Racionaliza el numerador en los siguientes radicales:

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $\frac{\sqrt{2}}{5}$
3. $\frac{1}{5}\sqrt{7}$
4. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$
5. $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$
6. $\frac{3\sqrt[5]{2}}{4}$
7. $\sqrt{\frac{5}{12}}$
8. $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$
9. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
10. $\frac{5+\sqrt{7}}{4}$
11. $\frac{2-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$
12. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
13. $2-\sqrt{7}$
14. $3+\sqrt{5}$
15. $\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Raíz cuadrada

La raíz cuadrada es un número que multiplicado por sí mismo es igual al radicando.

Radicando. Es el número del que se desea obtener su raíz y se escribe dentro del símbolo $\sqrt{\ }$

Algoritmo para el cálculo de la raíz cuadrada. Para obtener la raíz cuadrada exacta o aproximada de un número se realiza el siguiente procedimiento:

Ejemplo

Determina la raíz cuadrada de 426 409.

Solución

$$\sqrt{42,64,09}$$

Se divide el número dado en periodos de 2 cifras de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 6 \\ \hline -36 & \\ 6 & \end{array}$$

Se busca la raíz entera más próxima al primer periodo, en este caso es 6. Se anota a la derecha del radical y su cuadrado 36 se resta al primer periodo.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 6 \\ -36 & 12 \\ 6\ 64 & \end{array}$$

Se baja el siguiente periodo 64. Se duplica 6 y el resultado 12 se coloca en el siguiente renglón.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 65 \\ -36 & 125 \\ 6\ 64 & \end{array}$$

De 664 se separa el dígito 4 y el número que queda, 66, se divide entre 12 ($66 \div 12 = 5$), el cociente 5 se anota como la siguiente cifra en ambos renglones (si el cociente excede a 9, entonces se anota 9 o un número menor).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 65 \\ -36 & 125 \\ 6\ 64 & \\ -6\ 25 & \\ 39 & \end{array}$$

Se multiplica 5 por el número que se encuentra en el segundo renglón 125, el producto 625 se resta a 664 (si el producto excede al número que está dentro del radical, entonces se prueba con un número menor).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 653 \\ -36 & 125 \\ 6\ 64 & 1\ 303 \\ -6\ 25 & \\ 39\ 09 & \\ -39\ 09 & \\ 0 & \end{array}$$

Se baja el siguiente periodo 09, la raíz parcial 65 se duplica para obtener 130, para determinar la siguiente cifra de la raíz, se divide ($390 \div 130 = 3$), el cociente es la siguiente cifra de la raíz y también se coloca en el tercer renglón, a continuación se efectúa el paso anterior para obtener el resultado.

Por tanto, la raíz cuadrada de 426 409 es 653

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{345.7260}$?

Solución

$$\sqrt{3,45.72,60}$$

Se divide el número dado en periodos de 2 cifras de derecha a izquierda para la parte entera, y de izquierda a derecha para la parte decimal.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{3,45.72,60} & 1 \\ \hline -1 & \\ 2 & \end{array}$$

Se busca la raíz entera más próxima al primer periodo (en este caso 1). Se anota a la derecha del radical y su cuadrado 1 se resta al primer periodo.

$\sqrt{3,45.72,60}$	1
-1	2
2 45	

Se baja el siguiente periodo 45. Se duplica 1 y el resultado 2 se coloca en el siguiente renglón.

$\sqrt{3,45.72,60}$	19
-1	29
2 45	
2 61	

Se separa el último dígito 5 de la cifra 245 y el número que queda 24, se divide entre 2 (24 ÷ 2 = 12), el cociente 12 excede a 9, por consiguiente, se coloca 9 como segunda cifra en ambos renglones y se realiza el producto.

$\sqrt{3,45.72,60}$	18
-1	28
2 45	
-2 24	
21	

El producto 261 es mayor que 245, entonces se reemplaza a 9 por 8, y se multiplica por 28, el resultado 224 se resta a 245.

$\sqrt{3,45.72,60}$	18.59
-1	28
2 45	365
-2 24	3 709
21 72	
-18 25	
3 47 60	
-3 33 81	
13 79	

Se baja el siguiente periodo 72 que está después del punto decimal, la raíz parcial 18 se duplica para obtener 36 que se coloca en el tercer renglón; para determinar la siguiente cifra de la raíz, se divide (217 ÷ 36 = 6), pero el producto del cociente 6 por 366 es mayor que 2 172, por lo tanto, 5 es la siguiente cifra de la raíz que se coloca después del punto decimal a la derecha de 8 en la raíz parcial, y también en el tercer renglón, y se efectúan los mismos pasos hasta bajar el último periodo para obtener el resultado final.

Entonces, $\sqrt{345.7260} = 18.59$ con un residuo de 0.1379

EJERCICIO 64

Obtén las siguientes raíces:

1. $\sqrt{225}$
2. $\sqrt{625}$
3. $\sqrt{729}$
4. $\sqrt{324}$
5. $\sqrt{23.43}$
6. $\sqrt{63.4365}$
7. $\sqrt{564.8}$
8. $\sqrt{324.542}$
9. $\sqrt{4\,321.87}$
10. $\sqrt{5\,432.65}$
11. $\sqrt{2\,343.659}$
12. $\sqrt{78\,588\,225}$
13. $\sqrt{61\,230\,625}$
14. $\sqrt{32\,381\,790.25}$
15. $\sqrt{18\,706\,749.52}$
16. $\sqrt{435\,573\,597.06}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Raíz cuadrada (método babilónico). Este método se basa en obtener por aproximación la raíz cuadrada del número propuesto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula la raíz cuadrada de 72 por medio del método babilónico.

Solución

$\frac{72}{8}=9$ Se busca un número, cuyo cuadrado se aproxime a 72; en este caso es 8, luego se realiza la división de 72 entre 8

$\frac{8+9}{2}=8.5$ Ocho y el cociente 9, se promedian.

$\frac{72}{8.5}=8.47$ Se realiza el cociente de 72 y 8.5

$\frac{8.5+8.47}{2}=8.485$ Se promedia 8.47 y 8.5

$\frac{72}{8.485}=8.4855$ Se divide el radicando 72 entre este último cociente.

$\frac{8.485+8.4855}{2}=8.48525$ Este procedimiento se repite sucesivamente, hasta que los cocientes que se deben promediar sean muy aproximados, entonces el cociente que resulta será la raíz más próxima al número dado.

Finalmente, la raíz cuadrada aproximada de 72 es 8.48525

2 Aplica el método babilónico y calcula: $\sqrt{500}$.

Solución

$\frac{500}{22}=22.7272$ El número, cuyo cuadrado se aproxima a 500 es 22, entonces se efectúa la división.

$\frac{22.7272+22}{2}=22.3636$ Se promedia el cociente y el divisor.

$\frac{500}{22.3636}=22.3577$ Se divide 500 entre el promedio.

$\frac{22.3577+22.3636}{2}=22.3606$ Se promedia nuevamente el cociente y el divisor.

$\frac{500}{22.3606}=22.3607$ Se observa que el cociente es muy aproximado al divisor; por lo tanto, la raíz que se busca es aproximadamente igual a 22.3607

EJERCICIO 65

Aplica el método babilónico y determina las siguientes raíces cuadradas:

1. 35
2. 60
3. 126
4. 553
5. 1 263
6. 4 200
7. 65 994
8. 80 000
9. 456 200
10. 875 403

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Raíz cúbica

La raíz cúbica es un número que multiplicado por sí mismo 3 veces es igual al radicando. La raíz cúbica de una cantidad puede obtenerse por aproximación de un número, cuyo resultado se aproxime a la cantidad, siempre y cuando éste sea menor que 100.

Ejemplo

Determina la raíz cúbica de 732.

Solución

$\sqrt[3]{732}$ | 9
–729
3

El número cuyo cubo se aproxima a 732 es 9

Por consiguiente, la raíz cúbica de 732 es 9 con un residuo de 3 unidades.

Para obtener raíces cúbicas de cantidades mayores de 3 cifras, se realiza el siguiente procedimiento:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula $\sqrt[3]{1728}$.

Solución

$\sqrt[3]{1,728}$ | 1
–1
0

Se separa 1 728 en periodos de 3 dígitos, a partir del punto decimal de derecha a izquierda, y se busca un número cuyo cubo se aproxime o dé como resultado 1.

$\sqrt[3]{1,728}$ | 12
–1 | $3 \times 1^2 = 3$
0 728 | $7 \div 3 = 2$
–0 728
0

Se baja el siguiente periodo 728, la raíz parcial 1 se eleva al cuadrado y se multiplica por 3 ($3 \times 1^2 = 3$), se separan los 2 dígitos de la derecha de 728 y se divide entre 3 ($7 \div 3 = 2$), 2 se coloca a la derecha del 1 y se realiza la siguiente prueba:

$$\begin{array}{r} 3 \times 1^2 \times 2 \times 100 = 600 \\ + \; 3 \times 1 \times 2^2 \times 10 = 120 \\ 2^3 = \quad 8 \\ \hline 728 \end{array}$$

El resultado 728 es menor o igual que 728, se efectúa la resta.

El resultado de la raíz cúbica del número dado es 12.

Si al efectuar el cociente resulta un número de 2 dígitos, entonces para hacer la prueba se debe tomar a 9 o un número menor que 9.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la raíz cúbica de 9 663 597.

Solución

$\sqrt[3]{9,663,597}$ | 2
–8
1

Se separa el radicando en periodos de 3 dígitos, a partir del punto decimal de derecha a izquierda, y se busca un número cuyo cubo se aproxime o dé como resultado 9, en este caso es 2, ya que $2^3 = 8$ y se resta a 9.

(*continúa*)

(*continuación*)

$\sqrt[3]{9{,}663{,}597}$	21
-8	$3 \times 2^2 = 12$
1 663	$16 \div 12 = 1$
–1 261	
402	

Se baja el siguiente grupo de dígitos y el resultado 2 se eleva al cuadrado y se multiplica por tres ($3 \times 2^2 = 12$), se separan los 2 dígitos de la derecha de 1 663 y se divide entre 12 ($16 \div 12 = 1$), el 1 se coloca a la derecha del 2 para después realizar las siguientes pruebas:

$$\begin{array}{rr} 3 \times 2^2 \times 1 \times 100 = & 1\,200 \\ +\ 3 \times 2 \times 1^2 \times \ 10 = & 60 \\ 1^3 = & 1 \\ \hline & 1\,261 \end{array}$$

El resultado 1 261 se sustrae de 1 663

$\sqrt[3]{9{,}663{,}597}$	213
-8	$3 \times 2^2 = 12$
1 663	$16 \div 12 = 1$
–1 261	$3 \times 21^2 = 1\,323$
402 597	$4\,025 \div 1\,322 = 3$
–402 597	
0	

Se baja el siguiente periodo 597, el nuevo resultado 21 se eleva al cuadrado y se multiplica por 3 ($3 \times 21^2 = 1\,323$), se separan los 2 dígitos de la derecha de 402 597 y 4 025 se divide entre 1 323 ($4\,025 \div 1\,323 = 3$), 3 se coloca a la derecha de 21 y se realizan las pruebas anteriores:

$$\begin{array}{rr} 3 \times 21^2 \times 3 \times 100 = & 396\,900 \\ +\ 3 \times 21 \times 3^2 \times \ 10 = & 5\,670 \\ 3^3 = & 27 \\ \hline & 402\,597 \end{array}$$

Como $402\,597 \leq 402\,597$, entonces se puede efectuar la resta.

En este caso el residuo es 0; por lo tanto, el resultado de la raíz cúbica es 213

EJERCICIO 66

Obtén la raíz cúbica de los siguientes números:

1. 512
2. 729
3. 3 375
4. 4 913
5. 10 648
6. 54 872
7. 300 763
8. 857 375
9. 2 460 375
10. 35 287 552
11. 78 953 589
12. 220 348 864

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Jerarquía de operaciones

Indica el orden en el que se deben realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz, así como signos de agrupación. De esta forma se garantiza que se obtendrá el resultado correcto.

Orden de las operaciones. Dada una expresión que involucre diferentes operaciones, se realizan en el siguiente orden:

- Potencias y raíces. Si se tiene la potencia o la raíz de una suma o resta, estas operaciones se resuelven primero.
- Multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
- Sumas y restas de izquierda a derecha.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la operación $6^2 \div 9 \times 4 + \sqrt{16} \times 3 - 10 \div 5$.

Solución

Se desarrolla la potencia y se extrae a la raíz:

$$6^2 \div 9 \times 4 + \sqrt{16} \times 3 - 10 \div 5 = 36 \div 9 \times 4 + 4 \times 3 - 10 \div 5$$

Se realizan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha, finalmente se efectúan las sumas y restas de izquierda a derecha y se obtiene el resultado.

$$= 4 \times 4 + 12 - 2$$
$$= 16 + 12 - 2 = 26$$

2 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{5^2 - 3^2} \times 2^2 + \sqrt[3]{8} \times \sqrt{81} \div 18 + \sqrt{18 \times 8}$?

Solución

Se desarrollan las potencias, se realizan las operaciones dentro de los radicales y se extraen las raíces:

$$\sqrt{5^2 - 3^2} \times 2^2 + \sqrt[3]{8} \times \sqrt{81} \div 18 + \sqrt{18 \times 8} = \sqrt{25 - 9} \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + \sqrt{144}$$
$$= \sqrt{16} \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + \sqrt{144}$$
$$= 4 \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + 12$$

Se efectúan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha. Finalmente, se suman las cantidades y se obtiene el resultado.

$$= 16 + 18 \div 18 + 12$$
$$= 16 + 1 + 12$$
$$= 29$$

3 Realiza $-\sqrt{9} - \left\{4^2 + 3\left[\sqrt[3]{27} + 4 \times 6\right] - 2^3\right\}$.

Solución

Se desarrollan las potencias y se extraen las raíces:

$$-\sqrt{9} - \left\{4^2 + 3\left[\sqrt[3]{27} + 4 \times 6\right] - 2^3\right\} = -3 - \{16 + 3[3 + 4 \times 6] - 8\}$$

Se realiza la multiplicación:

$$= -3 - \{16 + 3[3 + 24] - 8\}$$

Se efectúan los pasos correspondientes para eliminar los signos de agrupación y obtener el resultado:

$$= -3 - \{16 + 3[27] - 8\}$$
$$= -3 - \{16 + 81 - 8\} = -3 - \{89\}$$
$$= -3 - 89 = -92$$

El resultado de la operación es –92

4 ¿Cuál es el resultado de $(5-3)^4 \div 4 + \left\{\sqrt{6^2 - 20} + \sqrt{5 \times 4 + 16} + (8-4)^2 \times 3\right\}$?

Solución

Se realizan las operaciones que encierran los paréntesis:

$$= (5-3)^4 \div 4 + \left\{\sqrt{6^2 - 20} + \sqrt{5 \times 4 + 16} + (8-4)^2 \times 3\right\}$$
$$= (2)^4 \div 4 + \left\{\sqrt{36 - 20} + \sqrt{5 \times 4 + 16} + (4)^2 \times 3\right\}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se desarrollan las potencias:

$$=16\div 4+\left\{\sqrt{16}+\sqrt{36}+16\times 3\right\}$$

Se extraen las raíces:

$$=16\div 4+\{4+6+16\times 3\}$$

Se efectúan las multiplicaciones y divisiones:

$$=4+\{4+6+48\}$$

Finalmente, se realiza la simplificación del signo de agrupación:

$$=4+\{58\}=4+58=62$$

Por tanto, el resultado es 62

5 Realiza $\sqrt{\frac{2}{3}\div\left(\frac{17}{27}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{7}{8}+\frac{13}{8}\right)$.

Solución

Se realizan las operaciones encerradas en los paréntesis:

$$\frac{17}{27}-\frac{1}{3}=\frac{17-9}{27}=\frac{8}{27}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{4-1}{24}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{7}{8}+\frac{13}{8}=\frac{7+13}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

Los valores obtenidos se sustituyen y se realizan las multiplicaciones y divisiones:

$$=\sqrt{\frac{2}{3}\div\left(\frac{8}{27}\right)+\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{8}\right)}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{54}{24}+\frac{8}{2}}-\frac{15}{10}$$

Pero $\frac{54}{24}=\frac{9}{4}$, $\frac{8}{2}=4$ y $\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$, entonces:

$$=\sqrt{\frac{9}{4}+4}-\frac{3}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{9+16}{4}}-\frac{3}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{4}}-\frac{3}{2}$$

Se obtiene la raíz cuadrada y se realiza la resta:

$$=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Por tanto, el resultado es 1

EJERCICIO 67

Efectúa las siguientes operaciones:

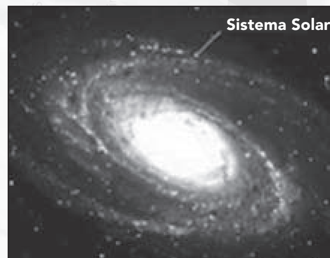
1. $7\times2+8\div4-3\times2=$
2. $12\div4\times3+18\div9\times3-4\times3=$
3. $(10-2)\div2\times3+(8+6)(7-2)-12\times2\div8=$
4. $(6+2)\times(7-4)\div(14-2)+(12-8)\times(7+3)\div(10-2)=$
5. $12^2\div\sqrt{16}\div\sqrt{81}+5^2\times6\div3=$
6. $\sqrt{13^2-12^2}+(6-4)^2\times8-\sqrt{(10-8)^2}=$
7. $2+\{8\times(8-6)+[(3+4)\div7-5\times6\div10]-5\}=$
8. $\sqrt{2\times36+576\div8}+\left\{\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right)^2-[7+(8-2)-(5-4)]+6\right\}=$
9. $3\times\left\{\sqrt{(5-2)\times(7-4)}-(5-3)+(8-3)-[6-(7-2)+8]-6\right\}=$
10. $-6+(8-3)-[4+(6-3)\times5-8]+3-\{9-(6-4)\}=$
11. $\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}\div\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\div\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\div\frac{1}{6}=$
12. $\sqrt{\frac{9}{4}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}-\left[\frac{5^2-4^2}{9}-\frac{3}{4}\right]=$
13. $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\times\frac{3}{2}\div\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{4}{3}\div\frac{3}{4}=$
14. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-12\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\div6+\frac{3}{8}\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{3}\right)-\frac{25}{36}\right\}=$
15. $\left(\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{\frac{1}{36}}\right)^2\div\frac{1}{3}-2\left[\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right]^2=$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 7

Notación científica y logaritmos

Reseña HISTÓRICA



La notación científica

Se emplea para simplificar cálculos y tiene dos propósitos: uno es la representación concisa de números muy grandes o muy pequeños y, el otro, la indicación del grado de exactitud de un número que representa una medición.

Para los dos propósitos se usan potencias de 10, por ejemplo: podemos decir que la velocidad de la luz es de trescientos millones de metros por segundo, o también de 300 000 000 m/s. Si hablamos de grandes cantidades de bytes, se puede decir que la capacidad de almacenamiento de datos de una gran computadora es de 500 Terabytes, lo que equivale a 500 000 000 000 000 bytes. Si nos referimos a la longitud de onda de los rayos cósmicos, se podría decir que es inferior a 0.00000000000001 metros.

En textos de ciencia y técnica estas cifras se escriben de la forma siguiente: "La velocidad de la luz es de 3×10^8 m/s...". "La capacidad de almacenamiento de datos de la gran computadora es de 5×10^{14} bytes..." y "la longitud de onda de los rayos cósmicos es inferior a 1×10^{-14} metros..."

Los logaritmos

En 1614 John Napier publicó el *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*... donde, mediante una aproximación cinemática, pone en relación una progresión geométrica con una progresión aritmética. La primera es de las distancias recorridas con velocidades proporcionales a ellas mismas, la segunda, la de las distancias recorridas con velocidad constante; éstas son entonces los "logaritmos" de las primeras (el neologismo es de Napier).

En 1619 apareció una segunda obra, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*.... donde el autor explica cómo calcular los logaritmos.

Henry Briggs (matemático de Londres), había descubierto la importancia de estos trabajos y retomó la idea fundamental, pero consideró una progresión geométrica simple, la de las potencias de 10, en 1617 publica una primera tabla con 8 decimales. El logaritmo de un número x es, por lo tanto, definido como el exponente n de 10, tal que x sea igual a 10 elevado a n.

La Vía Láctea tiene forma de lente convexa. El núcleo tiene una zona central de forma elíptica y unos 8×10^3 años luz de diámetro.

Notación científica

La notación científica se utiliza para expresar cantidades en función de potencias de 10 y por lo regular se usa para cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Potencias de 10

$0.1 = 10^{-1}$	$10 = 10^{1}$
$0.01 = 10^{-2}$	$100 = 10^{2}$
$0.001 = 10^{-3}$	$1\,000 = 10^{3}$
$0.0001 = 10^{-4}$	$10\,000 = 10^{4}$
$0.00001 = 10^{-5}$	$100\,000 = 10^{5}$

Para expresar una cantidad en notación científica el punto se recorre una posición antes de la primera cifra, si la cantidad es grande, o un lugar después de la primera cifra si la cantidad es pequeña. El número de lugares que se recorre el punto decimal es el exponente de la base 10.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en notación científica 2 345 000.

Solución

Se coloca el 2 como cifra entera, 345 como parte decimal (2.345) y se indica la multiplicación por 10 con exponente 6, ya que fue el número de cifras que se recorrió el punto a la izquierda.

$$2\,345\,000 = 2.345 \times 10^{6}$$

2 Expresa en notación científica 25 300.

Solución

El punto decimal se recorre cuatro posiciones a la izquierda, por tanto,

$$25\,300 = 2.53 \times 10^{4}$$

3 Un satélite gira en una órbita circular de 820 000 km sobre la superficie terrestre. Expresa esta cantidad en notación científica.

Solución

La órbita del satélite expresada en notación científica es:

$$820\,000 = 8.2 \times 10^{5} \text{ km}$$

Cuando los números son pequeños, el punto decimal se recorre hacia la derecha hasta dejar como parte entera la primera cifra significativa y el exponente del número 10 es de signo negativo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Escribe en notación científica 0.043.

Solución

El punto decimal se recorre 2 lugares hacia la derecha y el resultado se expresa como:

$$0.043 = 4.3 \times 10^{-2}$$

2 Representa en notación científica 0.000000386.

Solución

Se recorre el punto decimal 7 lugares de izquierda a derecha, por consiguiente,

$$0.000000386 = 3.86 \times 10^{-7}$$

3 La longitud de una bacteria es de 0.000052 m, expresa esta longitud en notación científica.

Solución

La longitud de la bacteria expresada en notación científica es:

$$0.000052 \text{ m} = 5.2 \times 10^{-5} \text{ m}$$

EJERCICIO 68

Expresa en notación científica las siguientes cantidades:

1. 4 350
2. 16 000
3. 95 480
4. 273 000
5. 670 200
6. 350 000 000
7. 5 342 000
8. 18 600 000
9. 0.176
10. 0.0889
11. 0.00428
12. 0.000326
13. 0.000000462
14. 0.00000003
15. 0.0000000879
16. 0.0000000012
17. 0.000000000569
18. 0.0000000000781

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Escritura en forma desarrollada. El número $a \times 10^n$ se expresa en forma desarrollada de las siguientes formas:

- Si el exponente n es positivo, entonces indica el número de posiciones que se debe recorrer el punto decimal a la derecha y los lugares que no tengan cifra son ocupados por ceros.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en su forma desarrollada 3.18×10^3.

Solución

El exponente 3 indica que el punto se deberá recorrer 3 lugares hacia la derecha, esto es:

$$3.18 \times 10^3 = 3\,180$$

2 Escribe en su forma desarrollada 25.36×10^6.

Solución

El exponente 6 indica el número de lugares que se recorren hacia la derecha y los lugares que no tengan cifra serán ocupados por ceros.

$$25.36 \times 10^6 = 25\,360\,000$$

- Si el exponente n es negativo, entonces indica el número de posiciones que se debe recorrer el punto decimal a la izquierda y los lugares que no tengan cifra son ocupados por ceros.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en notación desarrollada 7.18×10^{-4}.

Solución

En este número, el punto decimal se recorre 4 lugares hacia la izquierda.

$$7.18 \times 10^{-4} = 0.000718$$

2 Escribe en su forma desarrollada 8×10^{-2}.

Solución

Se recorren 2 lugares hacia la izquierda, por lo tanto,

$$8 \times 10^{-2} = 0.08$$

Otra forma de convertir un número en notación científica a notación desarrollada, es realizar la multiplicación por la potencia de 10 desarrollada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Escribe en su forma desarrollada 3.012×10^{5}.

Solución

Se desarrolla la potencia de 10 y luego se realiza la multiplicación, entonces;

$$3.012 \times 10^{5} = 3.012 \times 100\,000 = 301\,200$$

2 Expresa en su forma desarrollada 8.0015×10^{-3}.

Solución

Se desarrolla la potencia de 10 y se obtiene: $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000}$ entonces,

$$8.0015 \times 10^{-3} = 8.0015 \times \frac{1}{1\,000} = \frac{8.0015}{1\,000} = 0.0080015$$

Por consiguiente, $8.0015 \times 10^{-3} = 0.0080015$

3 Desarrolla 2.1056×10^{-2}.

Solución

Al desarrollar la potencia de 10 se obtiene que: $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$ entonces,

$$2.1056 \times 10^{-2} = 2.1056 \times \frac{1}{100} = \frac{2.1056}{100} = 0.021056$$

En consecuencia $2.1056 \times 10^{-2} = 0.021056$

EJERCICIO 69

Escribe en su forma desarrollada las siguientes cifras:

1. 1.6×10^{4}	5. 4.2×10^{2}	9. 1.05×10^{7}	13. 2.3×10^{-12}
2. 0.1×10^{-2}	6. 72.4×10^{-5}	10. 2.34×10^{-1}	14. 3.01×10^{-4}
3. 37.6×10^{5}	7. 1×10^{-6}	11. 3.264×10^{2}	15. 4.14501×10^{8}
4. 6×10^{-3}	8. 8.3×10^{-4}	12. 62.34×10^{-1}	16. 3.002×10^{-7}

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Para efectuar estas operaciones es necesario que la base 10 tenga el mismo exponente.

$$a \times 10^{n} + c \times 10^{n} = (a + c) \times 10^{n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $3.5 \times 10^{-6} + 1.83 \times 10^{-6}$.

Solución

Como los exponentes de la base 10 son iguales, se suman las cifras y la potencia de 10 permanece constante.

$$3.5 \times 10^{-6} + 1.83 \times 10^{-6} = (3.5 + 1.83) \times 10^{-6} = 5.33 \times 10^{-6}$$

2 ¿Cuál es el resultado de $2.73 \times 10^{-4} - 1.25 \times 10^{-4}$?

Solución

Como los exponentes de la base 10 son iguales, se realiza la operación de la siguiente manera:

$$2.73 \times 10^{-4} - 1.25 \times 10^{-4} = (2.73 - 1.25) \times 10^{-4} = 1.48 \times 10^{-4}$$

Cuando los exponentes de la base 10 sean diferentes, se recorre el punto decimal para igualarlos y después se efectúa la operación.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $1.34 \times 10^{6} + 2.53 \times 10^{5}$.

Solución

Se escoge una de las cifras para igualar los exponentes, en este caso se expresa a exponente 5.

$$1.34 \times 10^{6} = 1\,340\,000 = 13.4 \times 10^{5}$$

Luego, la operación resulta:

$$1.34 \times 10^{6} + 2.53 \times 10^{5} = 13.4 \times 10^{5} + 2.53 \times 10^{5} = (13.4 + 2.53) \times 10^{5} = 15.93 \times 10^{5}$$

Esta misma operación se realiza convirtiendo a exponente 6 y el resultado no se altera, entonces,

$$2.53 \times 10^{5} = 253\,000 = 0.253 \times 10^{6}$$

Luego, al sustituir:

$$1.34 \times 10^{6} + 2.53 \times 10^{5} = 1.34 \times 10^{6} + 0.253 \times 10^{6} = (1.34 + 0.253) \times 10^{6} = 1.593 \times 10^{6}$$

Por consiguiente, $1.34 \times 10^{6} + 2.53 \times 10^{5} = 1.593 \times 10^{6}$

2 Halla el resultado de $2.82 \times 10^{-5} - 1.1 \times 10^{-6}$.

Solución

Se convierte a exponente -6, y el resultado

$$2.82 \times 10^{-5} - 1.1 \times 10^{-6} = 28.2 \times 10^{-6} - 1.1 \times 10^{-6} = (28.2 - 1.1) \times 10^{-6} = 27.1 \times 10^{-6}$$

Ahora bien, si se convierte a exponente -5, entonces,

$$2.82 \times 10^{-5} - 1.1 \times 10^{-6} = 2.82 \times 10^{-5} - 0.11 \times 10^{-5} = (2.82 - 0.11) \times 10^{-5} = 2.71 \times 10^{-5}$$

Por consiguiente, $2.82 \times 10^{-5} - 1.1 \times 10^{-6} = 27.1 \times 10^{-6}$ o 2.71×10^{-5}

EJERCICIO 70

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $3.18 \times 10^{6} + 1.93 \times 10^{6}$
2. $8.1 \times 10^{-4} + 2.3 \times 10^{-4}$
3. $4.3 \times 10^{-5} - 3.2 \times 10^{-5}$
4. $1.1 \times 10^{4} - 0.91 \times 10^{4}$
5. $13.1 \times 10^{6} - 0.29 \times 10^{7}$
6. $25.34 \times 10^{-3} + 1.82 \times 10^{-2}$
7. $3.83 \times 10^{4} + 5.1 \times 10^{3} - 0.2 \times 10^{5}$
8. $8.72 \times 10^{-3} - 0.3 \times 10^{-2} + 0.1 \times 10^{-4}$
9. $4 \times 10^{6} - 0.23 \times 10^{6} - 25 \times 10^{5}$
10. $1.18 \times 10^{-5} + 3.4 \times 10^{-5} - 0.12 \times 10^{-4}$
11. $2.03 \times 10^{3} + 3.02 \times 10^{2} - 0.021 \times 10^{5}$
12. $1.02 \times 10^{-2} + 0.023 \times 10^{-1} + 2.34 \times 10^{-3}$
13. $7.023 \times 10^{3} + 1.03 \times 10^{2} - 4.002 \times 10^{3} - 0.023 \times 10^{2}$
14. $8.2 \times 10^{-4} + 2.003 \times 10^{-3} - 2.89 \times 10^{-4} + 7.23 \times 10^{-3}$
15. $5.04 \times 10^{-2} + 12 \times 10^{-3} - 2.04 \times 10^{-2} + 852 \times 10^{-4}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación y división

- Para multiplicar o dividir un número en notación científica por o entre un número real cualquiera, se afecta sólo a la primera parte del número.

$$a(b \times 10^{n}) = (a \times b) \times 10^{n} \quad ; \quad \frac{b \times 10^{n}}{a} = (b \div a) \times 10^{n} \quad \text{con } a \neq 0 \text{ para la división}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $3(5.2 \times 10^{7})$?

Solución

Se efectúa el producto de 3 por 5.2, la base 10 y su exponente no se alteran.

$$3(5.2 \times 10^{7}) = 3(5.2) \times 10^{7} = 15.6 \times 10^{7} = 1.56 \times 10^{8}$$

2 Efectúa $\frac{3.5\times10^{-6}}{5}$.

Solución

Se realiza la división de 3.5 entre 5 mientras que la base 10 y su exponente no se alteran.

$$\frac{3.5\times10^{-6}}{5}=\frac{3.5}{5}\times10^{-6}=0.7\times10^{-6}=7\times10^{-7}$$

➲ Para multiplicar o dividir números escritos en notación científica, se efectúa la multiplicación o división en las primeras partes y para la base 10 se aplican las leyes de los exponentes.

$$(a\times10^{m})\,(b\times10^{n})=(a\times b)\times10^{m+n} \qquad \frac{a\times10^{m}}{b\times10^{n}}=a\div b\times10^{m-n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación $(8.2\times10^{-5})\,(4.1\times10^{-3})$.

Solución

Se multiplican 8.2 por 4.1 y los exponentes de la base 10 se suman.

$$(8.2\times10^{-5})\,(4.1\times10^{-3})=(8.2\times4.1)\times10^{-5+(-3)}=33.62\times10^{-8}=3.362\times10^{-7}$$

2 Determina el resultado de $\frac{\left(4.25\times10^{6}\right)\left(2.01\times10^{-2}\right)}{2.5\times10^{8}}$.

Solución

Se realiza la multiplicación y posteriormente la división para obtener el resultado.

$$\frac{(4.25\times10^{6})(2.01\times10^{-2})}{2.5\times10^{8}}=\frac{(4.25\times2.01)\left(10^{6}\times10^{-2}\right)}{2.5\times10^{8}}=\frac{8.5425\times10^{4}}{2.5\times10^{8}}=\frac{8.5425}{2.5}\times10^{4-8}$$
$$=3.417\times10^{-4}$$

Por tanto, el resultado de la operación es 3.417×10^{-4}

3 ¿Cuál es el resultado de $\frac{3.2\times10^{-5}\left(4.1\times10^{-7}-21\times10^{-8}\right)}{2.3\times10^{-13}+0.27\times10^{-12}}$?

Solución

Se realizan las sumas y restas, posteriormente la multiplicación y la división para obtener el resultado final.

$$\frac{3.2\times10^{-5}\left(4.1\times10^{-7}-21\times10^{-8}\right)}{2.3\times10^{-13}+0.27\times10^{-12}}=\frac{3.2\times10^{-5}\left(4.1\times10^{-7}-2.1\times10^{-7}\right)}{2.3\times10^{-13}+2.7\times10^{-13}}=\frac{\left(3.2\times10^{-5}\right)\left(2\times10^{-7}\right)}{5\times10^{-13}}$$
$$=\frac{(3.2)(2)\times10^{-5+(-7)}}{5\times10^{-13}}=\frac{6.4\times10^{-12}}{5\times10^{-13}}=\frac{6.4}{5}\times10^{-12-(-13)}$$
$$=1.28\times10^{1}=12.8$$

Por consiguiente, el resultado de la operación es 12.8

EJERCICIO 71

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $3\left(7.2\times10^{-6}\right)$
2. $4.2\left(3.52\times10^{8}\right)$
3. $\dfrac{1.13\times10^{5}}{2}$
4. $\dfrac{1}{4}\left(4.83\times10^{-6}\right)$
5. $\dfrac{3.27\times10^{8}}{3}$
6. $5\left(3\times10^{-4}+2.6\times10^{-5}\right)$
7. $3.8\left(6.25\times10^{13}-42\times10^{12}\right)$
8. $\left(2.73\times10^{-2}\right)\left(1.16\times10^{4}\right)$
9. $\left(4.25\times10^{-8}\right)\left(1.2\times10^{-6}\right)$
10. $\left(3.1\times10^{5}\right)\left(2.3\times10^{6}\right)$
11. $1.25\times10^{-6}\left(7\times10^{9}+1.2\times10^{10}\right)$
12. $5.4\times10^{8}\left(1.3\times10^{-11}-5\times10^{-12}\right)$
13. $\dfrac{1.16\times10^{-5}}{2\times10^{-3}}$
14. $\dfrac{4.25\times10^{-2}}{5\times10^{3}}$
15. $\dfrac{\left(1.32\times10^{-4}\right)\left(2.5\times10^{-3}\right)}{3\times10^{-12}}$
16. $\dfrac{\left(3.78\times10^{-3}\right)\left(4.26\times10^{-5}\right)}{2.7\times10^{-3}}$
17. $\dfrac{3.5\times10^{7}+2.3\times10^{7}}{5.9\times10^{5}-30\times10^{4}}$
18. $\dfrac{1.73\times10^{-2}-0.3\times10^{-3}}{2\times10^{-6}}$
19. $\dfrac{\left(1.26\times10^{-5}\right)\left(1.04\times10^{-3}\right)}{\left(2.73\times10^{-3}\right)\left(1.2\times10^{-4}\right)}$
20. $\dfrac{4.2\times10^{5}\left(1.7\times10^{-4}+0.003\times10^{-2}\right)}{8.4\times10^{-1}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Potencias y raíces

Potencia de un número en notación científica. Al elevar un número en notación científica a un exponente dado, se elevan cada una de sus partes, como se ilustra a continuación:

$$(a\times10^{m})^{n}=a^{n}\times10^{m\times n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza $\left(1.2\times10^{-6}\right)^{2}$.

Solución

Se elevan ambas partes del número al exponente 2

$$\left(1.2\times10^{-6}\right)^{2}=(1.2)^{2}\times\left(10^{-6}\right)^{2}=1.44\times10^{-12}$$

El resultado de la operación es 1.44×10^{-12}

2 ¿Cuál es el resultado de $\left(4.4\times10^{5}\right)^{3}$?

Solución

Se elevan ambas partes del número.

$$\left(4.4\times10^{5}\right)^{3}=(4.4)^{3}\times\left(10^{5}\right)^{3}=85.184\times10^{15}=8.5184\times10^{16}$$

Por tanto, el resultado es: 8.5184×10^{16}

Raíz de un número en notación científica. Para obtener la raíz de un número en notación científica se escribe el exponente de la base 10 como múltiplo del índice del radical, luego se extrae la raíz de ambas partes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Halla el resultado de $\sqrt{1.69\times10^{-4}}$.

Solución

El exponente de la base 10 es múltiplo de 2, entonces se procede a extraer la raíz del número.

$$\sqrt{1.69\times10^{-4}}=\sqrt{1.69}\times\sqrt{10^{-4}}=1.3\times10^{-\frac{4}{2}}=1.3\times10^{-2}$$

El resultado de la raíz es: 1.3×10^{-2}

2 Efectúa $\sqrt[3]{8\times10^{14}}$.

Solución

Debido a que el exponente de la base 10 no es múltiplo de 3, se transforma el exponente de la siguiente manera:

$$8\times10^{14}=0.8\times10^{15}$$

Por tanto,

$$\sqrt[3]{8\times10^{14}}=\sqrt[3]{0.8\times10^{15}}=\sqrt[3]{0.8}\times\sqrt[3]{10^{15}}=0.92831\times10^{5}=9.2831\times10^{4}$$

Por consiguiente, el resultado es: 9.2831×10^{4}

3 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{\dfrac{3.2\times10^{-7}+0.43\times10^{-6}}{1.2\times10^{-3}}}$?

Solución

Se efectúan las operaciones dentro del radical y se extrae la raíz.

$$\sqrt{\frac{3.2\times10^{-7}+0.43\times10^{-6}}{1.2\times10^{-3}}}=\sqrt{\frac{3.2\times10^{-7}+4.3\times10^{-7}}{1.2\times10^{-3}}}=\sqrt{\frac{7.5\times10^{-7}}{1.2\times10^{-3}}}=\sqrt{6.25\times10^{-7-(-3)}}$$

$$=\sqrt{6.25\times10^{-4}}=\sqrt{6.25}\times\sqrt{10^{-4}}=2.5\times10^{-2}$$

EJERCICIO 72

Realiza las siguientes operaciones.

1. $\left(1.7\times10^{-2}\right)^{2}$
2. $\left(8\times10^{-6}\right)^{-2}$
3. $\left(2.5\times10^{-6}+1.3\times10^{-6}\right)^{2}$
4. $\left(4.3\times10^{8}-25\times10^{7}\right)^{3}$
5. $\dfrac{\left(1.3\times10^{5}-4\times10^{5}+3.5\times10^{5}\right)^{-2}}{2.0\times10^{-4}}$
6. $\left(\dfrac{2.3\times10^{-4}+5.7\times10^{-4}}{3.24\times10^{-6}-1.64\times10^{-6}}\right)^{2}$
7. $\sqrt{9.61\times10^{-8}}$
8. $\sqrt[3]{2.16\times10^{8}}$
9. $\sqrt{32.4\times10^{-9}}$
10. $\sqrt[3]{1.6\times10^{7}+1.1\times10^{7}}$
11. $\sqrt[5]{5.26\times10^{-14}-2.06\times10^{-14}}$
12. $\left(1.2\times10^{-3}\right)^{3}\cdot\sqrt[3]{1.331\times10^{-6}}$
13. $\sqrt[5]{\dfrac{4.1\times10^{7}+1.9\times10^{7}}{3.5\times10^{-9}-1.625\times10^{-9}}}$
14. $\sqrt[3]{\dfrac{9.91\times10^{3}-36.6\times10^{2}}{3.25\times10^{10}+1.75\times10^{10}}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Logaritmo de un número

El logaritmo con base b de un número N, es el exponente a, al cual se eleva la base b para obtener el resultado o argumento N.

$$\log_b N = a \Leftrightarrow N = b^a \text{ con } N > 0$$

Ejemplos

Utiliza la definición de logaritmo para transformar a su forma exponencial los siguientes logaritmos:

1. $\log_3 243 = 5 \Rightarrow 243 = 3^5$
2. $\log_{10} 10\,000 = 4 \Rightarrow 10\,000 = 10^4$
3. $\log_2 64 = 6 \Rightarrow 64 = 2^6$
4. $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4 \Rightarrow 25 = \left(\sqrt{5}\right)^4$

Logaritmos comunes o **de Briggs.** Son logaritmos cuya base es 10, el logaritmo de cualquier número está formado por una parte que corresponde a un número entero llamado *característic*a y otro decimal que recibe el nombre de *mantisa*. Estos logaritmos se representan de la siguiente manera:

$$\log_{10} N = \log N$$

Cálculo del logaritmo de un número. La característica del logaritmo de un número se obtiene de la siguiente manera:

- Si la parte entera del número es mayor que cero, la característica es el número de cifras enteras menos uno.
- Si la parte entera del número es cero, la característica es negativa y resulta de contar el número de lugares que existe del punto decimal hasta el lugar que ocupa la primera cifra significativa.
- Para obtener la mantisa se buscan las 2 primeras cifras del número en la primera columna de las tablas, se sigue sobre el mismo renglón hasta llegar al cruce con la columna encabezada por la tercera cifra; si es necesario se sumará la parte proporcional que corresponde a la cuarta cifra, que se encuentra sobre el mismo renglón en el cruce con la columna correspondiente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el log 7.

Solución

La característica = número de cifras enteras − 1 = 1 − 1 = 0

Se toma 70 en vez de 7 y para calcular la mantisa se ubica 70 en la primera columna y se toma la cifra que se encuentra sobre el renglón y la intersección con la columna 0

N	**0**	1	2	3...9		1	2	3
≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈
70	**8451**	8457	8463	8470...	8506	1	1	2

Por tanto, log 7 = 0.8451

2 Obtén el log 689.

Solución

La característica = número de cifras enteras – 1 = 3 – 1 = 2

Para calcular la mantisa se ubica 68 en la primera columna y se toma la cifra que se encuentra sobre el renglón y la intersección con la columna 9

N	0	1	2	3	....	**9**	1	2	3
≈	≈	≈	≈	≈		≈	≈	≈	≈
68	8325	8331	8338	8344	....	**8382**	1	1	2

Por tanto, log 689 = 2.8382

3 Encuentra el valor de: log 25.43.

Solución

Característica = 2 – 1 = 1

Cálculo de la mantisa:

N	0	1	2	3	**4**	....	9	1	2	**3**
≈	≈	≈	≈	≈	≈		≈	≈	≈	≈
25	3979	3997	4014	4031	**4048**	....	4133	2	3	**5**

El resultado final de la mantisa se obtiene de la suma de 4048 y 5

Finalmente, log 25.43 = 1.4053

4 Calcula el valor de: log 0.00457.

Solución

La parte entera es cero, por tanto la característica es negativa y corresponde a la posición que ocupa el número 4, que es la primera cifra significativa después del punto decimal.

Característica = – 3 y se denota como $\bar{3}$

La mantisa se obtiene de la misma manera que en los ejemplos anteriores:

N	0	1	2	3	4	....	**7**	....	9	1	2	3
≈	≈	≈	≈	≈	≈		≈		≈	≈	≈	≈
45	6532	6542	6551	6561	6571	....	**6599**	....	6618	1	1	2

Por tanto, log 0.00457 = $\bar{3}$.6599

EJERCICIO 73

Emplea tablas y obtén el logaritmo de Briggs de las siguientes cantidades:

1. log 1 349
2. log 134.9
3. log 13.49
4. log 0.001349
5. log 32.1
6. log 7.28
7. log 0.689
8. log 0.049
9. log 0.0078
10. log 5 685
11. log 3 233
12. log 53 000
13. log 1.364
14. log 5.032
15. log 0.41
16. log 30
17. log 7.032
18. log 1 000

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Antilogaritmo

Dado el $\log_b N = a$, el antilogaritmo con base b de a es N.

Cálculo del antilogaritmo de un número. La característica positiva más uno indica el número de cifras enteras que tiene el número N.

La característica negativa indica el lugar que ocupa la primera cifra significativa a la derecha del punto decimal.

Para obtener el antilogaritmo se buscan las 2 primeras cifras del número en la primera columna de la tabla de antilogaritmos, se sigue sobre el mismo renglón hasta llegar al cruce con la columna encabezada por la tercera cifra; si es necesario se suma la parte proporcional que corresponde a la cuarta cifra, que se encuentra sobre el mismo renglón en el cruce con la columna correspondiente.

EJEMPLOS

1 Determina el antilogaritmo de: 2.5469.

Solución

Característica = 2, entonces el número tiene 2 + 1 = 3 cifras enteras.

Mantisa:

N	0	1	2	3	4.................**6**.................... 9	1............**9**
≈	≈	≈	≈	≈	≈ ≈ ≈	≈ ≈ ≈
.54	3467	3475	3483	3491	3499...........**3516**...........3540	1............**7**

El resultado de la mantisa se obtiene de sumar el 3516 y la parte proporcional que es 7 obteniendo 3523. Por tanto, el resultado es:

$$\text{antilog } 2.5469 = 352.3$$

2 Obtén el antilogaritmo de: 3.4237.

Solución

Característica = 3 + 1 = 4

Mantisa:

N	0	1	2	**3**	4 9	1 .....**7**.....9
≈	≈	≈	≈	≈	≈ ≈	≈ ≈ ≈
.42	2630	2636	2642	**2649**	2655 2685	1 .....**4**.....6

Mantisa = 2649 + 4 = 2653

Finalmente, antilog 3.4237 = 2653

3 Obtén el antilogaritmo de: $\bar{2}.0401$.

Como la característica del logaritmo de referencia es $\bar{2}$ la primera cifra significativa debe ocupar el segundo lugar a la derecha del punto decimal; en consecuencia, se debe poner un cero entre dicha cifra y el punto decimal.

Característica = −2 + 1 = −1

Mantisa:

N	**0**	1	2	3	4 9	**1**............9
≈	≈	≈	≈	≈	≈ ≈	≈ ≈ ≈
.04	**1096**	1099	1102	1104	1107..............................1119	**0**............2

Por tanto:

$$\text{antilog } \bar{2}.0401 = 0.01096$$

EJERCICIO 74

Mediante las tablas de antilogaritmos calcula el valor de *N*:

1. $\log N = 1.8674$
2. $\log N = 3.8046$
3. $\log N = 1.4950$
4. $\log N = 2.4683$
5. $\log N = 0.5611$
6. $\log N = 0.7322$
7. $\log N = 0.0065$
8. $\log N = 2.6545$
9. $\log N = 0.4718$
10. $\log N = 3.0017$
11. $\log N = 3.5766$
12. $\log N = \bar{2}.2618$
13. $\log N = \bar{1}.4022$
14. $\log N = \bar{4}.7163$
15. $\log N = \bar{1}.6310$
16. $\log N = \bar{2}.7047$
17. $\log N = \bar{3}.7514$
18. $\log N = \bar{2}.034$
19. $\log N = \bar{1}.7949$
20. $\log N = \bar{4}.10$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b M^n = n \log_b M$ $\quad M > 0$
4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_b M$ $\quad M > 0$
5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$ $\quad M > 0$ y $N > 0$
6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$ $\quad M > 0$ y $N > 0$
7. $\log_e M = \ln(M)$, ln = logaritmo natural, $e = 2.718\ldots$

Nota: $\log_b (M + N) \neq \log_b M + \log_b N$ $\quad \log_b\left(\frac{M}{N}\right) \neq \frac{\log_b M}{\log_b N}$

Las propiedades de los logaritmos se utlizan para resolver operaciones aritméticas, como se muestra en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor aproximado de: $N = (5.130)\,(3.134)$.

Solución

Se aplican logaritmos a ambos miembros de la igualdad,

$$\log N = \log\,(5.130)(3.134)$$

Se aplican las propiedades de los logaritmos:

$$\log N = \log\,(5.130) + \log\,(3.134) = 0.7101 + 0.4961 \qquad \text{(propiedad 5)}$$
$$\log N = 1.2062$$

Se despeja "N",

$$N = \text{antilog } 1.2062$$

Entonces, $N = 16.08$

2 Calcula el valor aproximado de: $N = \sqrt[3]{71.47}$.

Solución

$$\log N = \log \sqrt[3]{71.47}$$
$$\log N = \frac{1}{3}\log\,(71.47) = \frac{1}{3}(1.8541) = 0.6180 \qquad \text{(propiedad 4)}$$
$$N = \text{antilog } 0.6180$$

Por tanto, $N = 4.150$

3 Halla el valor aproximado de: $M = \dfrac{7.65}{39.14}$.

Solución

$$\log M = \log \frac{7.65}{39.14}$$
$$\log M = \log\,(7.65) - \log\,(39.14) = 0.8837 - 1.5926 \qquad \text{(propiedad 6)}$$
$$\log M = -0.7089 = -1 + (1 - 0.7089) = -1 + 0.2911 = \bar{1}.2911$$
$$M = \text{antilog } \bar{1}.2911$$

Entonces, $M = 0.1954$

4 Halla el valor aproximado de: $R = (18.65)^4$.

Solución

$$\log R = 4 \log\,(18.65) \qquad \text{(propiedad 3)}$$
$$\log R = 4(1.2707) = 5.0828$$
$$R = \text{antilog } 5.0828$$

Finalmente, $R = 121\,000$

Otras aplicaciones de las propiedades de los logaritmos se ilustran en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

5 Si $\log 5 = 0.6989$ y $\log 7 = 0.8450$, encontrar el valor de $\log 35$.

Solución

Se expresa 35 como: $35 = (5)(7)$

Se aplica la propiedad de los logaritmos y se obtiene el resultado:

$$\begin{aligned}\log 35 &= \log (5)(7)\\ &= \log 5 + \log 7\\ &= 0.6989 + 0.8450 = 1.5439\end{aligned}$$

Por consiguiente, el resultado es 1.5439

6 ¿Cuál es el resultado de $\log 12$, si $\log 2 = 0.3010$ y $\log 3 = 0.4771$?

Solución

Se expresa 12 como:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

Al aplicar las propiedades de los logaritmos y efectuar las operaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}\log 12 &= \log 2^2 \cdot 3\\ &= \log 2^2 + \log 3\\ &= 2\log 2 + \log 3\\ &= 2(0.3010) + 0.4771\\ &= 0.6020 + 0.4771\\ &= 1.0791\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\log 12 = 1.0791$

7 Halla el resultado de $\log \sqrt{2.5}$ si $\log 2 = 0.3010$ y $\log 5 = 0.6989$.

Solución

Se expresa el logaritmo del número de la siguiente manera:

$$\log \sqrt{2.5} = \log \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se aplican las propiedades correspondientes y se obtiene el resultado.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}(\log 5 - \log 2)\\ &= \frac{1}{2}(0.6989 - 0.3010)\\ &= \frac{1}{2}(0.3979)\\ &= 0.19895\end{aligned}$$

El resultado del logaritmo es 0.19895

EJERCICIO 75

Utiliza las propiedades y las tablas de los logaritmos que se encuentran al final del libro, para obtener el valor aproximado de las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{9\,985}$
2. $\sqrt[3]{874.2}$
3. $\sqrt[4]{2\,893\,000}$
4. $\sqrt{42.87}$
5. $\sqrt[3]{51\,190}$
6. $\sqrt[4]{0.06349}$
7. $\sqrt[3]{0.06349}$
8. $\sqrt{6.248}$
9. $\sqrt[3]{0.4285}$
10. $(9.45)(0.536)(0.714)$
11. $(-88.5)(0.1123)(10.5)$
12. $\frac{-382.1}{543}$
13. $\frac{(286.5)(4.714)}{-67.84}$
14. $\frac{143}{(-5.13)(7.62)}$
15. $\sqrt[4]{596}$
16. $(3.271)^5$
17. $\left(\frac{53.21}{8.164}\right)^3$
18. $\sqrt[3]{375 \times 83.9}$
19. $\sqrt[4]{4\,096}$
20. $\sqrt[3]{\frac{9\,604}{3.5}}$
21. $\sqrt{\frac{(675)(3.151)}{(65.34)}}$
22. $\sqrt[3]{\frac{(34)^2 \times 52.1}{543}}$
23. $\left[\frac{(6.53)(81.51)}{\sqrt[3]{8\,015}}\right]^2$

Si log 2 = 0.3010, log 3 = 0.4771, log 5 = 0.6989 y log 7 = 0.8450, calcula los siguientes logaritmos:

24. log 14
25. log 15
26. log 30
27. log 42
28. log 105
29. log 20
30. log 36
31. log 150
32. log 294
33. log 343
34. log 7.5
35. log 4.2
36. $\log \sqrt[6]{28}$
37. $\log \sqrt[3]{350}$
38. $\log \sqrt[5]{11.2}$
39. $\log \sqrt{52.5}$
40. $\log \sqrt[3]{\frac{14}{15}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cambios de base

Si se conoce el logaritmo base b de un número, se puede hallar el logaritmo en otra base a con la fórmula:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración:

Sea $\log_b N = x$, entonces mediante la definición, se obtiene:

$$N = b^x$$

Al aplicar logaritmo base a, en ambos miembros de la igualdad:

$$\log_a N = \log_a b^x$$

por la propiedad 3,

$$\log_a N = x \log_a b$$

al dividir ambos miembros por $\log_a b$,

$$x = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Se obtiene:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa utilizando logaritmos en base 4, $\log_2 32$.

Solución

Del logaritmo se tiene que:

$$N = 32,\ b = 2,\ a = 4$$

Al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$\log_2 32 = \frac{\log_4 32}{\log_4 2}$$

2 Halla el valor de $\log_7 343$, transformando a base 10.

Solución

De la expresión $\log_7 343$ se tiene que:

$$b = 7,\ N = 343 \text{ y } a = 10$$

Al sustituir en la fórmula,

$$\log_7 343 = \frac{\log 343}{\log 7} = \frac{2.5353}{0.8451} = 3$$

Finalmente, $\log_7 343 = 3$

3 Encuentra el $\log_8 326$.

Solución

Se realiza el cambio a base 10,

$$\log_8 326 = \frac{\log 326}{\log 8} = \frac{2.5132}{0.9031} = 2.7828$$

Finalmente, $\log_8 326 = 2.7828$

4 Encuentra el valor de: $\log_2 354.1$.

Solución

Se aplica un cambio a base 10,

$$\log_2 354.1 = \frac{\log 354.1}{\log 2} = \frac{2.5491}{0.3010} = 8.4687$$

Por tanto, $\log_2 354.1 = 8.4687$

5 Encuentra el valor de: $\log_3 2\,526$.

Solución

Se aplica un cambio a base 10,

$$\log_3 2\,526 = \frac{\log 2\,526}{\log 3} = \frac{3.4024}{0.4771} = 7.1314$$

Por consiguiente, $\log_3 2\,526 = 7.1314$

EJERCICIO 76

Encuentra el valor de los siguientes logaritmos:

1. $\log_6 31$
2. $\log_9 10.81$
3. $\log_5 3.625$
4. $\log_{12} 643.3$
5. $\log_8 1.86$
6. $\log_{20} 124$
7. $\log_{13} 7.32$
8. $\log_{15} 21.7$
9. $\log_3 8.642$
10. $\log_2 8\,435$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Capítulo 8

Razones y proporciones

Reseña HISTÓRICA



La Teoría de proporciones (Libros V a VI)

En la obra de Euclides *Los elementos*, los Libros V y VI tratan de la proporcionalidad y la semejanza de acuerdo con los fundamentos propuestos por Eudoxo.

El Libro V da 18 definiciones y 25 proposiciones, expone la teoría general de la proporcionalidad, independiente de la naturaleza de las cantidades proporcionales. Le ocurre otro tanto que al Libro II con relación a su sustitución actual por las reglas correspondientes del álgebra simbólica.

Una vez desarrollada la Teoría de proporciones en el Libro V, Euclides la aplica en el Libro VI, da 5 definiciones y 33 proposiciones, para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan al estudiar triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes.

Eudoxo de Cnidos
(en torno a 400-347 a. C.)

Cantidades proporcionales

Si se tienen 2 cantidades tales que al multiplicar una de ellas por un número la otra queda multiplicada por el mismo número, o al dividir una de ellas la otra queda dividida por el mismo número, se dice que las cantidades son directamente proporcionales.

Ejemplos

Si 18 lápices cuestan \$28, entonces 54 lápices costarán el triple, es decir, \$84; al multiplicar el número de lápices por 3 el costo también quedó multiplicado por 3. Por lo tanto, las cantidades son directamente proporcionales.

Un automóvil recorre 360 km en 4 horas a velocidad constante; entonces, en 2 horas recorrerá la mitad, esto es 180 km, ambas cantidades quedaron divididas por 2, entonces se dice que son directamente proporcionales.

Si se tienen 2 cantidades tales que al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número y viceversa, entonces, las cantidades se dice que son inversamente proporcionales.

Ejemplo

Si 18 hombres construyen una barda en 12 días, entonces 6 hombres construirán la misma barda en el triple de tiempo, es decir, 36 días. Al dividir el número de hombres por 3, el número de días quedó multiplicado por 3, por consiguiente las cantidades son inversamente proporcionales.

Razón. Es el cociente entre 2 cantidades, donde el numerador recibe el nombre de antecedente y el denominador de consecuente.

Para las cantidades a, b en la razón $\frac{a}{b}$ o $a:b$ con $b \neq 0$, a recibe el nombre de antecedente y b el de consecuente.

Ejemplos

En la razón $\frac{7}{4}$, 7 es el antecedente y 4 es el consecuente.

En la razón $2:3$ (se lee 2 es a 3), 2 es el antecedente y 3 es el consecuente.

Razón de proporcionalidad. Si a y b son 2 cantidades directamente proporcionales, la razón $\frac{a}{b}$ recibe el nombre de razón de proporcionalidad, la cual siempre es constante.

Ejemplo

Si 18 libros de ciencia cuestan \$1260, la razón de proporcionalidad es de 70, ya que $\frac{1260}{18} = 70$.

Proporción

Es la igualdad entre 2 razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ o bien } a:b::c:d \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

La expresión se lee a es a b como c es a d, a y d son los extremos, b y c son los medios.

Ejemplo

3 es a 6 como 8 es a 16, se escribe $\frac{3}{6} = \frac{8}{16}$.

Al simplificar cada fracción se obtiene $\frac{1}{2}$, la razón de proporcionalidad.

En una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } a \cdot d = b \cdot c \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

Ejemplo

Para la proporción $\frac{5}{4}=\frac{20}{16}$ se tiene que $(5)(16)=(4)(20)=80$.

En una proporción un extremo es igual al producto de los medios dividido por el extremo restante, es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ entonces } a=\frac{b\cdot c}{d} \text{ o } d=\frac{b\cdot c}{a}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la proporción $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ se tiene que $2=\frac{(3)(10)}{15}$ y $15=\frac{(3)(10)}{2}$.

2 Halla el valor de m en la siguiente proporción $\frac{m}{5}=\frac{24}{30}$.

Solución

m es un extremo en la proporción, entonces:

$$m=\frac{(5)(24)}{30}=\frac{120}{30}=4$$

Por tanto, $m=4$

3 ¿Cuál es el valor de b en la siguiente proporción $\frac{7}{2}=\frac{10}{b}$?

Solución

b es uno de los extremos en la proporción, por lo tanto:

$$b=\frac{(2)(10)}{7}=\frac{20}{7}$$

Por consiguiente, $b=\frac{20}{7}$

En una proporción un medio es igual al producto de los extremos dividido por el medio restante, es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ entonces } b=\frac{a\cdot d}{c} \text{ o } c=\frac{a\cdot d}{b}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la proporción $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$, se tiene que:

$$7=\frac{(2)(21)}{6} \text{ y } 6=\frac{(2)(21)}{7}$$

2 ¿Cuál es el valor de c en la proporción $\frac{5}{4}=\frac{c}{28}$?

Solución

c es un medio de la proporción, entonces:

$$c=\frac{(5)(28)}{4}=\frac{140}{4}=35$$

Por tanto, $c=35$

EJERCICIO 77

Determina el valor del elemento que falta en cada una de las siguientes proporciones:

1. $\frac{3}{4}=\frac{x}{8}$
2. $\frac{2}{n}=\frac{8}{32}$
3. $\frac{4}{5}=\frac{12}{m}$
4. $\frac{a}{5}=\frac{6}{15}$
5. $\frac{20}{x}=\frac{6}{15}$
6. $\frac{7}{14}=\frac{y}{10}$
7. $\frac{x}{4}=\frac{6}{2}$
8. $\frac{2}{3}=\frac{12}{n}$
9. $\frac{7}{8}=\frac{56}{p}$
10. $\frac{x}{8}=\frac{9}{12}$
11. $\frac{3}{7}=\frac{z}{28}$
12. $\frac{y}{5}=\frac{8}{20}$
13. $\frac{3}{9}=\frac{x}{27}$
14. $\frac{x}{100}=\frac{150}{75}$
15. $\frac{15}{70}=\frac{30}{x}$
16. $\frac{5}{m}=\frac{15}{9}$
17. $\frac{3}{5}=\frac{12}{m}$
18. $\frac{90}{x}=\frac{15}{85}$
19. $\frac{8}{a}=\frac{16}{12}$
20. $\frac{4}{12}=\frac{x}{3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Media proporcional (media geométrica)

A una proporción de la forma:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \quad b \neq 0,\ c \neq 0$$

Se le llama proporción geométrica y se dice que b es media proporcional (geométrica) entre a y c. La media proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

EJEMPLOS

1 En la proporción $\frac{4}{8}=\frac{8}{16}$, se tiene que:

$$\sqrt{(4)(16)}=\sqrt{64}=8$$

2 Calcula el valor de m en la proporción $\frac{9}{m}=\frac{m}{4}$.

Solución

m es la media proporcional de 9 y 4, entonces:

$$m=\sqrt{(9)(4)}=\sqrt{36}=6$$

Por tanto, $m=6$

3 ¿Cuál es la media proporcional entre 4 y 6?

Solución

La proporción es $\frac{4}{b}=\frac{b}{6}$ donde b es la media proporcional, por lo tanto:

$$b=\sqrt{(4)(6)}=\sqrt{24}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3}=2\sqrt{2\cdot 3}=2\sqrt{6}$$

Por consiguiente, la media proporcional entre 4 y 6 es $2\sqrt{6}$

4 ¿Encuentra la media geométrica entre 0.375 y 0.5.

Solución

Se convierten las fracciones decimales a fracción común.

$$0.375 = \frac{3}{8},\ 0.5 = \frac{1}{2}$$

Se halla la media proporcional c en:

$$\frac{\frac{3}{8}}{c} = \frac{c}{\frac{1}{2}} \text{ de donde } c = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

Por tanto, la media proporcional entre 0.375 y 0.5 es $\frac{1}{4}\sqrt{3}$

EJERCICIO 78

Encuentra la media proporcional (geométrica) entre los números dados:

1. 12 y 3
2. 6 y 24
3. 9 y 25
4. 4 y 12
5. 2 y 7
6. 9 y 18
7. 10 y 25
8. 0.1 y 0.5
9. 0.2 y 0.8
10. 0.8 y 1.6

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cuarta proporcional

Se le llama cuarta proporcional a cualquiera de los 4 términos en una proporción.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Una cuarta proporcional de 6, 4 y 3?

Solución

Se forma la proporción $\frac{6}{4} = \frac{3}{x}$ tomando a x como el último extremo.

El extremo es igual al producto de los medios dividido por el extremo restante.

$$x = \frac{(4)(3)}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Por tanto, una cuarta proporcional de 6, 4 y 3 es 2

2 ¿Una cuarta proporcional de $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$?

Solución

Se realiza la operación:

$$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{10}}{x} \text{ donde } x = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{10}\right)}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

Por consiguiente, una cuarta proporcional de $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$ es $\frac{1}{25}$

EJERCICIO 79

Encuentra la cuarta proporcional de los siguientes números:

1. 2, 5 y 15
2. 6, 8 y 24
3. 2, 5 y 14
4. 4, 3 y 32
5. 7, 5 y 63
6. 2, 4 y 5
7. 3, 6 y 8
8. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$
9. $\frac{5}{4}, \frac{7}{2}$ y $\frac{1}{4}$
10. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{2}$
11. $\frac{2}{5}, \frac{4}{3}$ y $\frac{1}{3}$
12. $\frac{3}{7}, \frac{5}{2}$ y $\frac{1}{4}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Tercera proporcional

Se llama así a cualquiera de los extremos de una proporción geométrica, es decir,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} \text{ con } b \neq 0, d \neq 0$$

a es tercera proporcional entre *b* y *d*, en su defecto *d* es tercera proporcional entre *a* y *b*.

EJEMPLOS

1. Determina una tercera proporcional entre 4 y 12.

Solución

Se forma una proporción al tomar como medio a uno de los números dados y como último extremo a x

$$\frac{4}{12} = \frac{12}{x} \text{ entonces } x = \frac{(12)(12)}{4} = \frac{144}{4} = 36$$

Por tanto, una tercera proporcional es 36
Ahora, si se toma como medio el 4, entonces la proporción queda:

$$\frac{12}{4} = \frac{4}{x} \text{ entonces } x = \frac{(4)(4)}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Finalmente, otra tercera proporcional es $\frac{4}{3}$

EJERCICIO 80

Calcula una tercera proporcional.

1. 18 y 6
2. 24 y 4
3. 8 y 4
4. 18 y 9
5. 54 y 18
6. $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{6}$
7. $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$
8. $\frac{5}{9}$ y $\frac{1}{18}$
9. $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{2}$
10. 9 y $\frac{3}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Regla de tres simple

Es la operación que se utiliza para encontrar el cuarto término en una proporción. A la parte que contiene los datos conocidos se le llama *supuesto* y a la que contiene el dato no conocido se le llama *pregunta*.

Directa. Se utiliza cuando las cantidades son directamente proporcionales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si 12 discos compactos cuestan \$600, ¿cuánto costarán 18?

Solución

Supuesto: 12 discos cuestan \$600.
Pregunta: 18 discos cuestan *x*.

Las cantidades son directamente proporcionales, ya que al aumentar el número de discos el precio también se incrementa. Se forma una proporción entre las razones del supuesto y la pregunta.

$$\frac{12}{18}=\frac{600}{x} \text{ donde } x=\frac{(600)(18)}{12}=\frac{10\,800}{12}=900$$

Por tanto, 18 discos compactos cuestan \$900

2 Una llave que se abre 4 horas diarias durante 5 días, vierte 5 200 litros de agua, ¿cuántos litros vertirá en 12 días si se abre 4 horas por día?

Solución

Se calcula el número de horas totales; es decir, en 5 días la llave ha estado abierta 20 horas y en 12 días la llave permaneció abierta 48 horas.

Supuesto: en 20 horas la llave ha vertido 5 200 litros.
Pregunta: en 48 horas la llave ha vertido *x* litros.

Las cantidades son directamente proporcionales, ya que al aumentar el número de horas también se incrementa el número de litros vertidos. Se forma una proporción entre las razones del supuesto y la pregunta.

$$\frac{20}{48}=\frac{5\,200}{x} \text{ donde } x=\frac{(5\,200)(48)}{20}=\frac{249\,600}{20}=12\,480$$

Por consiguiente, en 48 horas la llave vierte 12 480 litros.

Inversa. Se utiliza cuando las cantidades son inversamente proporcionales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Se ha planeado que una barda sea construida por 24 hombres en 18 días; sin embargo, sólo se logró contratar a 12 hombres, ¿en cuántos días la construirán?

Solución

Supuesto: 24 hombres construyen la barda en 18 días.
Pregunta: 12 hombres la construirán en *x* días.

Las cantidades son inversamente proporcionales, ya que al disminuir el número de hombres, los contratados tardarán más días en construirla.

Se forman las razones entre las cantidades.

Razón entre el número de hombres: $\frac{24}{12}$

Razón entre el número de días: $\frac{18}{x}$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se invierte cualquiera de las razones y se iguala con la otra, es decir:

$$\frac{x}{18}=\frac{24}{12} \text{ donde } x=\frac{(18)(24)}{12}=\frac{432}{12}=36$$

Por tanto, 12 hombres construyen la barda en 36 días.

2 Las ruedas traseras y delanteras de un automóvil tienen un diámetro de 1.5 m y 1 m, respectivamente, cuando las primeras han dado 350 vueltas, ¿cuántas han dado las segundas?

Solución

Supuesto: las ruedas traseras tienen un diámetro de 1.5 m y dan 350 vueltas.
Pregunta: las ruedas delanteras tienen un diámetro de 1 m y dan x vueltas.

Razón entre los diámetros: $\frac{1.5}{1}$

Razón entre el número de vueltas: $\frac{350}{x}$

Se invierte cualquiera de las razones y se iguala con la otra, es decir:

$$\frac{x}{350}=\frac{1.5}{1} \text{ donde } x=\frac{(350)(1.5)}{1}=\frac{525}{1}=525$$

Por consiguiente, las delanteras dan 525 vueltas.

EJERCICIO **81**

Resuelve los siguientes problemas:

1. El precio de 25 latas de aceite es de $248, ¿cuántas latas se podrán comprar con $1 240?
2. Liam escucha la radio durante 30 minutos, lapso en el que hay 7 minutos de anuncios comerciales; si escucha la radio durante 120 minutos, ¿cuántos minutos de anuncios escuchará?
3. Durante 70 días de trabajo Ana ganó $3 500, ¿cuánto ganaría si trabajara 12 días más?
4. Una llave abierta 6 horas diarias durante 7 días arrojó 6 120 litros de agua, ¿cuántos litros arrojará durante 14 días si se abre 4 horas diarias?
5. Un automóvil gasta 9 litros de gasolina cada 120 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer?
6. En un libro de 80 páginas cada una tiene 35 líneas, ¿cuántas páginas tendrá el mismo libro si en cada una se colocan 40 líneas?
7. Una bodega se llena con 3 500 sacos de 6 kg de papas cada uno y otra de la misma capacidad se llena con sacos de 5 kg, ¿cuántos sacos caben en la segunda bodega?
8. Un leñador tarda 8 segundos en dividir en 4 partes un tronco de cierto tamaño, ¿cuánto tiempo tardará en dividir un tronco semejante en 5 partes?
9. Si un automóvil hizo 9 horas durante un recorrido de 750 kilómetros, ¿qué tiempo empleará en recorrer 2 250 kilómetros si su velocidad es constante?

10. Teresa tiene en su tienda varios sacos de harina de 18 kg y va a vender cada uno en $108, pero como nadie quiere comprar por saco decide venderla por kilo. Su primer cliente le pidió 4 kg, ahora ella quiere saber cuánto debe cobrarle.

11. Don Arturo tiene una pastelería y sabe que para hacer un pastel de fresas para 8 personas utiliza 2 kg de azúcar, ¿qué cantidad de azúcar utilizará si le encargan un pastel, también de fresas, que alcance para 24 personas?

12. Ana, Fabián y Liam han ido a comprar discos compactos; Ana compró 2 de música grupera; Fabián 3 de rock alternativo y Liam compró 5 de heavy metal. Si en total se pagaron $1 620 y todos cuestan lo mismo, ¿cuánto deberá pagar cada uno?

13. El valor de 25 m^2 de azulejo es de $3 125. ¿Cuántos m^2 se comprarán con $15 625?

14. Si 9 tarros tienen un precio de $450, ¿cuántos tarros se comprarán con $ 7 200?

15. Se compraron 40 kg de dulces para repartirlos equitativamente entre 120 niños. ¿Cuántos kilogramos se necesitarán para un grupo de 90 pequeños?

16. Un albañil gana $1 500 mensuales. ¿Cuánto recibe por 20 días?

17. Fernando, Josué y Martín cobraron por resolver una guía de problemas de cálculo de varias variables $975; Fernando trabajó 6 horas, Josué 4 horas y Martín 3 horas, ¿cuánto recibirá cada uno por hora de trabajo?

18. Un microbús cobra a una persona $17.50 de pasaje por una distancia de 21 kilómetros, ¿cuánto pagará otra persona, cuyo destino está a 51 kilómetros de distancia?

19. Una piscina se llena en 10 horas con una llave que arroja 120 litros de agua por minuto, ¿cuántos minutos tardará para llenarse si esta llave arrojara 80 litros del líquido?

20. Un grupo de 45 estudiantes de CONAMAT contrata un autobús para ir a un evento y calculan que cada uno debe pagar $50; finalmente sólo asisten 30 estudiantes, ¿cuánto deberá pagar cada uno?

21. Si 18 metros de alambre cuestan $63, ¿cuál será el precio de 42 m?

22. Si una docena de pañuelos cuesta $200, ¿cuánto se pagará por 9 de ellos?

23. Una decena de canicas cuesta $18, ¿cuántas podrá comprar un niño con $5.40?

24. Un automóvil recorre 240 kilómetros con 60 litros de gasolina. ¿Cuántos litros necesita para recorrer 320 kilómetros?

25. Si 3 decenas de pares de zapatos cuestan $18 000, ¿cuál será el precio de 25 pares?

26. Si 15 hombres hacen una obra de construcción en 60 días, ¿cuánto tiempo emplearán 20 hombres para realizar la misma obra?

27. Si 4 hombres terminan un trabajo en 63 días, ¿cuántos más deben de añadirse a los primeros para concluir el mismo trabajo en 28 días?

28. Un ciclista recorrió cierta distancia en 4 horas con una velocidad de 60 km/h, ¿qué velocidad deberá llevar para recorrer la misma distancia en 5 horas?

29. Si se llenan 24 frascos con capacidad para 250 gramos, con mermelada de fresa, ¿cuántos frascos de 300 gramos se pueden llenar con la misma cantidad de mermelada?

30. Un ejército de 900 hombres tiene víveres para 20 días; si se desea que las provisiones duren 10 días más, ¿cuántos hombres habrá que dar de baja?

31. Se desea plantar árboles dispuestos en 30 filas, de modo que cada fila tenga 24 de éstos. Si se colocan los mismos árboles en 18 filas, ¿cuántos se tendrán por fila?

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Regla de tres compuesta

Se utiliza cuando se tienen más de 4 cantidades directa o inversamente proporcionales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una guardería con 250 niños proporciona 4 raciones de alimentos diarios a cada pequeño durante 18 días. Si la población aumenta a 50 niños, ¿cuántos días durarán los alimentos si se disminuyen a 3 raciones diarias?

Solución

Se forman las razones entre las cantidades.
A más niños los alimentos duran menos días, por tanto la proporción es inversa.
A menos raciones los alimentos duran más días, por tanto la proporción es inversa.

250 niños	4 raciones	18 días
300 niños	3 raciones	x días
Inversa	**Inversa**	

Las razones $\frac{250}{300}$ y $\frac{4}{3}$ se invierten y multiplican, la razón $\frac{18}{x}$ se iguala con el producto.

$$\left(\frac{300}{250}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{18}{x}$$

Entonces, $x=\frac{(18)(250)(4)}{(300)(3)}=\frac{18\,000}{900}=20$

Por tanto, los alimentos durarán 20 días.

2 15 cajas de aceite con 18 galones cuestan \$960, ¿cuánto cuestan 9 cajas con 20 galones?

Solución

Se forman las razones entre las cantidades.
Si el número de cajas disminuye el precio disminuye, por tanto es una proporción directa.
Si el número de galones aumenta el precio aumenta, por tanto es una proporción directa.

15 cajas	18 galones	\$960
9 cajas	20 galones	x
Directa	**Directa**	

Las razones $\frac{15}{9}$ y $\frac{18}{20}$ se multiplican sin invertir porque son directas y la razón $\frac{960}{x}$ se iguala con el producto.

$$\left(\frac{15}{9}\right)\left(\frac{18}{20}\right)=\frac{960}{x}$$

Entonces, $x=\frac{(960)(9)(20)}{(15)(18)}=\frac{172\,800}{270}=640$

Por consiguiente, 9 cajas de 20 galones cuestan \$640

3 Se calcula que para construir una barda de 600 m en 18 días, trabajando 8 horas diarias, se necesitan 12 hombres, ¿cuántos días tardarán 8 hombres trabajando 6 horas diarias para construir una barda de 400 m?

Solución

Se forman las razones entre las cantidades.

12 hombres	8 horas	600 m	18 días
8 hombres	6 horas	400 m	x días
Inversa	**Inversa**	**Directa**	

$$\left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{600}{400}\right)=\frac{18}{x}$$

Donde $x=\dfrac{(18)(12)(8)(400)}{(8)(6)(600)}=\dfrac{691200}{28800}=24$

Por tanto, 8 hombres tardarán 24 días trabajando 6 horas diarias.

EJERCICIO 82

Resuelve los siguientes problemas:

1. Andrea lee un libro de 500 páginas en 20 días y lee 1 hora diaria, ¿cuántos minutos debe leer diariamente para que en condiciones iguales lea un libro de 800 páginas en 15 días?
2. El padre de Alejandro contrató a 15 obreros que, al trabajar 40 días durante 10 horas diarias, construyeron en su casa una alberca con capacidad para 80 000 litros de agua; si Alejandro contrata a 10 de esos obreros para que trabajen 6 horas diarias y construyan otra alberca con capacidad para 40 000 litros de agua, ¿cuántos días tardarán en construirla?
3. Una fábrica proporciona botas a sus obreros, si 4 obreros gastan 6 pares de botas en 120 días, ¿cuántos pares de botas gastarán 40 obreros en 300 días?
4. La tripulación de un barco la forman el capitán, 5 ayudantes y 6 investigadores. El capitán programa las raciones de agua a razón de 8 litros diarios para toda la tripulación en un viaje de 6 días, pero a la hora de zarpar 2 de los investigadores deciden quedarse. Debido a esto se decide que el viaje dure 2 días más, ¿cuál debe ser la ración diaria de agua?
5. Si 24 motocicletas repartidoras de pizzas gastan $27 360 en gasolina durante 30 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuánto dinero se deberá pagar por concepto de gasolina para 18 motocicletas que trabajan 10 horas diarias durante 6 meses? (Considera meses de 30 días).

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Tanto por ciento

El tanto por ciento de una cantidad es el número de partes que se toman, de las cien en las que se divide dicha cantidad. Se representa con el símbolo % o en forma de fracción.

Ejemplo

El 8% de 48, equivale a tomar 8 centésimas $\left(\frac{8}{100}=0.08\right)$ de 48, es decir, se divide 48 en 100 partes y se toman 8.

EJERCICIO 83

Representa en forma decimal los siguientes por cientos:

1. 3%	4. 8%	7. 5%	10. 50%	13. 4.5%
2. 4%	5. 15%	8. 25%	11. 75%	14. 0.08%
3. 6%	6. 1%	9. 30%	12. 32%	15. 0.03%

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para obtener un tanto por ciento se construye una regla de tres simple.

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es el 25% de 150?

Solución

Se forma la regla de tres:

Supuesto: 100% es a 150
Pregunta: 25% es a x.

$$\frac{100}{25}=\frac{150}{x} \text{ donde } x=\frac{(150)(25)}{100}=\frac{3\,750}{100}=37.5$$

Por consiguiente, 37.5 es el 25% de 150

2 Calcula el 12% de 1 500.

Solución

Otra forma de obtener un porcentaje es hallar la fracción decimal $\frac{12}{100}=0.12$ y multiplicarla por 1 500, es decir:

$$(0.12)(1500)=180$$

Entonces, 180 es el 12% de 1 500

3 Obtén el $\frac{2}{3}$% de 2 400.

Solución

Se forma la regla de tres:

Supuesto: 100% es a 2 400

Pregunta: $\frac{2}{3}$% es a x.

$$\frac{100}{\frac{2}{3}}=\frac{2\,400}{x} \text{ donde } x=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)(2\,400)}{100}=\frac{1600}{100}=16$$

Entonces, 16 representa el $\frac{2}{3}$% de 2 400

EJERCICIO 84

Calcula los siguientes porcentajes:

1. 6% de 300
2. 8% de 1 250
3. 35% de 715
4. 3.5% de 150
5. $\frac{1}{5}$% de 385
6. 3% de 50
7. 35% de 4 500
8. 75% de 30
9. 12% de 3 856
10. $\frac{1}{2}$% de 8 750
11. 4% de 120
12. 25% de 5 000
13. 48% de 6 520
14. 9.8% de 2 857
15. $\frac{19}{6}$% de 1 958
16. 5% de 163
17. 50% de 2 800
18. 28% de 5 848
19. 20.3% de 372
20. $\frac{12}{5}$% de 345

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Para obtener el 100% de una cantidad, se emplea una regla de tres.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿De qué número 480 es el 30%?

Solución

Se quiere encontrar el 100%

Supuesto: 30% es a 480
Pregunta: 100% es a x.

Se forma la proporción.

$$\frac{30}{100}=\frac{480}{x} \text{ entonces } x=\frac{(480)(100)}{30}=\frac{48\,000}{30}=1\,600$$

Por consiguiente, 480 es el 30% de 1 600

EJERCICIO 85

Encuentra el número del que:

1. 200 es el 4%
2. 1 585 es el 20%
3. 2 850 es el 30%
4. 125 es el 8%
5. 1 285 es el 80%
6. 213.75 es el 7.5%
7. 300 es el 5%
8. 1 485 es el 75%
9. 748.25 es el 20.5%

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para que obtengas el porcentaje que representa un número de otro, observa los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Qué porcentaje de 985 representa 443.25?

Solución

Se establecen las proporciones:

Supuesto: 100% es a 985
Pregunta: x es a 443.25

$$\frac{100}{x}=\frac{985}{443.25} \text{ entonces } x=\frac{(100)(443.25)}{985}=\frac{44\,325}{985}=45$$

Por tanto, 443.25 es el 45% de 985

2 ¿Qué porcentaje de 6 000 es 1 200?

Solución

Se establecen las proporciones:

Supuesto: 100% es a 6 000
Pregunta: x es a 1 200

$$\frac{100}{x}=\frac{6\,000}{1200} \text{ entonces } x=\frac{(100)(1200)}{6\,000}=\frac{120\,000}{6\,000}=20$$

Por tanto, 1 200 es el 20% de 6 000

EJERCICIO 86

Calcula el porcentaje que representa:

1. 54 de 270
2. 180 de 600
3. 956 de 3 824
4. 13 618.5 de 32 425
5. 5 616 de 15 600
6. 6 720 de 28 000
7. 8 142 de 54 280
8. 6 128.22 de 36 000
9. 29 399.29 de 127 823
10. 54 000 de 160 000


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una tienda de aparatos electrónicos decide dar 30% de descuento en toda su mercancía; si el precio normal de un televisor es de $6 000, ¿cuánto se pagará en caja?

Solución

Se obtiene el 30% de $6 000

$$(0.30)(6\,000) = 1800$$

El resultado se resta de 6 000

$$6\,000 - 1\,800 = 4\,200$$

Otra forma de obtener el precio es:

Como hay un descuento del 30%, al comprar el televisor sólo se pagará en caja el 70% del precio normal, es decir:

$$\left(\frac{70}{100}\right)(6\,000) = (0.70)(6\,000) = 4\,200$$

Por tanto, el precio del televisor con el descuento será de $4 200

2 Un ganadero tiene 240 reses de las cuales 25% se enferma. De las reses enfermas sólo 5% sobrevive y 30% de las que no enfermaron se vendieron, ¿cuántas reses le quedaron al ganadero?

Solución

Se obtiene 25% de 240

$$(0.25)(240) = 60 \text{ reses enfermas}$$

$$240 - 60 = 180 \text{ reses no se enfermaron}$$

De las 60 reses enfermas sólo 5% sobreviven.

$$(0.05)(60) = 3 \text{ reses sobreviven}$$

El ganadero vende 30% de las 180 que no enfermaron.

$$(0.30)(180) = 54 \text{ reses vendidas}$$

Le quedan $180 - 54 = 126$

Por tanto, el ganadero tiene 126 + 3 = 129 reses.

3 Laura compró un refrigerador en $3 500, el precio incluía 30% de descuento, ¿cuál era el costo sin descuento?

Solución

3 500 representa 70% del precio normal, se calcula qué número representa 100%, es decir, se construye una regla de tres.

$$\frac{3500}{x}=\frac{70}{100}\text{ entonces, } x=\frac{(3500)(100)}{70}=\frac{350\,000}{70}=5\,000$$

Por consiguiente, $5 000 es el precio sin descuento.

4 Un estanque con capacidad para 600 litros contiene tres cuartas partes de agua, si se le agregan 100 litros más, ¿qué porcentaje del estanque está lleno?

Solución

Se obtienen las tres cuartas partes de 600

$$\left(\frac{3}{4}\right)(600)=\frac{1800}{4}=450$$

El estanque tenía 450 litros, al agregarle 100 litros más ahora contiene 550
Luego se divide 550 por 600 y el resultado se multiplica por 100

$$\left(\frac{550}{600}\right)(100)=\frac{55\,000}{600}=91.66$$

El estanque está lleno en 91.66% de su capacidad.

5 La casa de María está valuada en 25% más que la de Alejandro; si la de Alejandro tiene un precio de $600 000, ¿cuánto costará la de María?

Solución

Si la casa de María está valuada en 25% más, es decir, 100% + 25% = 125% de la de Alejandro, se construye una regla de tres.

$$\frac{600\,000}{x}=\frac{100}{125}\text{ entonces, } x=\frac{(600\,000)(125)}{100}=\frac{75\,000\,000}{100}=750\,000$$

Por tanto, la casa de María costará $750 000

6 Luis recibe un ultimátum por parte de la empresa donde trabaja, de que si vuelve a tener un retraso el siguiente mes cobrará 15% menos de su sueldo mensual, el cual asciende a $12 000, no obstante Luis faltó, ¿cuánto cobrará el siguiente mes?

Solución

Su sueldo será 15% menos, entonces Luis cobrará 85% de su salario, se construye una regla de tres:

$$\frac{12\,000}{x}=\frac{100}{85}\text{ entonces, } x=\frac{(12\,000)(85)}{100}=\frac{1020\,000}{100}=10\,200$$

Por tanto, Luis cobrará $10 200

7 Patricia le pidió un préstamo de $24 000 a un amigo y éste le dice que debe pagarle mensualmente 20% de la deuda. En 3 meses, ¿cuánto le habrá pagado?

Solución

Se obtiene 20% de 24 000

$$(0.20)(24\,000) = 4\,800 \text{ pagará por mes}$$

En 3 meses

$$(3)(4\,800) = 14\,400$$

Por consiguiente, Patricia después de 3 meses habrá pagado $14 400

8 En una caja hay 6 canicas azules, 5 rojas y 7 verdes, ¿cuál es el porcentaje de canicas azules?

Solución

El número total de canicas es 18, se construye la regla de tres:

Supuesto: 100% es a 18
Pregunta: x es a 6

Se forma la proporción.

$$\frac{100}{x} = \frac{18}{6} \text{ entonces } x = \frac{(6)(100)}{18} = \frac{600}{18} = 33.33$$

Entonces, en la caja hay 33.33% de canicas azules.

EJERCICIO 87

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un salón tiene capacidad para 80 alumnos, 20% se presenta puntualmente. ¿Cuántos estudiantes son impuntuales?
2. Una licuadora costó $500, pero al comprarla se hizo un descuento de 12% al cliente. ¿Cuál es el precio que se pagó?
3. El precio de una máquina de coser es de $3 500 y se pagó un enganche de 15%. ¿Cuánto se adeuda?
4. Se compró una guitarra de $12 500 al contado y se hizo un descuento de 8.5%. ¿Cuánto se pagó?
5. ¿Cuál es el enganche de un televisor que costó $5 500 si se pidió de anticipo 21% del precio?
6. Una persona vende una aspiradora en $851, venta por la que obtuvo una utilidad de 15% sobre el precio. ¿De cuánto fue su ganancia?
7. Una bicicleta de $6 800 se compró con un enganche de 12% y a pagar el saldo en 4 abonos mensuales. ¿De cuánto es cada pago?
8. Si un televisor cuesta $10 500 y se da un enganche de 8%, ¿cuánto se pagará en cada letra si el saldo es a cubrirse en 8 pagos?
9. Si Juan Carlos ganó 12% al vender una bicicleta que le costó $1 120, ¿en cuánto la vendió?
10. El valor de una casa es de $655 000 al contado, pero al venderla a plazos se le carga 25.5% de su precio. ¿Cuál es el costo final de la casa si se vende a plazos?
11. Javier pagó $2 550 por una consola de videojuegos, la cual tenía un descuento de 15%, ¿cuál era su precio sin descuento?
12. Antonio compró un reproductor de DVD en $2 125, el aparato tenía 20% de descuento; sin embargo, la persona que le cobró sólo le descontó 15%, ¿cuánto tenía que haber pagado Antonio?

13. Un equipo de baloncesto tuvo 29 derrotas durante 80 juegos, ¿cuál fue el porcentaje de victorias?
14. Alejandro contestó 90 de 120 preguntas de un examen. Si está seguro de haber contestado correctamente 70% de las 90, ¿cuántas preguntas de las restantes deberá contestar acertadamente para tener 70% del examen bien contestado?
15. Adrián compró un automóvil en \$120 000, el precio incluía entre seguro, impuestos y accesorios 25% más, ¿cuál era el precio del automóvil sin contar con seguro, impuestos y accesorios?
16. Paola compró una bicicleta de montaña en \$800, si el precio incluía una rebaja de 20%, ¿cuál era el precio normal de la bicicleta?
17. Jaime tiene una deuda de \$180 000, si 30% de esa cantidad se la debe a su hermano y el resto a su tío Alberto, ¿cuánto le debe a su tío?
18. Un fraccionamiento está dividido en lotes, arriba y en la parte inferior de un cerro. Un lote en la parte superior del cerro cuesta 15% menos que en la parte inferior, si el precio de este último es de \$224 000, ¿cuál es el costo de un lote en la parte superior?
19. Un proveedor compra cajas con aguacates en \$60 cada una y las vende con una ganancia de 60% por caja, ¿cuánto ganará si compra 80 cajas?
20. Para aprobar un examen de 60 reactivos, Mónica tiene que contestar correctamente 75% de éste, ¿cuál es el mínimo de preguntas que deberá contestar acertadamente para aprobarlo?
21. En una liga de futbol se juegan 49 partidos; si el equipo de Juan al final de la temporada tiene 20 victorias y 6 empates, ¿cuál es el porcentaje de derrotas?
22. Un contenedor de leche con capacidad para 800 litros está lleno en sus dos quintas partes, si se agregan 80 litros más, ¿qué porcentaje del contenedor se encuentra lleno?
23. En un partido de baloncesto, Ricardo encestó 4 tiros de 3 puntos, 6 de tiro libre y 8 de cualquier otra parte. Si en total hizo 40 tiros a la canasta, ¿cuál es el porcentaje de efectividad?
24. En un librero hay 8 libros de cálculo diferencial, 5 de cálculo integral, 6 de álgebra y 10 de geometría, ¿cuál es el porcentaje de libros de geometría?
25. Si en una escuela hay 320 alumnos, de los cuales 135 son mujeres, ¿cuál es el porcentaje de hombres?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Interés simple

Para analizar este tema, es necesario describir algunos conceptos:

Interés. Es la cantidad de dinero que se obtiene por prestar o invertir cierta cantidad de dinero. El interés simple es el que se obtiene al final de un periodo, el cual es constante durante el tiempo que el dinero se encuentra en préstamo o en inversión.

Tasa. Es el tanto por ciento que se cobra en uno o varios periodos.

Capital. Cantidad de dinero que se presta o invierte.

Fórmulas para determinar el interés simple

Supongamos que queremos prestar un capital C a una tasa de $r\%$ para que en 1 año obtengamos un capital I, entonces se obtiene el $r\%$ de C mediante una regla de tres, es decir:

Supuesto: 100% es a C
Pregunta: $r\%$ es a I

Se forma la proporción.

$$\frac{100}{r}=\frac{C}{I} \text{ entonces } I=\frac{C\cdot r}{100}$$

Como el interés ganado es constante, entonces, si queremos el interés I en t años, se tiene que:

$$I=\left(\frac{C\cdot r}{100}\right)(t)=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}$$

Si el tiempo es en meses, entonces el tiempo será: $\frac{t}{12}$, por lo tanto el interés será:

$$I=\left(\frac{C\cdot r}{100}\right)\left(\frac{t}{12}\right)=\frac{C\cdot r\cdot t}{1200}$$

Si el tiempo está representado en días, entonces el tiempo será: $\frac{t}{360}$, por consiguiente el interés será:

$$I=\left(\frac{C\cdot r}{100}\right)\left(\frac{t}{360}\right)=\frac{C\cdot r\cdot t}{36\,000}$$

En resumen, si se quiere obtener el interés simple I de un capital C a una tasa de r%, en cierto periodo, las fórmulas son:

Si el tiempo está en años	**Si el tiempo está en meses**	**Si el tiempo está en días**
$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}$	$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{1200}$	$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{36\,000}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el interés simple que se obtendrá en 10 años si se invierten $25 000 a una tasa de interés de 18%?

Solución

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
C = 25 000 r = 18% t = 10 años I =?	$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}$	$I=\frac{(25\,000)(18)(10)}{100}$ $I=\frac{4\,500\,000}{100}$ $I=45\,000$	I = 45 000

Por tanto, se obtendrán $45 000 de interés al cabo de 10 años.

2 Andrés pide un préstamo al banco de $240 000 con un interés de 32% anual, ¿qué interés le cobrarán en 8 meses?

Solución

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
C = 240 000 r = 32% t = 8 meses I =?	$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{1200}$	$I=\frac{(240\,000)(32)(8)}{1200}$ $I=\frac{61\,440\,000}{1200}$ $I=51\,200$	I = 51 200

Por consiguiente, el banco le cobrará a Andrés $51 200 por concepto de interés.

Fórmulas para el cálculo del capital, el tiempo y la tasa

Si el tiempo está en años

Capital	Tiempo	Tasa
$C=\dfrac{100\cdot I}{t\cdot r}$	$t=\dfrac{100\cdot I}{C\cdot r}$	$r=\dfrac{100\cdot I}{C\cdot t}$

Si el tiempo está en meses

Capital	Tiempo	Tasa
$C=\dfrac{1200\cdot I}{t\cdot r}$	$t=\dfrac{1200\cdot I}{C\cdot r}$	$r=\dfrac{1200\cdot I}{C\cdot t}$

Si el tiempo está en días

Capital	Tiempo	Tasa
$C=\dfrac{36\,000\cdot I}{t\cdot r}$	$t=\dfrac{36\,000\cdot I}{C\cdot r}$	$r=\dfrac{36\,000\cdot I}{C\cdot t}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Qué capital se debe invertir para obtener un interés de \$60 000 a una tasa de 10% en 6 años?

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
I = 60 000 r = 10% t = 6 años C =?	$C=\dfrac{100\cdot I}{t\cdot r}$	$C=\dfrac{(100)(60\,000)}{(6)(10)}$ $C=\dfrac{6\,000\,000}{60}$ $C=100\,000$	C = \$100 000

Por tanto, se deben invertir \$100 000

2 ¿Cuánto tiempo estuvo impuesto un capital de \$250 000 a 25% anual, si generó un interés de \$31 250 y se pagó antes del primer año?

Solución

Como se pagó antes de terminar el primer año, el tiempo está dado en meses.

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
C = 250 000 r = 25% I = 31 250 t =?	$t=\dfrac{1200\cdot I}{C\cdot r}$	$t=\dfrac{(1200)(31250)}{(250\,000)(25)}$ $t=\dfrac{37\,500\,000}{6\,250\,000}$ $t=6$	t = 6 meses

Por tanto, estuvo impuesto durante 6 meses.

3 ¿Cuál es la tasa de interés anual que un banco estableció a un capital de $300 000, si después de 10 años se obtuvieron intereses por $60 000?

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$C = 300\,000$ $t = 10$ años $I = 60\,000$ $r = ?$	$r = \frac{100 \cdot I}{C \cdot t}$	$r = \frac{(100)(60\,000)}{(300\,000)(10)}$ $r = \frac{6\,000\,000}{3\,000\,000}$ $r = 2$	$r = 2\%$

Entonces, la tasa de interés fue de 2%.

EJERCICIO 88

Resuelve los siguientes problemas:

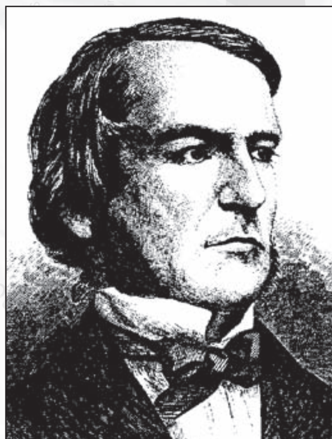
1. ¿Qué interés anual producirá un capital de $50 000 en 6 años a 11%?
2. ¿Qué interés por año producirá un capital de $380 000 en 5 años a 28%?
3. ¿Qué interés anual produce un capital de $220 000 en 8 años a 8%?
4. Determinar cuánto de intereses produce un capital de $56 800 en 3 años a 13.125% anual.
5. Calcular el interés que produce un capital de $480 000 a 6.3% anual en 2 años.
6. Una persona paga 14.5% anual de interés por un préstamo hipotecario de $385 000. ¿Cuánto tiene que pagar por concepto de intereses, si liquida su deuda al cabo de 10 años?
7. Víctor tiene ahorrados $280 000 en el Banco de Comercio. Si esta institución bancaria paga por concepto de intereses 6.2% anual, ¿qué interés ganará su capital a los 6 años?
8. Precisar el interés que produce un capital de $132 000 a 18.5% durante 8 meses.
9. ¿Qué interés producirá un capital de $12 857 en 16 meses a 21.5% anual?
10. Por un préstamo de $16 800 el padre de Carlos tiene que pagar 18% de interés anual. ¿Cuánto pagará durante 9 meses?
11. Un capital de $80 000 produce un interés de $12 000 al cabo de 5 años. ¿A qué tasa de interés anual se invirtió?
12. Calcular el interés que producen $50 000 a una tasa del 12.5% durante 4 años.
13. ¿Qué capital se debe invertir para obtener una ganancia de $24 000 a 12% de interés anual en 4 años?
14. ¿A qué tasa de interés anual quedó impuesto un capital de $48 000, si generó $12 000 de intereses en 10 meses?
15. ¿Cuánto tiempo estuvo impuesto un capital de $160 000 a 20% de interés anual, si generó $48 000 de intereses?
16. Si un capital de $980 000 generó $199 920 de intereses en 20 años, ¿cuál fue la tasa de interés a la que se impuso?
17. ¿Cuánto se debe invertir para que en 90 días un capital impuesto a 24% anual genere un interés de $27 000?

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Capítulo 9

Sistemas de numeración

Reseña HISTÓRICA



Sistema binario

George Boole fue un matemático inglés que en 1854 publicó *Las leyes del pensamiento*, las cuales sustentan las teorías matemáticas de la lógica y la probabilidad. Boole llevó a la lógica en una nueva dirección al reducirla a un álgebra simple, las matemáticas, así incorporó la lógica. Estableció la analogía entre los símbolos algebraicos y aquellos que representan las formas lógicas. Su álgebra consiste en un método para resolver problemas de lógica que recurre solamente a los valores binarios 1 y 0 y a tres operadores: AND (y), OR (o) y NOT (no). Comenzó el álgebra de la lógica llamada álgebra booleana, la cual ahora encuentra aplicación en la construcción de computadoras, circuitos eléctricos, etcétera.

Los sistemas de cómputo modernos trabajan a partir de la lógica binaria. Las computadoras representan valores mediante dos niveles de voltaje (generalmente 0 V y 5 V), con estos niveles podemos representar exactamente dos valores diferentes, que por conveniencia son cero y uno, los cuales representan apagado y encendido.

Sistemas de numeración antiguos

El hombre para contar empezó por utilizar su propio cuerpo: los dedos de la mano, los de los pies, los brazos, las piernas, el torso y la cabeza, las falanges y las articulaciones.

Mucho tiempo después, hacia 3300 a. C., apareció la representación escrita de los números, en paralelo al nacimiento de la escritura, en Sumeria (Mesopotamia). En las primeras tablillas de arcilla que han revelado la escritura, aparecen signos específicos destinados a representar los números.

En cada cultura se empleó una forma particular de representar los números. Por ejemplo, los babilonios usaban tablillas con varias marcas en forma de cuña y los egipcios usaban jeroglíficos, que aún aparecen en las paredes y columnas de los templos. Las cifras que hoy utilizamos tienen su origen en las culturas hindú y árabe.

George Boole (1815-1864)

Definición

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos (números) que se relacionan para expresar cantidades. A través de la historia del hombre aparecen varios sistemas de numeración, que dependen de la época o la cultura. Los sistemas de numeración se clasifican en posicionales y no posicionales.

Sistema posicional. Cada símbolo que se utiliza en este sistema se llama dígito, el número de dígitos corresponde al número de base, es fundamental la existencia del cero. Estos sistemas se basan en la posición que ocupa cada dígito (valor relativo) en el número, esto permite que se puedan representar números mayores a la base.

En los sistemas posicionales los números se representan con la siguiente fórmula:

$$N_{(B)} = A_n \cdot B^n + A_{n-1} \cdot B^{n-1} + ... + A_1 \cdot B^1 + A_0 \cdot B^0 + A_{-1} \cdot B^{-1} + A_{-2} \cdot B^{-2} + ... + A_{-n} \cdot B^{-n}$$

Donde: $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_1, A_0, A_{-1}, A_{-2}, \ldots, A_{-n}$ son los dígitos.
B es el número de base
n posición

Para identificar el sistema se coloca la base B como subíndice $N_{(B)}$. Los sistemas más utilizados son: el decimal (base 10), binario (base 2), octal (base 8) y hexadecimal (base 16), entre otros.

Sistema decimal ($N_{(10)}$). Se utilizan los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 los que, como ya se dijo, no representan sólo esos 10 números, sino que al acomodarlos en determinada posición representarán diferentes cantidades. La posición nos indica la magnitud de la cantidad representada, a cada posición se le asigna una potencia de 10 la cual se llama peso.

Ejemplo

Representa el número $573_{(10)}$ en potencia de 10 con la fórmula:

$$573_{(10)} = 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

Ejemplo

La representación en potencia de 10 del número $424.32_{(10)}$ es:

$$424.32_{(10)} = 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

El subíndice 10 se omite la mayoría de las veces, ya que al ser el sistema decimal que utilizamos, se sobrentiende que la base es 10.

Sistema binario ($N_{(2)}$). Sistema posicional que utiliza 2 dígitos (base 2), el 0 y el 1, los pesos de la posición son potencias de 2.

Ejemplo

Representa el número $11101.11_{(2)}$ en potencia de 2 con la fórmula:

$$N_{(10)} = 11101.11_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

Cada dígito del sistema se conoce como dígito binario o bit (*binary digit*). Este sistema que puede ser un poco engorroso para nosotros, no lo es para una computadora, ya que ésta sólo admite 2 estados posibles, encendido o apagado, que equivale a decir pasa corriente o bien no pasa corriente. De tal forma que cuando pasa se asigna el 1 y cuando no pasa se asigna el 0.

Sistema octal ($N_{(8)}$). Sistema posicional que utiliza 8 dígitos (base 8), el 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, así la posición de cada dígito tendrá como peso una potencia de 8.

Ejemplo

Representa el número $234_{(8)}$ en potencia de 8 con la fórmula:

$$N_{(10)} = 234_{(8)} = 2\times 8^2 + 3\times 8^1 + 4\times 8^0$$

Una de las aplicaciones de este sistema es que la conversión de binario a octal es muy sencilla, como se verá más adelante, ya que por cada 3 dígitos en binario se utiliza un solo dígito en octal.

Sistema hexadecimal ($N_{(16)}$). Sistema posicional que utiliza 16 símbolos (base 16), el 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y las letras A, B, C, D, E, F, así la posición de cada dígito tendrá como peso una potencia de 16.

Ejemplos

Representa los números $2405_{(16)}$ y $3AB.2D_{(16)}$ en potencia de 16 con la fórmula

$$N_{(10)} = 2405_{(16)} = 2\times 16^3 + 4\times 16^2 + 0\times 16^1 + 5\times 16^0$$

$$N_{(10)} = 3AB.2D_{(16)} = 3\times 16^2 + A\times 16^1 + B\times 16^0 + 2\times 16^{-1} + D\times 16^{-2}$$

La utilidad de este sistema radica en que al igual que en el octal, la conversión de binario a hexadecimal es muy sencilla, ya que por cada 4 bits se utiliza solamente un dígito hexadecimal.

Un byte es la unidad de memoria usada por una computadora y equivale a 8 bits, de tal forma que 2 bytes ocupan 4 dígitos hexadecimales, 4 bytes (32 bits) 8 dígitos hexadecimales y así sucesivamente.

Sistemas en otra base. Hasta aquí sólo se nombraron algunos sistemas; sin embargo, existen otros que aunque no son comunes cumplen con las características de un sistema posicional.

- **Sistema ternario ($N_{(3)}$)**
  Sistema posicional que utiliza 3 dígitos (base 3): 0, 1, 2
- **Sistema cuaternario ($N_{(4)}$)**
  Sistema posicional que utiliza 4 dígitos (base 4): 0, 1, 2, 3
- **Sistema quinario ($N_{(5)}$)**
  Sistema posicional que utiliza 5 dígitos (base 5): 0, 1, 2, 3, 4

EJERCICIO 89

Transforma los siguientes números en potencias de acuerdo con la base:

1. $48_{(10)}$
2. $153_{(10)}$
3. $96.722_{(10)}$
4. $101011_{(2)}$
5. $1001.101_{(2)}$
6. $102.11_{(3)}$
7. $423.0142_{(5)}$
8. $1746.235_{(8)}$
9. $60007.51_{(8)}$
10. $2AF_{(16)}$
11. $1BA.4E_{(16)}$
12. $C.24AB_{(16)}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Conversiones

Dado un número en un sistema de numeración en base B, el número se puede representar en otro sistema. A continuación se explican diversos métodos.

Conversión de un número en base "*B*" a base 10 $N_{(B)} \longrightarrow N_{(10)}$

Existen 2 métodos utilizando la fórmula y en el caso de números enteros el de "multiplicar por la base".

➲ **Método por fórmula**

$$N_{(10)} = A_n \cdot B^n + A_{n-1} \cdot B^{n-1} + ... + A_1 \cdot B^1 + A_0 \cdot B^0 + A_{-1} \cdot B^{-1} + A_{-2} \cdot B^{-2} + ... + A_{-n} \cdot B^{-n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma $1231_{(4)}$ a base decimal.

Solución

$$\begin{aligned} N_{(10)} = 1231_{(4)} &= 1 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 1 \times 4^0 \\ &= 1 \times 64 + 2 \times 16 + 3 \times 4 + 1 \times 1 \\ &= 64 + 32 + 12 + 1 \\ &= 109_{(10)} \end{aligned}$$

Por tanto, $1231_{(4)}$ equivale a $109_{(10)}$

2 Convierte $20143_{(5)}$ a base 10.

Solución

$$\begin{aligned} N_{(10)} = 20143_{(5)} &= 2 \times 5^4 + 0 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 \\ &= 2 \times 625 + 0 \times 125 + 1 \times 25 + 4 \times 5 + 3 \times 1 \\ &= 1250 + 0 + 25 + 20 + 3 \\ &= 1298_{(10)} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $20143_{(4)}$ equivale a $1\,298_{(10)}$

3 Cambia $N_{(2)} = 1011101.101_{(2)}$ a $N_{(10)}$.

Solución

$$\begin{aligned} 1011101.101_{(2)} &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= 1 \times 64 + 0 \times 32 + 1 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 0.5 + 0 \times 0.25 + 1 \times 0.125 \\ &= 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0 + 0.125 \\ &= 93.625_{(10)} \end{aligned}$$

Por tanto, $N_{(2)} = 1011101.101_{(2)}$ equivale a $N_{(10)} = 93.625_{(10)}$

4 Convierte $34AC_{(13)}$ a base 10.

Solución

Las letras se utilizan para números mayores de 2 dígitos, es decir A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, …, etc. Al aplicar la fórmula se tiene:

$$\begin{aligned} N_{(10)} &= 3\times 13^3 + 4\times 13^2 + \text{A}\times 13^1 + \text{C}\times 13^0 \\ &= 3\times 2197 + 4\times 169 + 10\times 13 + 12\times 1 \\ &= 6\,591 + 676 + 130 + 12 \\ &= 7\,409_{(10)} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $34AC_{(13)}$ equivale a $7\,409_{(10)}$

5 Convierte $274.32_{(8)}$ a base 10.

Solución

$$\begin{aligned} 274.32_{(8)} &= 2\times 8^2 + 7\times 8^1 + 4\times 8^0 + 3\times 8^{-1} + 2\times 8^{-2} \\ &= 2\times 64 + 7\times 8 + 4\times 1 + 3\times 0.125 + 2\times 0.015625 \\ &= 128 + 56 + 4 + 0.375 + 0.03125 \\ &= 188.40625_{(10)} \end{aligned}$$

Por tanto, $274.32_{(8)}$ equivale a $188.40625_{(10)}$

6 Transforma $N_{(16)} = 5AF.84_{(16)}$ a $N_{(10)}$.

Solución

$$\begin{aligned} 5AF.84_{(16)} &= 5\times 16^2 + \text{A}\times 16^1 + \text{F}\times 16^0 + 8\times 16^{-1} + 4\times 16^{-2} \\ &= 5\times 256 + 10\times 16 + 15\times 1 + 8\times 0.0625 + 4\times 0.00390625 \\ &= 1280 + 160 + 15 + 0.5 + 0.015625 \\ &= 1455.515625_{(10)} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $N_{(10)}$ equivale a $1\,455.515625_{(10)}$

- **Método de la multiplicación por la base y suma del siguiente dígito.** Este método sólo se utiliza para números enteros y consiste en multiplicar el primer dígito (de izquierda a derecha), por la base y sumar el dígito siguiente, el resultado de la suma se multiplica por la base y el resultado se suma con el dígito que le sigue, así hasta el último dígito. El resultado final será el número decimal equivalente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma $11011_{(2)}$ a base 10.

Solución

Al seguir los pasos se obtiene:

1 × 2 + **1** =	3	Producto del primer dígito por la base, más el segundo dígito.
3 × 2 + **0** =	6	Producto del resultado anterior por la base, más el tercer dígito.
6 × 2 + **1** =	13	Producto del resultado anterior por la base, más el cuarto dígito.
13 × 2 + **1** =	27	Producto del resultado anterior por la base, más el quinto dígito.
	27	Valor equivalente.

Por tanto, $11011_{(2)}$ equivale a $27_{(10)}$

2 Convierte $25713_{(8)}$ a base 10.

Solución

Al seguir los pasos se obtiene:

$\mathbf{2} \times 8 + \mathbf{5} =$	21	Producto del primer dígito por la base, más el segundo dígito.
$21 \times 8 + \mathbf{7} =$	175	Producto del resultado anterior por la base, más el tercer dígito.
$175 \times 8 + \mathbf{1} =$	1 401	Producto del resultado anterior por la base, más el cuarto dígito.
$1401 \times 8 + \mathbf{3} =$	11 211	Producto del resultado anterior por la base, más el quinto dígito.
	11 211	Valor equivalente.

Por tanto, $25713_{(8)}$ equivale a $11\,211_{(10)}$

3 Transforma $2A1F_{(16)}$ a base 10.

Solución

Al seguir los pasos se obtiene:

$2 \times 16 + \mathbf{A} =$ $2 \times 16 + \mathbf{10} =$	42	Producto del primer dígito por la base, más el segundo dígito.
$42 \times 16 + \mathbf{1} =$	673	Producto del resultado anterior por la base, más el tercer dígito.
$673 \times 16 + \mathbf{F} =$ $673 \times 16 + \mathbf{15} =$	10 783	Producto del resultado anterior por la base, más el cuarto dígito.
	10 783	Valor equivalente.

Por consiguiente, $2A1F_{(16)}$ equivale a $10\,783_{(10)}$

EJERCICIO 90

Transforma los siguientes números a forma decimal:

1. $1100_{(2)}$
2. $10111_{(2)}$
3. $11011011_{(2)}$
4. $111001.1101_{(2)}$
5. $10011.1011_{(2)}$
6. $2102_{(3)}$
7. $11120_{(3)}$
8. $100101_{(3)}$
9. $21101.201_{(3)}$
10. $2110112.212_{(3)}$
11. $3220_{(4)}$
12. $12003.223_{(4)}$
13. $3201.\ 231_{(4)}$
14. $343_{(5)}$
15. $10134_{(5)}$
16. $234_{(5)}$
17. $43210_{(5)}$
18. $3210.341_{(5)}$
19. $20014.4431_{(5)}$
20. $314.1003_{(5)}$
21. $45_{(6)}$
22. $4531_{(6)}$
23. $55.342_{(6)}$
24. $7612_{(8)}$
25. $5671_{(8)}$
26. $753.1041_{(8)}$
27. $820_{(9)}$
28. $765_{(9)}$
29. $2AD_{(16)}$
30. $AB2C_{(16)}$
31. $B3A_{(16)}$
32. $F2A.1DC_{(16)}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Conversión de un número en base 10 a otra base $N_{(10)} \longrightarrow N_{(B)}$

- **Método de los residuos.** Se divide el número decimal entre la base a la que se quiere convertir, el cociente se vuelve a dividir entre la base y así sucesivamente, hasta obtener un cociente menor a la base. Se toma el último cociente y cada uno de los residuos para formar el número.

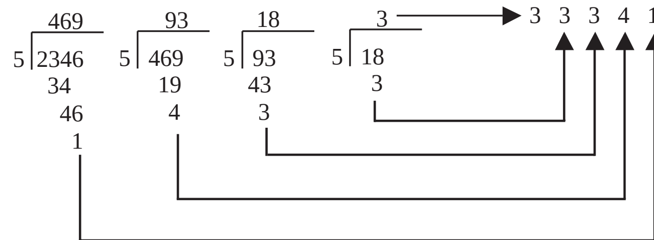
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Cambia 2 346$_{(10)}$ a base 5.

Solución

Se divide 2 346 por 5 y con cada cociente se realiza lo mismo.

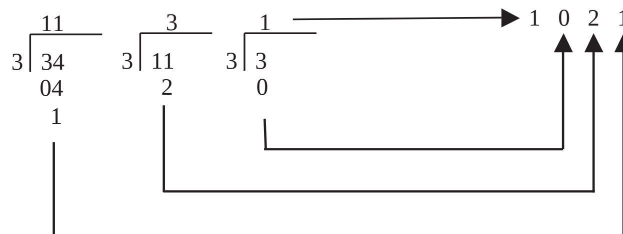


Por tanto, 2 346$_{(10)}$ equivale a 33341$_{(5)}$

2 Cambia 34$_{(10)}$ a base 3.

Solución

Se divide 34 entre 3 y con cada cociente se realiza lo mismo.

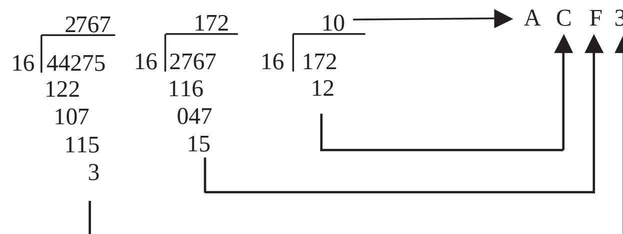


Entonces, 34$_{(10)}$ equivale a 1021$_{(3)}$

3 Transforma 44 275$_{(10)}$ a base 16.

Solución

Se divide 44 275$_{(10)}$ entre 16 y con cada cociente se realiza lo mismo.



Por tanto, 44 275$_{(10)}$ equivale a ACF3$_{(16)}$

Cuando un número en base 10 tiene decimales, se procede de la misma manera con la parte entera, la parte fraccionaria se multiplica por la base hasta obtener cero en la parte fraccionaria o un suficiente número de decimales.

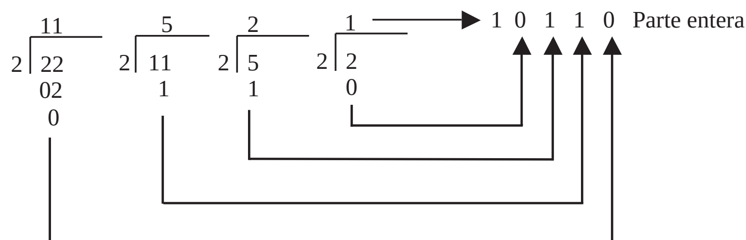
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $22.75_{(10)}$ a binario.

Solución

Se divide $22_{(10)}$ por 2 y con cada cociente se realiza lo mismo.



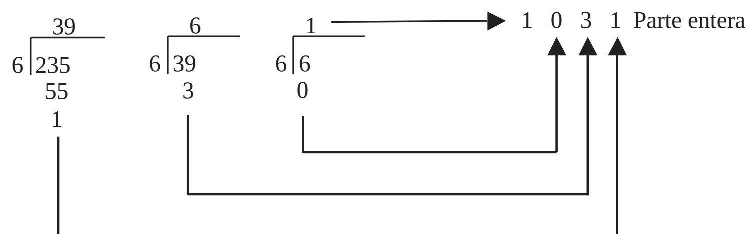
La parte decimal (0.75) se multiplica por 2, la parte fraccionaria se multiplica también por 2, y así sucesivamente, hasta obtener 0 en la parte decimal, con los enteros en el orden de aparición se obtiene la parte decimal.

	1er. entero	2do. entero	Resultado
$0.75 \times 2 = 1.5$	**1**		
$0.5 \times 2 = 1.0$		**1**	
			.11

Por consiguiente, $22.75_{(10)}$ equivale a $10110.11_{(2)}$

2 Transforma $235.45_{(10)}$ a base 6.

Solución



	1er. entero	2do. entero	3er. entero	4to. entero	Resultado
$0.45 \times 6 = 2.7$	**2**				
$0.7 \times 6 = 4.2$		**4**			
$0.2 \times 6 = 1.2$			**1**		
$0.2 \times 6 = 1.2$				**1**	
					.2411…

Por tanto, $235.45_{(10)}$ equivale a $1031.24\bar{1}_{(6)}$

- **Método de extracción de potencias.** Se elabora una tabla de potencias según la base y después se busca el número de veces que cabe alguna de las potencias en el número, se resta de dicho número, y así sucesivamente hasta que la diferencia sea 0.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Cambia $925_{(10)}$ a base 4.

Solución

Se construye la tabla de potencias de 4

$4^{-2} = 0.0625$
$4^{-1} = 0.25$
$4^{0} = 1$
$4^{1} = 4$
$4^{2} = 16$
$4^{3} = 64$
$4^{4} = 256$
$4^{5} = 1024$

3 veces 4^4	768	925 – 768 = 157
2 veces 4^3	128	157 – 128 = 29
1 vez 4^2	16	29 – 16 = 13
3 veces 4^1	12	13 – 12 = 1
1 vez 4^0	1	1 – 1 = 0

Por consiguiente, $925_{(10)}$ equivale a $32131_{(4)}$

EJERCICIO 91

Convierte los siguientes números en forma decimal a la base indicada.

1. $15_{(10)}$ a base 2
2. $315_{(10)}$ a base 2
3. $13.75_{(10)}$ a base 2
4. $19.5_{(10)}$ a base 2
5. $0.625_{(10)}$ a base 2
6. $121.875_{(10)}$ a base 2
7. $10_{(10)}$ a base 3
8. $721_{(10)}$ a base 3
9. $53_{(10)}$ a base 4
10. $427_{(10)}$ a base 5
11. $37.84_{(10)}$ a base 5
12. $386.432_{(10)}$ a base 5
13. $213_{(10)}$ a base 6
14. $411_{(10)}$ a base 6
15. $97_{(10)}$ a base 7
16. $715_{(10)}$ a base 7
17. $63_{(10)}$ a base 8
18. $104_{(10)}$ a base 8
19. $350.1875_{(10)}$ a base 8
20. $28\,779.75_{(10)}$ a base 8
21. $140_{(10)}$ a base 9
22. $1\,075_{(10)}$ a base 9
23. $97\,021_{(10)}$ a base 9
24. $196_{(10)}$ a base 16
25. $358.0625_{(10)}$ a base 16
26. $21\,468.5_{(10)}$ a base 16

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Relación entre el sistema binario, octal y hexadecimal. La relación entre los sistemas, binario y octal es de 3, ya que $8 = 2^3$, esto quiere decir que a cada tres dígitos en el binario le corresponde un dígito del octal.

Tabla de valores equivalentes

Decimal	Binario	Octal
0	000	0
1	001	1
2	010	2
3	011	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	10

Conversión de un número binario a octal $N_{(2)} \longrightarrow N_{(8)}$

Para hacer la conversión se separan los dígitos en grupos de 3 a partir del punto decimal (hacia la izquierda en la parte entera y a la derecha en la parte decimal), y se sustituye cada grupo por su equivalente en octal.

EJEMPLOS

1 Convierte $11110011_{(2)}$ a base 8.

Solución

Se separan grupos de 3 dígitos de derecha a izquierda y se busca en la tabla su equivalencia en octal.

011	110	011	Binario
↓	↓	↓	↓
3	6	3	Octal

Por tanto, $1111001_{(2)} = 363_{(8)}$

2 Cambia $1101111.110100_{(2)}$ a base 8.

Solución

Se separan grupos de 3 dígitos de derecha a izquierda y se busca en la tabla su equivalencia en octal.

001	101	111	.	110	100	Binario
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	5	7	.	6	4	Octal

Entonces, $1101111.110100_{(2)} = 157.64_{(8)}$

Conversión de un número octal a binario $N_{(8)} \longrightarrow N_{(2)}$

Para convertir se sustituye cada dígito octal por sus 3 dígitos binarios equivalentes.

EJEMPLOS

1 Transforma $235_{(8)}$ a base 2.

Solución

Se busca la equivalencia de cada dígito en base 2

2	3	5	Octal
↓	↓	↓	↓
010	011	101	Binario

Por consiguiente, $235_{(8)} = 10011101_{(2)}$

2 Transforma $1206.135_{(8)}$ a base 2.

Solución

1	2	0	6	.	1	3	5	Octal
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
001	010	000	110	.	001	011	101	Binario

Por tanto, $1206.135_{(8)} = 1010000110.001011101_{(2)}$

La relación entre el sistema binario y el hexadecimal es de 4, ya que $16 = 2^4$ esto quiere decir que a cada 4 dígitos en el binario le corresponde un dígito en el hexadecimal.

Tabla de valores equivalentes

Decimal	Binario	Hexadecimal
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8

Decimal	Binario	Hexadecimal
9	1001	9
10	1010	*A*
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F
16	10000	10
17	10001	11

Conversión de un número binario a hexadecimal $N_{(2)} \longrightarrow N_{(16)}$

Para convertir se separan los dígitos en grupos de 4 a partir del punto decimal (hacia la izquierda en la parte entera y a la derecha en la parte fraccionaria), y se sustituyen por su equivalente en hexadecimal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $110111110_{(2)}$ a hexadecimal.

Solución

Se separan grupos de 4 dígitos de derecha a izquierda, si para el último grupo hacen falta dígitos se colocan ceros a la izquierda y se busca en la tabla su equivalencia en hexadecimal.

0001	1011	1110	Binario
↓	↓	↓	↓
1	B	E	Hexadecimal

Por tanto, $110111110_{(2)} = 1BE_{(16)}$

2 Cambia $11110011.011110101_{(2)}$ a base 16.

Solución

Se separan grupos de 4 dígitos de derecha a izquierda en la parte entera y en la parte decimal de izquierda a derecha, si faltan dígitos se colocan ceros a la derecha y se busca en la tabla su equivalencia en hexadecimal.

1111	0011	.	0111	1010	1000	Binario
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
F	3	.	7	A	8	Hexadecimal

Entonces, $11110011.011110101_{(2)} = F3.7A8_{(16)}$

Conversión de un número hexadecimal a binario $N_{(16)} \longrightarrow N_{(2)}$

Para convertir se sustituye cada dígito hexadecimal por sus respectivos 4 dígitos binarios.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma $821.57_{(16)}$ a binario.

Solución

Se busca la equivalencia en base 2 de cada dígito.

8	2	1	.	5	7	Hexadecimal
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1000	0010	0001	.	0101	0111	Binario

Por consiguiente, $821.57_{(16)} = 100000100001.01010111_{(2)}$

2 Transforma $A5C.D4_{(16)}$ a binario.

Solución

Se busca la equivalencia en base 2 de cada dígito.

A	5	C	.	D	4	Hexadecimal
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1010	0101	1100	.	1101	0100	Binario

Por consiguiente, $A5C.D4_{(16)} = 101001011100.11010100$

- **Método del múltiplo.** Para explicar este método, analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Transforma $11110101_{(2)}$ a base 8.

Solución

Se separan en grupos de 3 en 3 de derecha a izquierda.	**011**	**110**	**101**
Se dan los dígitos 1, 2, 4, de derecha a izquierda a cada grupo.	21	421	421

Se suman los dígitos que se encuentran en las posiciones de los unos.	2 + 1 = 3	4 + 2 = 6	4 + 1 = 5
Los resultados forman el número equivalente en base 8.	**3**	**6**	**5**

Por tanto, $11110101_{(2)} = 365_{(8)}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Cambia $534_{(8)}$ a binario.

Solución

Se colocan los dígitos que forman el número octal.	**5**	**3**	**4**
Se dan los dígitos 1, 2, 4, de derecha a izquierda a cada grupo, se busca que los dígitos al sumarlos den el dígito de la columna.	421 4 + 1 = 5	421 2 + 1 = 3	421 4 + 0 = 4
Se asigna 1 a los valores utilizados en la suma y ceros a los que no se utilizaron, y se forman grupos de 3 dígitos.	421 101	421 011	421 100
La unión de los grupos forman el equivalente a binario.	**101**	**011**	**100**

Por consiguiente, $534_{(8)} = 101011100_{(2)}$

2 Cambia $1101101010_{(2)}$ a base 16.

Solución

Se separan en grupos de 4 en 4 de derecha a izquierda.	**0011**	**0110**	**1010**
Se dan los dígitos 1, 2, 4, 8, de derecha a izquierda, a cada grupo.	8421	8421	8421
Se suman los dígitos que se encuentran en las posiciones de los unos.	2 + 1 = 3	4 + 2 = 6	8 + 2 = 10 = **A**
Los resultados forman el número equivalente en base 16	**3**	**6**	**A**

Entonces, $1101101010_{(2)} = 36A_{(16)}$

3 Convierte $AB5_{(16)}$ a binario.

Solución

Se colocan los dígitos que forman el número octal.	**A**	**B**	**5**
Se dan los dígitos 1, 2, 4, 8, de derecha a izquierda a cada grupo, se busca que los dígitos al sumarlos den el dígito de la columna.	8421 8 + 2 = 10	8421 8 + 2 + 1 = 11	8421 4 + 1 = 5
Se asigna 1 a los valores utilizados en la suma y ceros a los que no se utilizaron, y se forman grupos de 4 dígitos.	8421 1010	8421 1011	8421 0101
La unión de los grupos forman el equivalente a binario.	**1010**	**1011**	**0101**

Por tanto, $AB5_{(16)} = 101010110101_{(2)}$

EJERCICIO 92

Cambia los siguientes números a la base indicada.

1. $1110001111_{(2)}$ a base 8
2. $11011100011_{(2)}$ a base 8
3. $111001111.110101_{(2)}$ a base 8
4. $735_{(8)}$ a base 2
5. $1463_{(8)}$ a base 2
6. $45213_{(8)}$ a base 2
7. $56.43_{(8)}$ a base 2
8. $72.16_{(8)}$ a base 2
9. $412.67_{(8)}$ a base 2
10. $6017.2004_{(8)}$ a base 2
11. $10001101000_{(2)}$ a base 16
12. $100110110001.111010100011_{(2)}$ a base 16
13. $111110111000.01100010_{(2)}$ a base 16
14. $13AC_{(16)}$ a base 2
15. $D2F.AB_{(16)}$ a base 2
16. $7E8F.C5_{(16)}$ a base 2

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma con números en base distinta de 10

En la siguiente tabla los números remarcados indican el cambio de orden.

Decimal	Binario	Base 3	Base 4	Base 5	Octal	Hexadecimal
0	0000	0	0	0	0	0
1	0001	1	1	1	1	1
2	**0010**	2	2	2	2	2
3	0011	**10**	3	3	3	3
4	**0100**	11	**10**	4	4	4
5	0101	12	11	**10**	5	5
6	0110	**20**	12	11	6	6
7	0111	21	13	12	7	7
8	**1000**	22	**20**	13	**10**	8
9	1001	**100**	21	14	11	9
10	1010	101	22	**20**	12	A
11	1011	102	23	21	13	B
12	1100	110	**30**	22	14	C
13	1101	111	31	23	15	D
14	1110	112	32	24	16	E
15	1111	120	33	**30**	17	F
16	**10000**	121	**100**	31	**20**	**10**
17	10001	122	101	32	21	11
18	10010	**200**	102	33	22	12
19	10011	201	103	34	23	13
20	10100	202	110	**40**	24	14

Para sumar 2 o más números se ubica el primer sumando en la tabla y se cuenta el número de unidades que representa el siguiente sumando, el número al cual se llega es el resultado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de la operación $3_{(5)} + 4_{(5)}$.

Solución

En la tabla se ubica el $3_{(5)}$ y se cuentan 4 unidades.

Base 5	0	1	2	**3**	4	10	11	**12**	13

4 unidades

Después de 4 unidades se llega al número $12_{(5)}$ que es el resultado de la suma.
Por tanto, $3_{(5)} + 4_{(5)} = 12_{(5)}$

2 El resultado de $5_{(8)} + 3_{(8)}$ es:

Solución

En la tabla se ubica el $5_{(8)}$ y se cuentan 3 unidades.

Base 8	0	1	2	3	4	**5**	6	7	**10**

3 unidades

Entonces, $5_{(8)} + 3_{(8)} = 10_{(8)}$

3 El resultado de $8_{(16)} + 5_{(16)}$ es:

Solución

En la tabla se ubica el $8_{(16)}$ y se cuentan 5 unidades

Base 16	...	6	7	**8**	9	A	B	C	***D***

5 unidades

Por consiguiente, $8_{(16)} + 5_{(16)} = D_{(16)}$

4 El resultado de $3_{(5)} + 2_{(5)} + 1_{(5)}$ es:

Solución

En la tabla se ubica el $3_{(5)}$ y se cuentan 2 unidades.

Base 5	0	1	2	**3**	4	**10**	11	12	13

2 unidades

A partir del $10_{(5)}$ se cuenta una unidad.

Base 5	0	1	2	3	4	**10**	**11**	12	13

una unidad

Por tanto, $3_{(5)} + 2_{(5)} + 1_{(5)} = 11_{(5)}$

Para sumar números de 2 o más dígitos se procede de la misma forma que en el sistema decimal, se toma en cuenta el cambio de orden para contar las unidades que se acarrean.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve $234_{(5)} + 3_{(5)}$.

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

$234_{(5)}$ $+\ \ 3_{(5)}$ $2_{(5)}$	$4_{(5)} + 3_{(5)} = 12_{(5)}$	Se pone 2 y se acarrea **1**
1 $234_{(5)}$ $+\ \ 3_{(5)}$ 242	$3_{(5)} + 1_{(5)} = 4_{(5)}$	Se pone 4 y se baja el 2

Por tanto, $234_{(5)} + 3_{(5)} = 242_{(5)}$

2 Resuelve $101_{(2)} + 11_{(2)}$.

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

$101_{(2)}$ $+\ \ 11_{(2)}$ 0	$1_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$	Se pone 0 y se acarrea **1**
1 $101_{(2)}$ $+\ \ 11_{(2)}$ 00	$\mathbf{1}_{(2)} + 0_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$	Se pone 0 y se acarrea **1**
11 $101_{(2)}$ $+\ \ 11_{(2)}$ $1000_{(2)}$	$\mathbf{1}_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$	Se pone 10

Por consiguiente, $101_{(2)} + 11_{(2)} = 1000_{(2)}$

3 Resuelve $234_{(5)} + 421_{(5)}$.

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

1 $234_{(5)}$ $+\ 421_{(5)}$ 0	$4_{(5)} + 1_{(5)} = 10_{(5)}$	Se pone 0 y se acarrea **1**
1 $234_{(5)}$ $+\ 421_{(5)}$ 10	$3_{(5)} + 2_{(5)} = 10_{(5)}$ $10_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 11_{(5)}$	Se pone 1 y se acarrea **1**
1 $234_{(5)}$ $+\ 421_{(5)}$ $1210_{(5)}$	$2_{(5)} + 4_{(5)} = 11_{(5)}$ $11_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 12_{(5)}$	Se pone 12

Por tanto, $234_{(5)} + 421_{(5)} = 1210_{(5)}$

4 Resuelve $537_{(8)} + 45_{(8)}$.

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

$537_{(8)}$ $+\ 45_{(8)}$ 4	$7_{(8)} + 5_{(8)} = 14_{(8)}$	Se pone 4 y se acarrea **1**
1 $537_{(8)}$ $+\ 45_{(8)}$ 04	$3_{(8)} + 4_{(8)} = 7_{(8)}$ $7_{(8)} + \mathbf{1}_{(8)} = 10_{(8)}$	Se pone 0 y se acarrea **1**
11 $537_{(8)}$ $+\ 45_{(8)}$ $604_{(8)}$	$5_{(8)} + \mathbf{1}_{(8)} = 6_{(8)}$	Se pone 6

Por consiguiente, $537_{(8)} + 45_{(8)} = 604_{(8)}$

5 Determina la suma de: $3AC_{(16)} + 236_{(16)}$

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

$3AC_{(16)}$ $+\ 236_{(16)}$ $2_{(16)}$	$C_{(16)} + 6_{(16)} = 12_{(16)}$	Se pone 2 y se acarrea **1**
1 $3AC_{(16)}$ $+\ 236_{(16)}$ E2	$A_{(16)} + 3_{(16)} = D_{(16)}$ $D_{(16)} + \mathbf{1}_{(16)} = E_{(16)}$	Se pone E
$3AC_{(16)}$ $+\ 236_{(16)}$ $5E2_{(16)}$	$3_{(16)} + 2_{(16)} = 5_{(16)}$	Se pone 5

Entonces, $3AC_{(16)} + 236_{(16)} = 5E2_{(16)}$

6 Calcula la suma de: $4762_{(8)} + 1304_{(8)} + 546_{(8)}$

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

$4762_{(8)}$ $1304_{(8)}$ $+\ 546_{(8)}$ 4	$2_{(8)} + 4_{(8)} + 6_{(8)} = 14_{(8)}$	Se pone 4 y se acarrea **1**
1 $4762_{(8)}$ $1304_{(8)}$ $+\ 546_{(8)}$ 34	$1_{(8)} + 6_{(8)} + 0_{(8)} + 4_{(8)} = 13_{(8)}$	Se pone 3 y se acarrea **1**
11 $4762_{(8)}$ $1304_{(8)}$ $+\ 546_{(8)}$ 034	$1_{(8)} + 7_{(8)} + 3_{(8)} + 5_{(8)} = 20_{(8)}$	Se pone 0 y se acarrea **2**
211 $4762_{(8)}$ $1304_{(8)}$ $+\ 546_{(8)}$ $7034_{(8)}$	$\mathbf{2}_{(8)} + 4_{(8)} + 1_{(8)} = 7_{(8)}$	Se pone 7

Entonces, $4762_{(8)} + 1304_{(8)} + 546_{(8)} = 7034_{(8)}$

EJERCICIO 93

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $\begin{array}{r} 10111_{(2)} \\ +\,11100_{(2)} \\ 11001_{(2)} \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 11011101_{(2)} \\ +\quad 11011_{(2)} \\ 1111101_{(2)} \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 1011111_{(2)} \\ +\quad 10011_{(2)} \\ 1101101_{(2)} \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 11011111_{(2)} \\ +\;1000111_{(2)} \\ 1110111_{(2)} \\ 11101_{(2)} \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 1022_{(3)} \\ +\,2012_{(3)} \\ 211_{(3)} \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 21022_{(3)} \\ +\;2202_{(3)} \\ 211_{(3)} \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{r} 221122_{(3)} \\ +\;12010_{(3)} \\ 1212_{(3)} \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{r} 22011022_{(3)} \\ +\;112012_{(3)} \\ 200211_{(3)} \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 33213_{(4)} \\ +\,23012_{(4)} \\ 321_{(4)} \\ \hline \end{array}$

10. $\begin{array}{r} 33213_{(4)} \\ +\quad 312_{(4)} \\ 101_{(4)} \\ \hline \end{array}$

11. $\begin{array}{r} 223013213_{(4)} \\ +\;1023012_{(4)} \\ 31322_{(4)} \\ \hline \end{array}$

12. $\begin{array}{r} 2133213_{(4)} \\ +\;23322_{(4)} \\ 30321_{(4)} \\ \hline \end{array}$

13. $\begin{array}{r} 432_{(5)} \\ +\,301_{(5)} \\ 111_{(5)} \\ \hline \end{array}$

14. $\begin{array}{r} 1432_{(5)} \\ +\,2312_{(5)} \\ 31_{(5)} \\ \hline \end{array}$

15. $\begin{array}{r} 21402_{(5)} \\ +\;4302_{(5)} \\ 1011_{(5)} \\ \hline \end{array}$

16. $\begin{array}{r} 412342_{(5)} \\ +\;30122_{(5)} \\ 1133_{(5)} \\ \hline \end{array}$

17. $\begin{array}{r} 60704_{(8)} \\ +\;5077_{(8)} \\ 222_{(8)} \\ \hline \end{array}$

18. $\begin{array}{r} 74532_{(8)} \\ +\,64301_{(8)} \\ 52413_{(8)} \\ \hline \end{array}$

19. $\begin{array}{r} 56721_{(8)} \\ +\quad 4576_{(8)} \\ 756421_{(8)} \\ \hline \end{array}$

20. $\begin{array}{r} 463721_{(8)} \\ +\;75624_{(8)} \\ 421756_{(8)} \\ \hline \end{array}$

21. $\begin{array}{r} 472_{(16)} \\ +\,591_{(16)} \\ 65_{(16)} \\ \hline \end{array}$

22. $\begin{array}{r} 512_{(16)} \\ +\,AC1_{(16)} \\ 4F_{(16)} \\ \hline \end{array}$

23. $\begin{array}{r} 1576_{(16)} \\ +\,A9F1_{(16)} \\ 54CF_{(16)} \\ \hline \end{array}$

24. $\begin{array}{r} A4FB2_{(16)} \\ +\,131BC_{(16)} \\ 150F9_{(16)} \\ \hline \end{array}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Resta con números en base distinta de 10

En la resta se recomienda usar la tabla de equivalencias y se procede a resolver como una resta en base 10.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Determina el resultado de la operación $24_{(5)} - 14_{(5)}$.

Solución

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $14_{(5)}$ a $24_{(5)}$

Base 5	...	13	**14**	20	21	22	23	**24**	30

5 unidades

Por tanto, $24_{(5)} - 14_{(5)} = 10_{(5)}$

2 Encuentra el resultado de la operación $7_{(8)} - 3_{(8)}$.

Solución

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $3_{(8)}$ a $7_{(8)}$

Base 8	0	1	2	**3**	4	5	6	**7**	10

4 unidades

Por tanto, $7_{(8)} - 3_{(8)} = 4_{(8)}$

3 El resultado de $F_{(16)} - 8_{(16)}$ es:

Solución

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $8_{(16)}$ a $F_{(16)}$

Base 16	...	**8**	9	A	B	C	D	E	**F**

7 unidades

Por consiguiente, $F_{(16)} - 8_{(16)} = 7_{(16)}$

Para restar números de 2 o más dígitos se colocan las cantidades en forma vertical y se procede como en la resta en base 10.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 El valor de la diferencia $44301_{(5)} - 21413_{(5)}$ es:

Solución

Se colocan los números en forma vertical.

$$\begin{array}{r} - \; 44301_{(5)} \\ 21413_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $3_{(5)}$ a $11_{(5)}$

Base 5	0	1	2	**3**	4	10	**11**	12	13

3 unidades

$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ - \; 44301_{(5)} \\ 21413_{(5)} \\ \hline 3 \end{array}$	Se pone 3 y se acarrea **1** Se suma $1_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 2_{(5)}$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $2_{(5)}$ a $10_{(5)}$

Base 5	0	1	**2**	3	4	**10**	11	12	13

3 unidades

1 $44301_{(5)}$ – $21413_{(5)}$ 33	Se pone 3 y se acarrea **1** Se suma $\mathbf{1}_{(5)} + 4_{(5)} = 10_{(5)}$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $10_{(5)}$ a $13_{(5)}$

Base 5	0	1	2	3	4	**10**	11	12	**13**

3 unidades

1 $44301_{(5)}$ – $21413_{(5)}$ 333	Se pone 3 y se acarrea **1** Se suma $\mathbf{1}_{(5)} + 1_{(5)} = 2_{(5)}$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $2_{(5)}$ a $4_{(5)}$

Base 5	0	1	**2**	3	**4**	10	11	12	13

2 unidades

$44301_{(5)}$ – $21413_{(5)}$ 2333	Se pone 2

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $2_{(5)}$ a $4_{(5)}$

Base 5	0	1	**2**	3	**4**	10	11	12	13

2 unidades

$44301_{(5)}$ – $21413_{(5)}$ $22333_{(5)}$	Se pone 2

Por tanto, $44301_{(5)} - 21413_{(5)} = 22333_{(5)}$

2 ¿Cuál es la diferencia de: $DE2_{(16)} - A25_{(16)}$?

Solución

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $5_{(16)}$ a $12_{(16)}$

Base 16	...	4	**5**	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	**12**	13	14

13 unidades

(continúa)

(*continuación*)

$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ DE2_{(16)} \\ -\ A25_{(16)} \\ \hline D \end{array}$	Se pone D = $13_{(16)}$ y se acarrea **1** Se suma $\mathbf{1}_{(16)} + 2_{(16)} = 3_{(16)}$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $3_{(16)}$ a $E_{(16)}$

Base 16	...	**3**	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	**E**	F	10	11	12	13

11 unidades

$\begin{array}{r} DE2_{(16)} \\ -\ A25_{(16)} \\ \hline BD \end{array}$	Se pone B = $11_{(16)}$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $A_{(16)}$ a $D_{(16)}$

Base 16	...	3	4	5	6	7	8	9	**A**	B	C	**D**	E	F	10	11	12	13

3 unidades

$\begin{array}{r} DE2_{(16)} \\ -\ A25_{(16)} \\ \hline 3BD_{(16)} \end{array}$	Se pone 3

Por consiguiente, $DE2_{(16)} - A25_{(16)} = 3BD_{(16)}$

EJERCICIO **94**

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $\begin{array}{r} 111000_{(2)} \\ -\ 10101_{(2)} \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 110111011_{(2)} \\ -\ 110001_{(2)} \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 11011101_{(2)} \\ -\ 1111011_{(2)} \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 34213_{(5)} \\ -\ 4432_{(5)} \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 420444_{(5)} \\ -\ 4433_{(5)} \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 5436_{(8)} \\ -\ 333_{(8)} \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{r} 75451_{(8)} \\ -\ 57627_{(8)} \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{r} 769_{(16)} \\ -\ 3AB_{(16)} \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 3ABC_{(16)} \\ -\ 2AB_{(16)} \\ \hline \end{array}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación con números en base distinta de 10

Así como el sistema decimal tiene sus tablas de multiplicar, a cada sistema se le puede construir su tabla.

Base 2 (Binario)

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Base 3 (Ternario)

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Base 4 (Cuaternario)

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Base 5 (Quinario)

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Base 8 (Octal)

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Base 16 (Hexadecimal)

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Para multiplicar números de 2 o más dígitos se procede de igual forma que en el sistema decimal y se toma en cuenta la tabla correspondiente a la base.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $12_{(3)} \times 2_{(3)}$.

Solución

Se colocan los factores en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 12_{(3)} \\ \times \quad 2_{(3)} \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{r} 12_{(3)} \\ \times \quad 2_{(3)} \\ \hline 1 \end{array}$	$2_{(3)} \times 2_{(3)} = 11_{(3)}$	Se pone 1 y se acarrea **1**
$\begin{array}{r} 12_{(3)} \\ \times \quad 2_{(3)} \\ \hline 101_{(3)} \end{array}$	$2_{(3)} \times 1_{(3)} = 2_{(3)}$ $2_{(3)} + \mathbf{1}_{(3)} = 10_{(3)}$	Se pone 10

Por tanto, $12_{(3)} \times 2_{(3)} = 101_{(3)}$

2 Encuentra el resultado de $1234_{(5)} \times 3_{(5)}$.

Solución

Se colocan los factores en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 2 \end{array}$	$3_{(5)} \times 4_{(5)} = 22_{(5)}$	Se pone 2 y se acarrea **2**
$\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 12 \end{array}$	$3_{(5)} \times 3_{(5)} = 14_{(5)}$ $14_{(5)} + \mathbf{2}_{(5)} = 21_{(5)}$	Se pone 1 y se acarrea **2**
$\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 312_{(5)} \end{array}$	$3_{(5)} \times 2_{(5)} = 11_{(5)}$ $11_{(5)} + \mathbf{2}_{(5)} = 13_{(5)}$	Se pone 3 y se acarrea **1**
$\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 4312_{(5)} \end{array}$	$3_{(5)} \times 1_{(5)} = 3_{(5)}$ $3_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 4_{(5)}$	Se pone 4

Por tanto, $1234_{(5)} \times 3_{(5)} = 4312_{(5)}$

3 El resultado de $324_{(16)} \times 5_{(16)}$ es:

Solución

Se colocan los factores en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 324_{(16)} \\ \times \quad 5_{(16)} \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{r} 324_{(16)} \\ \times \quad 5_{(16)} \\ \hline 4 \end{array}$	$5_{(16)} \times 4_{(16)} = 14_{(16)}$	Se pone 4 y se acarrea **1**
$\begin{array}{r} 324_{(16)} \\ \times \quad 5_{(16)} \\ \hline B4 \end{array}$	$5_{(16)} \times 2_{(16)} = A_{(16)}$ $A_{(16)} + 1_{(16)} = B_{(16)}$	Se pone B
$\begin{array}{r} 324_{(16)} \\ \times \quad 5_{(16)} \\ \hline FB4_{(16)} \end{array}$	$5_{(16)} \times 3_{(16)} = F_{(16)}$	Se pone F

Por tanto, $324_{(16)} \times 5_{(16)} = FB4_{(16)}$

4 Resuelve $527_{(8)} \times 423_{(8)}$.

Solución

Se multiplica del mismo modo que en el sistema decimal, sólo que con la tabla de multiplicar del sistema octal.

$$\begin{array}{r} 527_{(8)} \\ \times\, 423_{(8)} \\ \hline 2005\phantom{_{(8)}} \\ 1256\phantom{0_{(8)}} \\ 2534\phantom{00_{(8)}} \\ \hline 270165_{(8)} \end{array}$$

Por consiguiente, $527_{(8)} \times 423_{(8)} = 270165_{(8)}$

5 Realiza el producto de: $3AC_{(16)} \times B2_{(16)}$.

Solución

$$\begin{array}{r} 3AC_{(16)} \\ B2_{(16)} \\ \hline 758\phantom{_{(16)}} \\ 2864\phantom{0_{(16)}} \\ \hline 28D98_{(16)} \end{array}$$

Finalmente, $3AC_{(16)} \times B2_{(16)} = 28D98_{(16)}$

EJERCICIO 95

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $11011_{(2)} \times 111_{(2)}$	5. $23012_{(4)} \times 321_{(4)}$	9. $67124_{(8)} \times 315_{(8)}$
2. $110101_{(2)} \times 101_{(2)}$	6. $2301_{(5)} \times 344_{(5)}$	10. $1047_{(8)} \times 7601_{(8)}$
3. $2112_{(3)} \times 21_{(3)}$	7. $5401_{(8)} \times 543_{(8)}$	11. $A4C_{(16)} \times 2B_{(16)}$
4. $23013_{(4)} \times 302_{(4)}$	8. $5641_{(8)} \times 546_{(8)}$	12. $AB2_{(16)} \times 3A_{(16)}$



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División con números en base distinta de 10

Se utilizan las tablas de multiplicar y se procede de la misma forma que en el sistema decimal.

EJEMPLOS



1 Resuelve $312_{(4)} \div 2_{(4)}$.

Solución

$2_{(4)} \overline{)312_{(4)}}$ cociente: 1 -2 11	$2_{(4)} \times 1_{(4)} = 2_{(4)}$ Se resta de la primera cifra del dividendo y se baja la siguiente cifra
$2_{(4)} \overline{)312_{(4)}}$ cociente: 12 -2 11 -10 012	$2_{(4)} \times 2_{(4)} = 10_{(4)}$ Se resta de $11_{(4)}$ y se baja la siguiente cifra
$2_{(4)} \overline{)312_{(4)}}$ cociente: 123 -2 11 -10 012 -12 0	$2_{(4)} \times 3_{(4)} = 12_{(4)}$ Se resta de $12_{(4)}$

Entonces, $312_{(4)} \div 2_{(4)} = 123_{(4)}$

2 Resuelve $421_{(5)} \div 3_{(5)}$.

Solución

$\begin{array}{r\|l} & 1 \\ \hline 3_{(5)} & 421_{(5)} \\ & -3 \\ \hline & 12 \end{array}$	$3_{(5)} \times 1_{(5)} = 3_{(5)}$ Se resta de la primera cifra del dividendo y se baja la siguiente cifra
$\begin{array}{r\|l} & 12 \\ \hline 3_{(5)} & 421_{(5)} \\ & -3 \\ \hline & 12 \\ & -11 \\ \hline & 011 \end{array}$	$2_{(5)} \times 3_{(5)} = 11_{(5)}$ Se resta de $12_{(5)}$ y se baja la siguiente cifra
$\begin{array}{r\|l} & 122 \\ \hline 3_{(5)} & 421_{(5)} \\ & -3 \\ \hline & 12 \\ & -11 \\ \hline & 011 \\ & -11 \\ \hline & 0 \end{array}$	$2_{(5)} \times 3_{(5)} = 11_{(5)}$ Se resta de $11_{(5)}$

Entonces, $421_{(5)} \div 3_{(5)} = 122_{(5)}$.

3 Resuelve $5272_{(8)} \div 24_{(8)}$

Solución

$$\begin{array}{r|l} & 211 \\ \hline 24_{(8)} & 5272_{(8)} \\ & -50 \\ \hline & 27 \\ & -24 \\ \hline & 32 \\ & -24 \\ \hline & 06 \end{array}$$

Por tanto, $5272_{(8)} \div 24_{(8)} = 211_{(8)}$ y el residuo es $6_{(8)}$

4 Resuelve $4D0D_{(16)} \div 19_{(16)}$.

Solución

$$\begin{array}{r|l} & 315 \\ \hline 19_{(16)} & 4D0D_{(16)} \\ & -4B \\ \hline & 020 \\ & -19 \\ \hline & 07D \\ & -7D \\ \hline & 0 \end{array}$$

Por tanto, $4D0D_{(16)} \div 19_{(16)} = 315_{(16)}$

EJERCICIO 96

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $10_{(2)}\overline{)1100_{(2)}}$
2. $11_{(2)}\overline{)100111_{(2)}}$
3. $101_{(2)}\overline{)100100111_{(2)}}$
4. $10_{(3)}\overline{)2110_{(3)}}$
5. $21_{(3)}\overline{)102221_{(3)}}$
6. $23_{(4)}\overline{)20123_{(4)}}$
7. $31_{(4)}\overline{)322322_{(4)}}$
8. $23_{(5)}\overline{)21233_{(5)}}$
9. $43_{(5)}\overline{)1104240_{(5)}}$
10. $6_{(8)}\overline{)56026_{(8)}}$
11. $32_{(8)}\overline{)6666_{(8)}}$
12. $37_{(8)}\overline{)7345_{(8)}}$
13. $11_{(16)}\overline{)154_{(16)}}$
14. $23_{(16)}\overline{)B36_{(16)}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistemas antiguos de numeración

Hemos visto los sistemas de numeración que más se utilizan en la actualidad; sin embargo, la necesidad que el hombre ha tenido de contar desde que existe, lo llevó a inventar otros sistemas, los cuales en su mayoría ya no se utilizan.

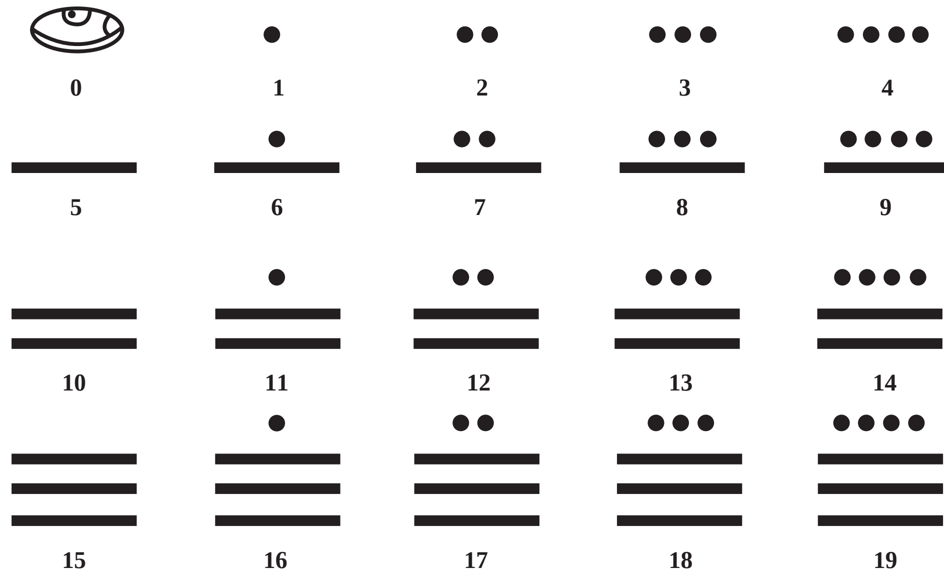
Sistema de numeración maya

Sistema posicional en el que se utiliza el principio aditivo, tiene agrupamientos de 20 en 20 (vigesimal), utiliza el cero y se considera muy avanzado para su época.

Simbología

 **= cero** ● **= uno** ▬ **= cinco**

Los números del 0 al 19 se representan de la siguiente manera:



Para representar números mayores que 20 se utilizan bloques acomodados verticalmente, de tal forma que las cantidades en cada bloque se multiplican por potencias de 20, es decir, el primer bloque por $20^0 = 1$, el segundo bloque por $20^1 = 20$, el tercer bloque por $20^2 = 400$, etcétera.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma a número decimal, el siguiente arreglo de bloques:

Bloque 3	(6)	$6 \times 400 = 2\,400$	2 400
Bloque 2	(0)	$0 \times 20 = 0$	+ 0
Bloque 1	(7)	$7 \times 1 = 7$	7
			2 407

Por tanto, el resultado es 2 407

2 ¿Qué número decimal representa el siguiente arreglo de bloques?

Bloque 3	(3)	$3 \times 400 = 1\,200$	1 200
Bloque 2	(7)	$7 \times 20 = 140$	+ 140
Bloque 1	(11)	$11 \times 1 = 11$	11
			1 351

Finalmente, el resultado es 1 351

El sistema de numeración maya tiene una relación astronómica, que tomaba como unidad más simple un día (kin), 20 kines formaban un uinal (mes), 18 uinales formaban un tun (360 días = 1 año), 20 tunes un katún, un ciclo 144 000 días y 20 ciclos formaban un gran ciclo (2 880 000 días).

Lo anterior indica que cada bloque se tenía que multiplicar por 1, 20, 360, 7 200,… respectivamente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma a número decimal el siguiente arreglo de bloques:

Bloque 3 — $6 \times 360 = 2\ 160$

Bloque 2 — $0 \times 20 = 0$

Bloque 1 — $7 \times 1 = 7$

$$\begin{array}{r} 2\ 160 \\ +\quad 0 \\ 7 \\ \hline 2\ 167 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es 2 167

Sin embargo, para efectos prácticos, se multiplica por potencias de 20, es decir, $20^0 = 1$, $20^1 = 20$, $20^2 = 400$, $20^3 = 8\ 000$, etcétera.

EJERCICIO 97

Transforma los siguientes números mayas a numeración decimal, emplea potencias de 20:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Ejemplo

Convierte 3 528 a número maya.

Solución

Bloque 3: se obtiene al dividir 3 528 entre 400 y el cociente se transforma a número maya.

$$400\overline{)3\,528}\quad \text{cociente } 8,\ \text{residuo } 328$$

8 =

Bloque 2: el residuo 328 se divide entre 20 y el cociente se transforma a número maya.

$$20\overline{)328}\quad 128,\ \text{cociente } 16,\ \text{residuo } 8$$

16 =

Bloque 1: el residuo 8 se transforma a número maya.

8 =

El resultado final se obtiene al acomodar los bloques

3 528 =

Bloque 3

Bloque 2

Bloque 1

EJERCICIO 98

Transforma los siguientes a numeración maya, emplea potencias de 20:

1. 25
2. 146
3. 200
4. 223
5. 467
6. 540
7. 727
8. 1 492
9. 2 006
10. 6 857
11. 9 435
12. 12 007

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de numeración babilónico

Es un sistema aditivo en base 10 hasta el 60 y posicional con base 60 para cantidades superiores. Sus símbolos se llaman cuñas.

- **Simbología**

▽ = 1 ◁ = 10

Como el sistema era aditivo se podían formar los números del 1 al 9

1	2	3	4
5	6	. . .	9

Para números mayores de 10

10 + 2 = 12	40 + 1 = 41	30 + 9 = 39

A partir de 60 se utilizaba el sistema posicional, en donde cada grupo de signos representaba el número de unidades.

EJEMPLOS

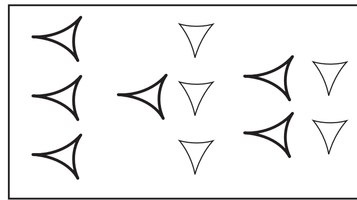
1 Transforma el siguiente bloque a número decimal.

$(20 \times 3\,600) + (21 \times 60) + (12)$

$$\begin{array}{r} 72\,000 \\ +\quad 1\,260 \\ 12 \\ \hline 73\,272 \end{array}$$

Por tanto, el número que representa al bloque es 73 272

2 Transforma el siguiente bloque a número decimal.



$(30 \times 3\,600) + (13 \times 60) + (22)$

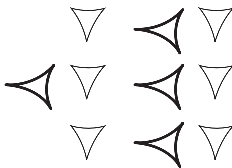
$$\begin{array}{r} 108\,000 \\ +\quad 780 \\ 22 \\ \hline 108\,802 \end{array}$$

Por consiguiente, el número que representa al bloque es 108 802

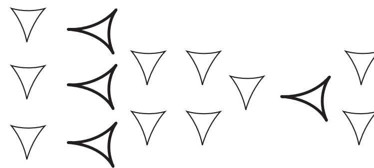
EJERCICIO 99

Convierte a numeración decimal.

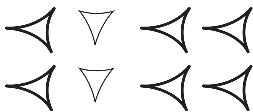
1.



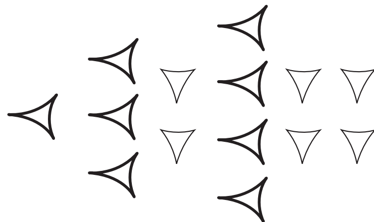
4.



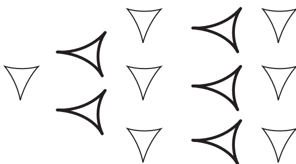
2.



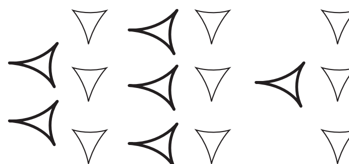
5.



3.



6.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa el número 134 en numeración babilónica.

Solución

Se divide 134 por 60

$$\begin{array}{r|l} & \;\;\;2 \\ \hline 60 & 134 \\ & \;\;14 \end{array}$$

El número 134 = 60 × **2** + **14**

Con el cociente y el último residuo se forma el bloque de símbolos.

2	14

2 Representa el número 4 532 en numeración babilónica.

Solución

Se divide 4 532 por 3 600, el residuo se divide por 60

$$\begin{array}{r|l} & \;\;\;\;1 \\ \hline 3\,600 & 4\,532 \\ & \;\;\;932 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \;15 \\ \hline 60 & 932 \\ & 332 \\ & \;\;32 \end{array}$$

El número 4 532 = 3 600 × **1** + 60 × **15** + **32**

Con los cocientes y el último residuo se forma el bloque de símbolos.

1	15	32

EJERCICIO **100**

Convierte a numeración babilónica.

1. 5
2. 15
3. 80
4. 125
5. 890
6. 2 006
7. 7 981
8. 40 815
9. 44 102
10. 73 874

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de numeración romano

Sistema que se basa en 3 principios: aditivo, sustractivo y multiplicativo.

- **Simbología**

I	*V*	*X*	*L*	*C*	*D*	*M*
1	**5**	**10**	**50**	**100**	**500**	**1 000**

- **Principio aditivo.** Si se tienen 2 símbolos distintos y el de menor valor está a la derecha, entonces se suman.

Ejemplos

$$VI = 5 + 1 = 6$$
$$XII = 10 + 2 = 12$$
$$CL = 100 + 50 = 150$$

- **Principio sustractivo.** Si se tienen 2 símbolos distintos y el de mayor valor está a la derecha, entonces se resta.

Ejemplos

$IV = 5 - 1 = 4$ $\quad XL = 50 - 10 = 40$ $\quad CM = 1\,000 - 100 = 900$

Los símbolos ***I***, ***X***, ***C***, sólo se pueden restar una vez.

- ***I*** sólo se resta de los símbolos que le siguen ***V*** y ***X***

Ejemplos

$IV = 5 - 1 = 4$ $\quad IX = 10 - 1 = 9$

- ***X*** sólo se resta de los símbolos que le siguen ***L*** y ***C***

Ejemplos

$XL = 50 - 10 = 40$ $\quad XC = 100 - 10 = 90$

- ***C*** sólo se resta de los símbolos que le siguen ***D*** y ***M***

Ejemplos

$CD = 500 - 100 = 400$ $\quad CM = 1\,000 - 100 = 900$

Los símbolos ***I***, ***X***, ***C*** y ***M*** no pueden repetirse más de 3 veces.

Ejemplos

$III = 3$ $\quad XXX = 30$ $\quad CCXXVI = 226$ $\quad CD = 400$

$IV = 4$ $\quad XL = 40$ $\quad CCC = 300$ $\quad MMM = 3\,000$

- **Principio multiplicativo.** Si un número es mayor que ***MMM* = 3 000**, se utiliza un segmento horizontal sobre el número, así se indica que el número queda multiplicado por 1 000.

Ejemplos

$\overline{IV} = 4 \times 1\,000 = 4\,000$ $\quad \overline{\overline{IV}} = 4 \times 1\,000 \times 1\,000 = 4\,000\,000$

$\overline{XV} = 15 \times 1\,000 = 15\,000$

Al seguir los principios se puede convertir de numeración decimal a romana.

EJEMPLOS

1 Representar en numeración romana 368.

Solución

El número 368 se expresa de la siguiente manera en número romano.

368 =	300	60	8
368 =	***CCC***	***LX***	***VIII***

Por tanto, 368 = ***CCCLXVIII***

2 Representa el número 123 457 en numeración romana.

Solución

123 457 se escribe de la siguiente forma:

$$123\,457 = 123 \times 1\,000 + 400 + 50 + 7$$

Cada sumando representa un número romano

123 457 =	123 × 1 000	400	50	7
123 457 =	$\overline{CXXIII}$	***CD***	***L***	***VII***

Por tanto, 123 457 = $\overline{CXXIII}$ ***CDLVII***

3 Convierte el número 245 305 679 a numeración romana.

Solución

245 305 679 se escribe de la siguiente forma:

$$245\,305\,679 = 245 \times 1\,000 \times 1\,000 + 305 \times 1\,000 + 600 + 70 + 9$$

Cada sumando representa un número romano.

245 305 679 =	245 × 1 000 × 1000	305 × 1 000	600	70	9
245 305 679 =	$\overline{\overline{CCXLV}}$	$\overline{CCCV}$	***DC***	***LXX***	***IX***

Finalmente, 245 305 679 = $\overline{\overline{CCXLV}}$ $\overline{CCCV}$ ***DC LXX IX***

EJERCICIO **101**

Representa en numeración romana:

1. 89
2. 99
3. 376
4. 786
5. 957
6. 1 004
7. 1 492
8. 1 589
9. 1 621
10. 1 810
11. 1 997
12. 12 345
13. 15 432
14. 23 007
15. 43 879
16. 89 000
17. 123 000
18. 230 005
19. 2 345 000
20. 8 340 020

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Al seguir los principios se puede convertir de numeración romana a decimal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa el número ***MDCLXVI*** en sistema decimal.

Solución

Se indica la equivalencia de cada símbolo y se suman:

M	***D***	***C***	***L***	***X***	***V***	***I***
1 000	500	100	50	10	5	1

$$1\,000 + 500 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 = 1\,666$$

Por consiguiente, ***MDCLXVI*** = 1 666

2 Representa el número $\overline{\overline{XI}}\ \ \overline{CM}\ \ L$ en sistema decimal.

Solución

Se indica la equivalencia de cada símbolo y se suman:

$\overline{\overline{XI}}$	$\overline{CM}$	L
$11 \times 1\,000 \times 1\,000$	$900 \times 1\,000$	50

$$11\,000\,000 + 900\,000 + 50 = 11\,900\,050$$

Por tanto, $\overline{\overline{XI}}\,\overline{CM}\,L = 11\,900\,050$

EJERCICIO 102

Representa en sistema decimal.

1. LXXXII
2. LXXIV
3. LVI
4. XCIII
5. XXXIX
6. LXVIII
7. DLXIV
8. DCCXIX
9. CDLII
10. CMXCI
11. DCCCIII
12. CCXLIV
13. MDCCCL
14. MDCCLII
15. MDCCCVI
16. MDXXV
17. MMDCCCXIV
18. MCDXXIX
19. $\overline{XXIII}$ CDLVII
20. $\overline{XIX}$ XX
21. $\overline{CCXLV}$
22. $\overline{MMMCDLVII}$ CMXCVIII
23. $\overline{\overline{IX}}\,\overline{DLXXV}$ CMLXXIII
24. $\overline{\overline{IV}}\,\overline{CMXLV}$ CMXII

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de numeración egipcio

Los egipcios utilizaron un sistema en base 10, bajo el principio aditivo.

Simbología

Vara	Talón	Cuerda enrollada	Flor de loto	Dedo	Pez	Hombre asustado
1	**10**	**100**	**1 000**	**10 000**	**100 000**	**1 000 000**

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma a número decimal.



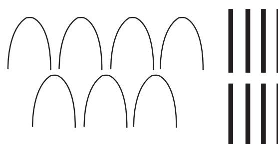
Solución

Se multiplica el número de símbolos por su respectivo valor y los resultados se suman.

$$\begin{array}{r} 30 \\ +\ \ 6 \\ \hline 36 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es 36

2 Transforma a número decimal.



Solución

Se multiplica el número de símbolos por su respectivo valor y los resultados se suman.

$7 \times 10 = 70$ $\quad$ $8 \times 1 = 8$

$$\begin{array}{r} 70 \\ +\ \ 8 \\ \hline 78 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es 78

3 Transforma a número decimal.



Solución

$1 \times 100 = 100$ $\quad$ $3 \times 10 = 30$ $\quad$ $4 \times 1 = 4$

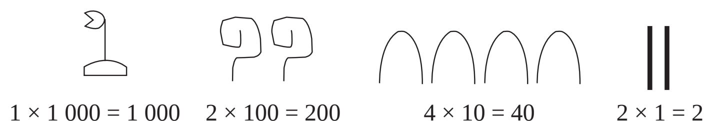
$$\begin{array}{r} 100 \\ 30 \\ +\ \ 4 \\ \hline 134 \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es 134

4 Transforma a número decimal.



Solución



1 × 1 000 = 1 000 2 × 100 = 200 4 × 10 = 40 2 × 1 = 2

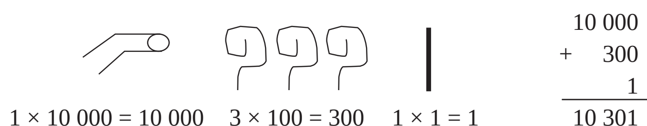
$$\begin{array}{r} 1\,000 \\ 200 \\ +\quad 40 \\ 2 \\ \hline 1\,242 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es 1 242

5 Transforma a número decimal.



Solución



1 × 10 000 = 10 000 3 × 100 = 300 1 × 1 = 1

$$\begin{array}{r} 10\,000 \\ +\quad 300 \\ 1 \\ \hline 10\,301 \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es 10 301

EJERCICIO 103

Transforma a numeración decimal.

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para representar un número decimal en numeración egipcia se siguen los siguientes pasos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa 243 en sistema de numeración egipcia.

Solución

Se escribe el número 243 de la siguiente forma:

$$243 = \mathbf{2} \times 100 + \mathbf{4} \times 10 + \mathbf{3}$$

2 × 100 = 200	**4 × 10 = 40**	**3 × 1 = 3**

Por tanto, el equivalente de 243 en numeración egipcia es:



2 Convierte 1 422 a sistema de numeración egipcia.

Solución

Se escribe el número 1 422 de la siguiente forma:

$$1\,422 = \mathbf{1} \times 1\,000 + \mathbf{4} \times 100 + \mathbf{2} \times 10 + \mathbf{2}$$

1 × 1 000 = 1 000	**4 × 100 = 400**	**2 × 10 = 20**	**2 × 1 = 2**

Por tanto, el equivalente de 1 422 en numeración egipcia es:



3 Representa 100 531 en sistema de numeración egipcia.

Solución

Se escribe el número 100 531 de la siguiente forma:

$$100\,531 = \mathbf{1} \times 100\,000 + \mathbf{5} \times 100 + \mathbf{3} \times 10 + \mathbf{1}$$

1 × 100 000 = 100 000	**5 × 100 = 500**	**3 × 10 = 30**	**1 × 1 = 1**

Por tanto, el equivalente de 100 531 en numeración egipcia es:



EJERCICIO 104

Convierte los siguientes a numeración egipcia.

1. 180
2. 240
3. 290
4. 320
5. 466
6. 580
7. 742
8. 760
9. 800
10. 945
11. 1 050
12. 1 430
13. 2 642
14. 5 900
15. 7 530
16. 9 417
17. 10 456
18. 115 403
19. 302 678
20. 3 546 129

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 10

Sistema métrico decimal y números denominados

Reseña HISTÓRICA

Año	Definición
1795	1/10 000 000 del cuadrante del meridiano terrestre.
1799	Materialización del valor anterior en una regla, a extremos, de platino depositada en los archivos de Francia.
1889	Patrón material internacional de platino iridiado, a trazos, depositado en el BIPM. Es llamado metro internacional.
1960	1 650 763 731 en el vacío de la radiación de kriptón 86, transición entre los niveles 2 p_{10} y 5 d_5. (Incertidumbre $1 \cdot 10^{-8}$).
1983	Longitud de trayecto recorrido en el vacío por la luz durante 1/299 792 458 segundos. (Incertidumbre $2.5 \cdot 10^{11}$).

Sistema métrico decimal

Sistema decimal de unidades físicas que toma su nombre de su unidad de longitud, el metro (del griego *metron*, "medida"). El sistema métrico decimal se propuso y adoptó legalmente en Francia a partir de 1790, después lo adoptaron como sistema común de pesos y medidas la mayoría de los países. En la actualidad el sistema métrico decimal se usa en todo el mundo para trabajos científicos.

El metro (m) se definió originalmente como una diezmillonésima parte de la distancia entre el ecuador y el polo norte a lo largo del meridiano de París. Entre 1792 y 1799 esta distancia fue medida parcialmente por científicos franceses; consideraron que la Tierra era una esfera perfecta y estimaron la distancia total, la que dividieron entre 10 millones. Más tarde, después de descubrirse que la forma de la Tierra no es esférica, el metro se definió como la distancia entre dos finas líneas trazadas en una barra de aleación de platino e iridio, el metro patrón internacional, conservado en París. Después volvió a definirse a partir de la longitud de onda de la luz rojiza emitida por una fuente de kriptón 86. Sin embargo, las medidas de la ciencia moderna requerían una precisión aún mayor, y en 1983 el metro se definió como la longitud del espacio recorrido por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 de segundo.

En 1900 el sistema métrico se había ampliado para convertirse en el sistema MKS (metro-kilogramo-segundo), en el que la unidad de masa no era el gramo sino el kilogramo, y que además incluía la unidad de tiempo, el segundo. Posteriormente se añadió una unidad electromagnética, el ampere, para formar el sistema MKSA (metro-kilogramo-segundo-ampere). Como en la ciencia se necesitaban unidades más pequeñas, también se empleaba el sistema CGS o cegesimal (centímetro-gramo-segundo). La unidad de volumen se definió inicialmente como 1 decímetro cúbico, pero en 1901 se redefinió como el volumen ocupado por un kilogramo de agua a 4 °C de temperatura y una presión de 760 mm de mercurio; en 1964 se volvió a la definición original.

Para expresar múltiplos decimales de las unidades del sistema métrico se emplea una serie de prefijos griegos, mientras que para expresar fracciones decimales se utilizan otros prefijos latinos. El Sistema Internacional de unidades adoptó esos prefijos y añadió otros.

Sistema métrico decimal

Es el conjunto de medidas que se derivan de la longitud denominada metro.

Clases de medidas. Hay 5 clases de medidas: longitud, superficie, volumen, capacidad y masa.

Unidades de longitud

La unidad de longitud es el metro, que se representa con la letra *m*. Los múltiplos del metro se forman anteponiendo a la palabra metro los prefijos: deca (D), hecto (H) y kilo (k) que significan: diez, cien y mil; los submúltiplos se forman anteponiendo los prefijos: deci (d), centi (c) y mili (m), cuyo significado es: décima, centésima y milésima.

Equivalencias de longitud en el sistema métrico decimal

$$1 \text{ km} = 10 \text{ Hm} = 10^2 \text{ Dm} = 10^3 \text{ m} = 10^4 \text{ dm} = 10^5 \text{ cm} = 10^6 \text{ mm}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte 2.5 kilómetros a metros.

Solución

Se emplea la equivalencia correspondiente y se efectúa la conversión.
Equivalencia: 1 km = 10^3 m

$$\left(\frac{2.5 \text{ km}}{1}\right)\left(\frac{10^3 \text{m}}{1 \text{ km}}\right) = \frac{2.5 \times 10^3 \text{m} \cdot \text{km}}{1 \text{ km}} = \frac{2.5 \times 1\,000}{1} \text{m} = 2\,500 \text{ m}$$

2 Realiza la conversión de 450 centímetros a decámetros.

Solución

La equivalencia es: 10^2 Dm = 10^5 cm, se efectúa la conversión y se obtiene:

$$\left(\frac{450 \text{ cm}}{1}\right)\left(\frac{10^2 \text{ Dm}}{10^5 \text{ cm}}\right) = \frac{450 \times 10^2 \text{ Dm} \cdot \text{cm}}{10^5 \text{ cm}} = 450 \times 10^{-3} \text{ Dm} = 0.45 \text{ Dm}$$

3 Convierte 0.52 hectómetros a milímetros.

Solución

En este ejemplo la equivalencia es: 10 Hm = 10^6 mm

$$\left(\frac{0.52 \text{ Hm}}{1}\right)\left(\frac{10^6 \text{ mm}}{10 \text{ Hm}}\right) = \frac{0.52 \times 10^6 \text{mm} \cdot \text{Hm}}{10 \text{ Hm}} = 0.52 \times 10^5 \text{mm} = 52\,000 \text{ mm}$$

EJERCICIO **105**

Realiza las siguientes conversiones:

1. 8 m ______ dm
2. 15 Dm ______ cm
3. 7.05 Hm ______ dm
4. 19 mm ______ m
5. 185 cm ______ dm
6. 9 cm ______ dm
7. 170 005 km ______ Dm
8. 54 Hm ______ m
9. 0.806 dm ______ cm
10. 16.50 km ______ Hm
11. 380 Dm ______ km
12. 6 300 m ______ dm

13. 380 Hm	______ km	17. 3.016 m	______ mm
14. 900 m	______ Hm	18. 0.85 m	______ mm
15. 600 cm	______ m	19. 15.480 km	______ m
16. 45.63 m	______ cm	20. 75.6 Dm	______ m

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Unidades de superficie

La unidad de superficie es el metro cuadrado, que es un cuadrado que tiene de lado un metro lineal y se representa con m^2.

Equivalencias de superficie en el sistema métrico decimal

$$1\text{ km}^2 = 10^2\text{ Hm}^2 = 10^4\text{ Dm}^2 = 10^6\text{ m}^2 = 10^8\text{ dm}^2 = 10^{10}\text{ cm}^2 = 10^{12}\text{ mm}^2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte 64 000 m^2 a km^2.

Solución

La equivalencia es: 1 km^2 = 10^6 m^2, al realizar la conversión se obtiene:

$$\left(\frac{64\,000\text{ m}^2}{1}\right)\left(\frac{1\text{ km}^2}{10^6\text{ m}^2}\right) = \frac{64\,000\text{ m}^2\cdot\text{km}^2}{1\,000\,000\text{ m}^2} = 0.064\text{ km}^2$$

2 Convierte 38 Dm^2 a dm^2.

Solución

La equivalencia es: 10^4 Dm^2 = 10^8 dm^2, al hacer la conversión se determina que:

$$\left(\frac{38\text{ Dm}^2}{1}\right)\left(\frac{10^8\text{ dm}^2}{10^4\text{ Dm}^2}\right) = \frac{38\times10^8\text{ dm}^2\cdot\text{Dm}^2}{10^4\text{ Dm}^2} = 38\times10^4\text{ dm}^2 = 380\,000\text{ dm}^2$$

EJERCICIO **106**

Realiza la conversión de las siguientes medidas de superficie:

1. 3 m^2	______ dm^2	11. 300 000 m^2	______ km^2
2. 16 m^2	______ cm^2	12. 160 000 cm^2	______ m^2
3. 7 m^2	______ mm^2	13. 13 000 dm^2	______ m^2
4. 8 km^2	______ m^2	14. 9 800 Hm^2	______ km^2
5. 19 Hm^2	______ m^2	15. 0.0014 km^2	______ dm^2
6. 635 Dm^2	______ m^2	16. 21 Dm^2	______ dm^2
7. 28 Hm^2	______ Dm^2	17. 4.3856 m^2	______ cm^2
8. 14 000 Dm^2	______ m^2	18. 1 800 dm^2	______ m^2
9. 800 m^2	______ Dm^2	19. 45 000 m^2	______ Dm^2
10. 190 000 m^2	______ Hm^2	20. 35 dm^2	______ m^2

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Unidades de volumen

Las unidades de volumen son el metro cúbico, que es un cubo que tiene de arista un metro lineal y se representa con m^3 y el litro cuya representación es *l*.

Equivalencias de volumen en el sistema métrico decimal

$$1\ km^3 = 10^3\ Hm^3 = 10^6\ Dm^3 = 10^9\ m^3 = 10^{12}\ dm^3 = 10^{15}\ cm^3 = 10^{18}\ mm^3$$
$$1\ kl = 10\ Hl = 10^2\ Dl = 10^3\ l = 10^4\ dl = 10^5\ cl = 10^6\ ml$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte 0.00726 Hm^3 a m^3.

Solución

Se emplea la equivalencia correspondiente y se efectúa la conversión.
Equivalencia: $10^3\ Hm^3 = 10^9\ m^3$

$$\left(\frac{0.00726\ Hm^3}{1}\right)\left(\frac{10^9\ m^3}{10^3\ Hm^3}\right) = \frac{0.00726 \times 10^9\ m^3 \cdot Hm^3}{10^3\ Hm^3} = 0.00726 \times 10^6\ m^3 = 7\,260\ m^3$$

2 Realiza la conversión de 180 000 cm^3 a m^3.

Solución:

La equivalencia es: $10^{15}\ cm^3 = 10^9\ m^3$, se efectúa la conversión y se obtiene:

$$\left(\frac{180\,000\ cm^3}{1}\right)\left(\frac{10^9\ m^3}{10^{15}\ cm^3}\right) = \frac{180\,000 \times 10^9\ m^3 \cdot cm^3}{10^{15}\ cm^3} = 180\,000 \times 10^{-6}\ m^3 = 0.18\ m^3$$

3 Convierte 2 500 ml a Hl.

Solución:

En este ejemplo la equivalencia es: 10^6 ml = 10 Hl

$$\left(\frac{2\,500\ ml}{1}\right)\left(\frac{10\ Hl}{10^6\ ml}\right) = \frac{2\,500 \times 10\ Hl \cdot ml}{10^6\ ml} = 2\,500 \times 10^{-5}\ Hl = 0.025\ Hl$$

4 ¿Cuál es el resultado de convertir 7 kl a Hl?

Solución:

La equivalencia que se utiliza para realizar la conversión es: 1 kl = 10 Hl

$$\left(\frac{7\ kl}{1}\right)\left(\frac{10\ Hl}{1\ kl}\right) = \frac{70\ Hl \cdot kl}{1\ kl} = 70\ Hl$$

EJERCICIO **107**

Realiza la conversión de las siguientes medidas de volumen:

1. 24 m^3 ______ dm^3
2. 0.0138 m^3 ______ cm^3
3. 19 Dl ______ l
4. 149 dm^3 ______ cm^3
5. 7 cm^3 ______ mm^3
6. 9.54 kl ______ l
7. 0.485 m^3 ______ dm^3
8. 0.975 m^3 ______ cm^3
9. 59 l ______ dl
10. 3.146 m^3 ______ dm^3

11. 40 000 dm^3	______ m^3	21. 7.506 Dm^3	______ m^3
12. 3.905 l	______ ml	22. 400 dl	______ Dl
13. 15 000 000 cm^3	______ m^3	23. 0.008316 m^3	______ cm^3
14. 60 000 mm^3	______ cm^3	24. 54.75 l	______ cl
15. 9.6 Hl	______ Dl	25. 0.0000386 m^3	______ cm^3
16. 0.00045 m^3	______ mm^3	26. 1 800 dm^3	______ m^3
17. 16.85 m^3	______ dm^3	27. 3 280 cl	______ l
18. 15.3 kl	______ Hl	28. 45 000 m^3	______ Dm^3
19. 0.0075 m^3	______ cm^3	29. 35 dm^3	______ m^3
20. 43 m^3	______ dm^3	30. 17 000 ml	______ cl

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Unidades de masa

En el sistema internacional de unidades el kilogramo (kg) es el patrón de medida para las unidades de masa.

Equivalencias de masa en el sistema métrico decimal

$$1\text{ kg} = 10\text{ Hg} = 10^2\text{ Dg} = 10^3\text{ g} = 10^4\text{ dg} = 10^5\text{ cg} = 10^6\text{ mg}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte 1 200 cg a Dg.

Solución

Se emplea 10^2 Dg = 10^5 cg para realizar la conversión:

$$\left(\frac{1200\text{ cg}}{1}\right)\left(\frac{10^2\text{ Dg}}{10^5\text{ cg}}\right) = \frac{1200\times10^2\text{Dg}\cdot\text{cg}}{10^5\text{ cg}} = 1200\times10^{-3}\text{Dg} = 1.2\text{ Dg}$$

2 ¿A cuántos miligramos equivalen 0.023 kilogramos?

Solución

Para realizar esta conversión se emplea la equivalencia: 1 kg = 10^6 mg

$$\left(\frac{0.023\text{ kg}}{1}\right)\left(\frac{10^6\text{ mg}}{1\text{ kg}}\right) = \frac{0.023\times10^6\text{ mg}\cdot\text{kg}}{1\text{ kg}} = 23\ 000\text{ mg}$$

EJERCICIO 108

Realiza las siguientes conversiones con unidades de masa.

1. 3 kg	______ g	6. 5 000 g	______ kg
2. 700 dg	______ kg	7. 38 000 mg	______ Hg
3. 156 Hg	______ Dg	8. 6 400 cg	______ g
4. 36 kg	______ Dg	9. 18 000 dg	______ g
5. 7 Hg	______ Dg	10. 38 000 g	______ Hg

11. 40 dg ______ g
12. 850 g ______ Dg
13. 1 500 mg ______ g
14. 4 900 cg ______ Dg
15. 24 000 dg ______ g
16. 80 dg ______ Hg
17. 24.5 dg ______ g
18. 6.35 cg ______ dg
19. 17.28 cg ______ g
20. 38.5 g ______ mg

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Números denominados

Equivalencias de medidas de tiempo

1 siglo o centuria = 100 años
1 década = 10 años
1 lustro = 5 años
1 año = 12 meses
1 mes = 30 días
1 semana = 7 días
1 día = 24 horas
1 hora = 60 minutos = 3 600 segundos
1 minuto (min) = 60 segundos (s)

Equivalencias de medidas angulares

Grados (°) = 60 minutos　　Minutos (′) = 60 segundos (″)

Todos los sistemas cuya ley de formación no sigue la ley decimal, dan lugar a los números denominados.

Analicemos algunos ejemplos de representación de un número denominado como una sola cantidad:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa ocho horas, cuarenta y cinco minutos y diecinueve segundos como número denominado.

Solución

La cantidad se expresa de la siguiente manera: 8 h 45 min 19 s.

2 Escribe en forma de número denominado: treinta y cinco grados, treinta minutos, seis segundos.

Solución

Se expresa la cantidad de la siguiente manera: 35° 30′ 6″.

3 Convierte a horas, minutos y segundos: 4 563 segundos.

Solución

Se divide la cantidad entre 3 600 s para obtener las horas, posteriormente se divide el residuo entre 60 para obtener los minutos y el último residuo representa a los segundos.

$$3\,600\,\overline{)\,4\,563}\quad \text{cociente } 1,\ \text{residuo } 963$$

$$60\,\overline{)\,963}\quad \text{cociente } 16;\ 363;\ \text{residuo } 3$$

Por tanto, 4 563 segundos = 1 h 16 min 3 s.

4 Escribe en horas el número: 13 horas, 18 minutos.

Solución

Se convierten los 18 minutos a horas:

$$\left(\frac{18\text{ min}}{1}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{60\text{ min}}\right)=\frac{18\text{ h}\cdot\text{min}}{60\text{ min}}=\frac{18}{60}\text{h}=\frac{3}{10}\text{h}$$

El resultado se expresa: $13\frac{3}{10}$h

5 Expresa en años el número denominado: 4 años, 7 meses y 20 días.

Solución

Se convierten los días a meses y se suman a los 7 meses:

$$\left(\frac{20\text{ días}}{1}\right)\left(\frac{1\text{ mes}}{30\text{ días}}\right)=\frac{20}{30}\text{mes}=\frac{2}{3}\text{mes} \quad ; \quad 7\text{ meses}+\frac{2}{3}\text{meses}=\frac{23}{3}\text{meses}$$

Los meses resultantes se convierten a años:

$$\left(\frac{23\text{ meses}}{3}\right)\left(\frac{1\text{ año}}{12\text{ meses}}\right)=\frac{23}{36}\text{años}$$

El resultado final es: $4\frac{23}{36}$ años.

EJERCICIO 109

Expresa como número denominado cada una de las siguientes cantidades:

1. Treinta y cinco años, nueve meses con veintitrés días.
2. Una hora con treinta segundos.
3. Ciento veinticuatro grados, cuarenta minutos y cincuenta y seis segundos.
4. Cinco meses, doce días, diecisiete horas.
5. Cuarenta y tres años, siete meses y diecisiete días.
6. Veinticinco meses, diecinueve días, ocho horas y cuarenta y cinco minutos.
7. Cuatrocientos treinta y ocho grados con cuarenta y tres segundos.
8. Tres décadas, ocho años, once meses y cuatro días.

Expresa las siguientes cantidades con números denominados:

9. 0.25 meses en días y horas.
10. 40.3° en grados y minutos.
11. $3\frac{5}{8}$ años en años, meses y días.
12. 145.98° en grados, minutos y segundos.
13. 3.745 décadas en años, meses y días.
14. 35.67° en grados, minutos y segundos.
15. 4.05 años en años, meses y días.
16. 85.61° en grados, minutos y segundos.

Expresa las siguientes cantidades como se indica:

17. 3 años, 10 meses, 15 días en años.
18. 78° 34′ 30″ en grados.
19. 6 h 43 min 12 s en horas.
20. 324° 51′ 36″ en grados.
21. 3 décadas, 8 años, 18 días en décadas.
22. 148° 54″ en grados.
23. 2 h 30 s en minutos.
24. 25 días, 8 horas, 24 minutos en horas.

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Suma

Se colocan los números en columnas, de tal forma que se correspondan las distintas unidades. La suma se inicia por las unidades menores, la reducción a unidades de orden superior, misma que se suma con las unidades de la siguiente columna y así, sucesivamente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de 45° 20′ 35″ + 12° 42′ 33″?

Solución

Se acomodan las cantidades de manera vertical para que coincidan las respectivas unidades y se realizan las sumas.

$$\begin{array}{r} 45° \ 20' \ 35'' \\ + \quad 12° \ 42' \ 33'' \\ \hline 57° \ 62' \ 68'' \end{array}$$

Al hacer las equivalencias 1′ = 60″ y 1° = 60′, entonces el resultado se expresa como:

$$57° \ 62' \ 68'' = 57° \ 63' \ 8'' = 58° \ 3' \ 8''$$

2 Efectúa: 16 h 30 min 9 s + 26 h 45 min 53 s + 15 h 21 min 17 s.

Solución

Se acomodan las cantidades como en el ejemplo anterior y se realizan las operaciones.

$$\begin{array}{r} 16 \text{ h } 30 \text{ min } 9 \text{ s} \\ + \quad 26 \text{ h } 45 \text{ min } 53 \text{ s} \\ 15 \text{ h } 21 \text{ min } 17 \text{ s} \\ \hline 57 \text{ h } 96 \text{ min } 79 \text{ s} \end{array}$$

Se aplican las equivalencias: 1 h = 60 min, 1 min = 60 s y el resultado se expresa como:

57 h 96 min 79 s = 57 h 97 min 19 s = 58 h 37 min 19 s

EJERCICIO 110

Realiza las siguientes sumas:

1. $\begin{array}{r} 5 \text{ h } 14 \text{ min } 35 \text{ s} \\ + \quad 3 \text{ h } 25 \text{ min } 38 \text{ s} \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 48° \ 17' \ 24'' \\ + \quad 169° \ 25' \ 38'' \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 6 \text{ años } 4 \text{ meses } 15 \text{ días} \\ + \quad 2 \text{ años } 5 \text{ meses } 8 \text{ días} \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 378° \ 28' \quad \\ + \quad 128° \quad 25'' \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 15 \text{ h } 23 \text{ min } 56 \text{ s} \\ + \quad 20 \text{ h } 42 \text{ min } 4 \text{ s} \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 46° \ 55' \ 31'' \\ + \quad 224° \quad 59'' \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{r} 24 \text{ días } 16 \text{ h } 32 \text{ min } 43 \text{ s} \\ + \quad 8 \text{ días } 12 \text{ h } 56 \text{ min } 8 \text{ s} \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{r} 6 \text{ años } 7 \text{ meses } 27 \text{ días} \\ + \quad 4 \text{ años } 3 \text{ meses } 15 \text{ días} \\ 11 \text{ años } 10 \text{ meses } 19 \text{ días} \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 9° \ 18' \ 42'' \\ + \quad 120° \ 45' \ 53'' \\ 156° \ 59' \ 35'' \\ \hline \end{array}$

10. $\begin{array}{r} 3 \text{ años } 7 \text{ meses } 12 \text{ días } 10 \text{ h } 26 \text{ min} \\ + \quad 4 \text{ años } 9 \text{ meses } 21 \text{ días } 17 \text{ h } 41 \text{ min} \\ 7 \text{ años } 10 \text{ meses } 5 \text{ días } 11 \text{ h } 20 \text{ min} \\ 8 \text{ años } 8 \text{ meses } 6 \text{ días } 14 \text{ h } 12 \text{ min} \\ \hline \end{array}$

 Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Resta

Se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo que las unidades correspondan. Si algún sustraendo es mayor que el minuendo, se le agrega la unidad equivalente superior inmediata para que la resta sea posible.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de 10 días 7 h 15 min 16 s – 4 días 8 h 20 min 18 s?

Solución

En este ejemplo algunos de los elementos del minuendo son menores que el sustraendo, por lo que el minuendo se expresa como: 10 días 7 h 15 min 16 s = 9 días 30 h 74 min 76 s.

```
   10 días 7 h 15 min 16 s          9 días 30 h 74 min 76 s
 –  4 días 8 h 20 min 18 s        – 4 días  8 h 20 min 18 s
                                    5 días 22 h 54 min 58 s
```

Se efectúa la resta y se obtiene como resultado

5 días 22 h 54 min 58 s

2 Realiza: 123° 42″ – 79° 25′ 30″.

Solución

123° 42″ se expresa como: 122° 60′ 42″ para efectuar la operación.

```
   122° 60′ 42″
 –  79° 25′ 30″
    43° 35′ 12″
```

Por tanto, el resultado es: 43° 35′ 12″

EJERCICIO 111

Realiza las siguientes restas:

```
1.    4 años 9 meses 24 días
   –  1 año  7 meses 16 días

2.   135° 18′ 40″
   – 105° 12′ 16″

3.   10 meses 27 días 13 h
   –  8 meses 29 días 20 h

4.    220° 56′ 24″
   –  129° 42′ 55″

5.    6 meses 18 días 23 h
   –  5 meses 23 días  9 h

6.    250°
   –  233° 15′ 24″

7.    7 meses  9 días 18 h 23 min
   –  2 meses 10 días 22 h 46 min

8.    96°     36″
   –  58° 25′

9.    4 días 7 h 20 min
   –  3 días 2 h 35 min

10.   9 h  7 min 48 s
   –  8 h 10 min 35 s
```

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Multiplicación

Esta operación sólo es posible cuando el multiplicador es un número natural.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa: 3 días 10 h 14 min × 5.

Solución

Las cantidades se acomodan de forma vertical y 5 multiplica a cada una de ellas.

$$\begin{array}{r} 3 \text{ días } 10 \text{ h } 14 \text{ min} \\ \times \qquad\qquad\qquad 5 \\ \hline 15 \text{ días } 50 \text{ h } 70 \text{ min} \end{array}$$

Este resultado se expresa de la siguiente forma:

15 días 50 h 70 min = 15 días 51 h 10 min = 17 días 3 h 10 min

2 ¿Cuál es el resultado de 56° 25″ × 12?

Solución

Se acomodan las cantidades y se efectúa el producto.

$$\begin{array}{r} 56^\circ \;\; 25'' \\ \times \qquad 12 \\ \hline 672^\circ \; 300'' \end{array}$$

Este resultado se expresa como: 672° 5′

3 Realiza: 3 décadas 5 años 6 meses × 8.

Solución

Se multiplica 8 por el número denominado y se aplican las correspondientes equivalencias para obtener como resultado: 28 décadas 4 años.

$$\begin{array}{r} 3 \text{ décadas } 5 \text{ años } 6 \text{ meses} \\ \times \qquad\qquad\qquad\qquad 8 \\ \hline 24 \text{ décadas } 40 \text{ años } 48 \text{ meses} \end{array}$$

EJERCICIO 112

Realiza las siguientes multiplicaciones:

1. 6 h 9 min 4 s × 8
2. 115° 24′ 12″ × 6
3. 15 días 5 h 48 min × 5
4. 65° 39′ 45″ × 15
5. 4 años 7 meses 23 días 4 h × 7
6. 225° 42′ 59″ × 7
7. 4 años 8 meses 16 días × 18
8. 156° 40″ × 12
9. 45 h 28 min 36 s × 2
10. 18 años 2 meses 9 días × 6

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

Esta operación sólo es posible cuando el dividendo es un número natural.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Divide: 31 h 2 min 15 s entre 5.

Solución

Se dividen las horas y el residuo se convierte en minutos y se suma a los 2 minutos.

$$\begin{array}{r|l} & 6\text{ h} \\ \hline 5 & 31\text{ h}\quad 2\text{ min}\quad 15\text{ s} \\ & 1\text{ h} \end{array}$$

$$1\text{ h} = 60\text{ min y } 60\text{ min} + 2\text{ min} = 62\text{ min}$$

Se dividen los minutos entre 5, los 2 minutos del residuo se convierten a segundos y se suman a los 15 segundos.

$$\begin{array}{r|l} & 6\text{ h } 12\text{ min} \\ \hline 5 & 31\text{ h}\quad 2\text{ min}\quad 15\text{ s} \\ & 1\text{ h } 62\text{ min} \\ & \qquad 2\text{ min} \end{array}$$

$$2\text{ min} = 120\text{ s y } 120\text{ s} + 15\text{ s} = 135\text{ s}$$

Se dividen los segundos entre 5 y se obtiene el resultado final de la operación.

$$\begin{array}{r|l} & 6\text{ h } 12\text{ min}\quad 27\text{ s} \\ \hline 5 & 31\text{ h}\quad 2\text{ min}\quad 15\text{ s} \\ & 1\text{ h } 62\text{ min} \\ & \qquad 2\text{ min } 135\text{ s} \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Por tanto, el resultado de la división es: 6 h 12 min 27 s.

2 ¿Cuál es el resultado de dividir 63° 25′ 44″ entre 12?

Solución

Se dividen los grados y el residuo se transforma en minutos y se suma a los minutos dados.

$$\begin{array}{r|l} & 5^\circ \\ \hline 12 & 63^\circ\ 25'\ 44'' \\ & 3^\circ \end{array}$$

$$3^\circ = 180' \text{ y } 180' + 25' = 205'$$

Se dividen los minutos y el residuo se convierte a segundos y se suma a los 44 segundos.

$$\begin{array}{r|l} & 5^\circ\quad 17' \\ \hline 12 & 63^\circ\quad 25'\ 44'' \\ & 3^\circ\ 205' \\ & \qquad 1' \end{array}$$

$$1' = 60'' \text{ y } 60'' + 44'' = 104''$$

(continúa)

(*continuación*)

Se dividen los segundos y se obtiene el resultado final, que es igual a: 5° 17′ 8″ con un residuo de 8″

	5°	17′	8″
12	63°	25′	44″
	1°	205′	
		1′	104″
			8″

EJERCICIO 113

Realiza las siguientes divisiones:

1. 5 ⟌ 8 años 9 meses 15 días
2. 9 ⟌ 95° 43′ 12″
3. 12 ⟌ 16 h 35 min 15 s
4. 15 ⟌ 345° 30′ 45″
5. 10 ⟌ 4 h 20 min 16 s
6. 7 ⟌ 330° 15′ 2″
7. 5 ⟌ 15 h 12 min 6 s
8. 25 ⟌ 400° 40″
9. 7 ⟌ 35 h 56 min 14 s
10. 5 ⟌ 16 años 8 meses 15 días
11. 4 ⟌ 12 meses 28 días 20 h 48 min
12. 20 ⟌ 686° 52′ 20″
13. 3 ⟌ 4 años 6 meses 18 días
14. 56 ⟌ 1 200° 49″


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 11

Razonamiento aritmético

Los cuadrados mágicos

Los cuadrados mágicos son un pasatiempo que data de hace más de 3 000 años en la antigua India. Dicho cuadrado es una tabla con el mismo número de casillas verticales que horizontales y su magia radica en el hecho de que cualquiera que sea la forma en que se sumen los números que lo conforman, ya sea de manera horizontal, vertical o diagonalmente, siempre se llegará al mismo resultado, la *constante mágica*, por ejemplo:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Los cuadrados mágicos de orden 4 fueron introducidos en el siglo XV en el Renacimiento europeo. En aquellos años de superstición solían hacer grabados en planchas de plata como conjuro contra la peste, ya que se les atribuía poderes mágicos.

A continuación se propone resolver el cuadrado mágico inventado por el pintor alemán Alberto Durero, el cual contiene en las casillas centrales inferiores el año de la gran peste: 1514, y cuya suma en forma horizontal, vertical y de sus diagonales principales es 34.

	15	14	

Problemas con números enteros

EJEMPLOS



1 Si la diferencia del triple de un número y el mismo es igual a 8, ¿cuál es el número?

Solución

Si 8 es el triple del número menos el mismo, entonces 8 es el doble del número.

Por tanto, el número es $8 \div 2 = 4$

2 Brenda multiplicó un número por 4, restó 12 al producto, sumó 18 a la diferencia, la suma la dividió entre 19 y obtuvo 2 como cociente, ¿cuál es el número?

Solución

Se comienza por el final del problema y se realizan las operaciones inversas.

2 es el resultado de dividir entre 19, entonces se multiplica: $2 \times 19 = 38$
38 es el resultado de sumar 18, luego se resta: $38 - 18 = 20$
20 es el resultado de restar 12, ahora se suma: $20 + 12 = 32$
32 es el resultado de multiplicar por 4, entonces se divide: $32 \div 4 = 8$

Finalmente, el número es 8

Propiedades

1. La suma de 2 números enteros más su diferencia es igual al doble del mayor.
   Si $a > b$, entonces $(a+b)+(a-b)=2\cdot a$
2. La suma de 2 números enteros menos su diferencia es igual al doble del número menor.
   Si $a > b$, entonces $(a+b)-(a-b)=2\cdot b$
3. Al dividir la suma de 2 números enteros entre su cociente aumentado en 1, el resultado es igual al número menor.
   Si $a > b$, entonces $(a+b)\div(a\div b+1)=b$
4. Al dividir la diferencia de 2 números enteros entre su cociente disminuido en 1, el resultado es igual al número menor.
   Si $a > b$, entonces $(a-b)\div(a\div b-1)=b$

EJEMPLOS



1 Si la suma de 2 números es 18 y la diferencia es 2, ¿cuáles son los números?

Solución

Al aplicar la propiedad 1, se suma $18+2=20$, se obtiene el doble del mayor, es decir, $20\div 2=10$, es el número mayor, luego para obtener el número menor se resta de la suma $18-10=8$

Por consiguiente, los números son 10 y 8

2 Si la diferencia de 2 números es 12 y su cociente es 3, ¿cuáles son los números?

Solución

Al aplicar el teorema 4 se tiene que: $12\div(3-1)=12\div 2=6$, el resultado es el número menor, si la diferencia es 12, entonces el número mayor es $12+6=18$

Por tanto, los números son 18 y 6

3 Entre 2 ciudades A y B hay una distancia de 480 km. A las 8 de la mañana de la ciudad A sale un automóvil con una velocidad de $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora se encontrará con un automóvil que sale a la misma hora de B hacia A con una velocidad $90\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y a qué distancia de la ciudad estará A?

Solución

70 kilómetros es la distancia que recorre en 1 hora el automóvil que sale de A.

90 kilómetros es la distancia que recorre en 1 hora el automóvil que sale de B.

En 1 hora se acercarán: 70 km + 90 km = 160 km.

La distancia entre A y B: 480 kilómetros

Tiempo que tardarán en encontrarse: $480 \div 160 = 3$ horas.

Por tanto, si salieron a las 8 de la mañana, se encontrarán a las $8 + 3 = 11$ de la mañana y a una distancia de $70(3) = 210$ kilómetros de la ciudad A.

4 Una ciudad B está situada a 240 km al este de otra ciudad A. Si a las 8 de la mañana sale un automóvil de la ciudad B con dirección este y a una velocidad de $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿en cuánto tiempo lo alcanzará un automóvil que sale de A a las 10:00 a.m. con una velocidad de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ en la misma dirección?

Solución

Si el automóvil que sale de B recorre 60 km cada hora, a las 10 de la mañana habrá recorrido $60 \times 2 = 120$ km.

La distancia entre los automóviles será de $240 + 120 = 360$ km.

80 kilómetros es la distancia que recorre el automóvil A en 1 hora.

En 1 hora se acerca $80 - 60 = 20$ km.

Distancia entre A y B a las 10:00 a.m.: 360 km

Tiempo que tardarán en encontrarse $360 \div 20 = 18$ horas.

Por consiguiente, tardará en alcanzarlo 18 horas.

5 Luis, Marcos y Andrés tienen bolsas con canicas, si se juntan las bolsas con canicas de Luis y Marcos suman 200, las bolsas de Marcos y Andrés suman 320 y las de Luis y Andrés 280 canicas, ¿cuántas canicas tiene cada uno?

Solución

Al sumar $200 + 320 + 280 = 800$, este resultado es el doble de canicas de Luis, Marcos y Andrés, entonces el total de canicas es: $800 \div 2 = 400$

Si Luis y Marcos juntos tienen 200, entonces Andrés tiene $400 - 200 = 200$ canicas.

Si Marcos y Andrés juntos tienen 320, entonces Luis tiene $400 - 320 = 80$ canicas.

Si Luis y Marcos juntos tienen 200 y Luis tiene 80 canicas, entonces Marcos $200 - 80 = 120$ canicas.

Finalmente, Luis tiene 80, Marcos 120 y Andrés 200 canicas.

6 Un tanque tiene 2 llaves y un desagüe, una vierte 80 litros en 8 minutos y la otra 60 litros en 10 minutos, además, por el desagüe salen 180 litros en 20 minutos. Si el tanque tenía 600 litros y al abrir las llaves y el desagüe al mismo tiempo tardó 30 minutos en llenarse, ¿cuál es la capacidad total del tanque?

Solución

$80 \div 8 = 10$, es el número de litros por minuto que vierte la primera llave.

$60 \div 10 = 6$, es el número de litros por minuto que vierte la segunda llave.

$180 \div 20 = 9$, es el número de litros que salen por el desagüe.

(*continúa*)

(*continuación*)
$10+6=16$, es el número de litros que vierten por minuto las 2 llaves juntas.
$16-9=7$, es el número de litros que quedan por minuto.
Entonces, en 30 minutos quedan $(30)(7)=210$ litros.

Por tanto, si el tanque tenía 600 litros, la capacidad total es de $600+210=810$ litros.

EJERCICIO **114**

1. La suma entre el cuádruplo de un número y el mismo es igual a 60, ¿cuál es el número?
2. La diferencia entre el séxtuplo de un número y el doble del mismo es igual a 20, ¿cuál es el número?
3. Se multiplica un número por 8, se suma 10 al producto, se resta 20 a la suma y la diferencia se divide entre 19, así se obtiene como cociente 2, ¿cuál es el número?
4. Se divide un número entre 9, se suma 32 al cociente, se obtiene la raíz cuadrada de la suma y este resultado se multiplica por 4, el resultado es 24, ¿cuál es el número?
5. La suma del triple de un número con 6 se multiplica por 2 y el resultado se divide entre 12, se obtiene como resultado 5, ¿cuál es el número?
6. La suma de 2 números es 29 y la diferencia es 21, ¿cuáles son los números?
7. El cociente de 2 números es 6 y la diferencia es 35, ¿cuáles son los números?
8. El doble de la diferencia de 2 números es 18 y el cuádruplo de su cociente es 16, ¿cuáles son los números?
9. Dos ciudades M y N se encuentran a 640 km de distancia entre sí. A las 10 de la mañana de la ciudad M sale un automóvil rumbo a la ciudad N, con una velocidad de $85\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a la misma hora de N sale otro automóvil rumbo a M con una velocidad de $75\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora se encontrarán y qué distancia ha recorrido cada uno?
10. Entre 2 ciudades P y Q hay una distancia de 990 km. Si a las 11:00 a.m. sale un automóvil de P en dirección a Q con una velocidad de $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora se encontrará con otro automóvil que sale a la 1 de la tarde de Q hacia P con una velocidad de $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$?
11. Un automóvil sale a las 6 de la mañana con una velocidad de $75\frac{\text{km}}{\text{h}}$, si otro automóvil sale a las 8 de la mañana con una velocidad de $105\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora el segundo automóvil alcanzará al primero?
12. Una ciudad X está situada a 180 km al oeste de una ciudad Z, si a las 9:00 a.m. sale de X un automóvil con dirección oeste a una velocidad de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora lo alcanzará un automóvil que sale de Z en la misma dirección, 1 hora después y con una velocidad de $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$?
13. Fernanda pagó por una playera y un short \$1 100, Adriana pagó por la misma playera y un par de tenis \$1 800, mientras que Alejandra compró el short y el par de tenis en \$1 700. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
14. Las edades de Paulina y Mónica suman 36, las de Mónica y Andrea 40, mientras que la suma de las edades de Paulina y Andrea es 44, ¿cuántos años tiene cada una?

15. Un tanque de 720 litros de capacidad tiene 3 llaves, una de ellas vierte 65 litros en 13 minutos, otra vierte 70 litros en 10 minutos y la última vierte 90 litros en 15 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque vacío si se abren las 3 llaves al mismo tiempo?
16. Un estanque tiene 2 llaves y 2 desagües, si la primera llave vierte 100 litros en 20 minutos, la segunda 112 litros en 16 minutos, mientras que por un desagüe salen 60 litros en 15 minutos y por el otro salen 42 litros en 14 minutos, ¿cuál es la capacidad del estanque si al abrir las dos llaves y los desagües tardó 50 minutos en llenarse?
17. Un estanque con capacidad de 5 400 litros tiene 2 llaves, una vierte 42 litros en 6 minutos y la otra 64 litros en 8 minutos, también tiene un desagüe por el que salen 48 litros en 12 minutos, si el estanque tiene 2 100 litros y se abren las llaves y el desagüe al mismo tiempo, ¿cuánto tardará en llenarse?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Problemas con fracciones

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Al dividir 60 entre cierto número se obtiene $\frac{3}{4}$, ¿cuál es el número?

Solución

60 es el dividendo y $\frac{3}{4}$ el cociente, entonces se divide 60 entre el cociente para obtener el divisor.

$$60 \div \frac{3}{4} = \frac{(60)(4)}{3} = \frac{240}{3} = 80$$

Por tanto, si se divide 60 entre 80 se obtiene $\frac{3}{4}$

2 Al multiplicar $\frac{5}{2}$ por cierto número se obtiene $\frac{1}{20}$, ¿cuál es el número?

Solución

$\frac{5}{2}$ es uno de los factores y $\frac{1}{20}$ el producto, entonces se divide $\frac{1}{20}$ entre $\frac{5}{2}$ y se obtiene el otro factor.

$$\frac{1}{20} \div \frac{5}{2} = \frac{(1)(2)}{(20)(5)} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

Por tanto, el número es $\frac{1}{50}$

3 Un granjero tiene 200 animales, la cuarta parte son patos, la tercera parte del resto son vacas, las $\frac{2}{5}$ partes del resto cerdos y los demás son gallinas, ¿cuántas gallinas tiene?

Solución

La cuarta parte son patos:

$\frac{1}{4}(200) = \frac{200}{4} = 50$, entonces hay 50 patos y restan 150 animales.

La tercera parte del resto son vacas:

$\frac{1}{3}(150) = \frac{150}{3} = 50$, por tanto hay 50 vacas y restan 100 animales.

Las dos quintas partes del resto son cerdos:

$\frac{2}{5}(100) = \frac{200}{5} = 40$, entonces hay 40 cerdos y restan 60 animales.

Finalmente, el número de gallinas es 60

4 Rodolfo gastó la novena parte de su dinero y le quedaron \$32 000, ¿cuánto dinero tenía?

Solución

Si Rodolfo gastó la novena parte, entonces \$32 000 son los $\frac{8}{9}$ del total de dinero que tenía.

Por tanto, se divide 32 000 entre $\frac{8}{9}$

$$32\,000 \div \frac{8}{9} = \frac{(32\,000)(9)}{8} = \frac{288\,000}{8} = 36\,000$$

Por consiguiente, Rodolfo tenía \$36 000

5 Mauricio compró una camisa y unos pantalones en \$1 000, si la camisa costó la tercera parte del precio del pantalón, ¿cuánto costó el pantalón?

Solución

Si la camisa costó la tercera parte del pantalón, \$1 000 son $\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ del precio del pantalón, entonces el costo del pantalón es: $1\,000 \div \frac{4}{3} = \frac{(1\,000)(3)}{4} = \frac{3\,000}{4} = 750$

Por consiguiente, el precio del pantalón es de \$750

6 Víctor puede hacer un trabajo en 6 horas y Alberto hace el mismo en 8 horas. ¿En cuántas horas podrán hacer el mismo trabajo juntos?

Solución

En 1 hora Víctor hace $\frac{1}{6}$ del trabajo.

En 1 hora Alberto hace $\frac{1}{8}$ del trabajo.

Ambos en 1 hora harán $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{4+3}{24}=\frac{7}{24}$ del trabajo.

Luego, para hacer los $\frac{24}{24}=1$ trabajo, se divide:

$$1 \div \frac{7}{24} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$$

Por tanto, ambos tardarán $3\frac{3}{7}$ horas en realizar el mismo trabajo.

7 Dos llaves llenan un depósito en 8 horas, si una de ellas lo llena en 12 horas, ¿en cuánto tiempo lo llenará la otra llave?

Solución

En 1 hora ambas llaves llenan $\frac{1}{8}$ del depósito.

En 1 hora una de las llaves llena $\frac{1}{12}$ del depósito.

La otra llave llena $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{3-2}{24}=\frac{1}{24}$ del depósito.

Por tanto, la otra llave lo llena en 24 horas.

8 Un depósito tiene 2 llaves y un desagüe, una de las llaves tarda 6 horas en llenarlo y la otra lo llena en 4 horas. Si está el depósito lleno tarda 8 horas en vaciarse. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse si se abren al mismo tiempo las 2 llaves y el desagüe?

Solución

En 1 hora las 2 llaves llenan,

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{2+3}{12}=\frac{5}{12} \text{ del depósito.}$$

En 1 hora se vacía $\frac{1}{8}$ del depósito.

Luego, abriendo todo al mismo tiempo en 1 hora se llena

$$\frac{5}{12}-\frac{1}{8}=\frac{10-3}{24}=\frac{7}{24} \text{ del depósito.}$$

Entonces, tardará en llenarse,

$$1\div\frac{7}{24}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$$

Finalmente, el depósito se llenará en $3\frac{3}{7}$ horas.

EJERCICIO 115

1. Si al multiplicar un número por $\frac{2}{3}$ se obtiene 20 como producto, ¿cuál es el número?
2. Si al dividir un número entre $\frac{1}{2}$ se obtiene $\frac{5}{2}$ como cociente, ¿cuál es el número?
3. Al multiplicar $\frac{4}{5}$ por cierto número se obtiene 3 como producto, ¿cuál es el número?
4. Al dividir $\frac{5}{6}$ entre cierto número se obtiene $\frac{5}{4}$ como resultado, ¿cuál es el número?
5. La cuarta parte de un número es 6, ¿cuál es el número?
6. Las tres quintas partes de un número son $\frac{6}{7}$, ¿cuál es el número?
7. Al preguntar Luis a su profesor de matemáticas la hora, éste le responde que son los tres cuartos del cuádruplo de un tercio de las 9 de la mañana, ¿qué hora es?
8. Margarita tiene la quinta parte de las tres cuartas partes del quíntuplo de la edad de Brenda. ¿Cuántos años tiene Margarita, si Brenda tiene 24 años?
9. El cociente de 2 números es $\frac{5}{3}$ y su MCD es 14, ¿cuáles son los números?
10. El cociente de 2 números es $\frac{4}{7}$ y su mcm es 140, ¿cuáles son los números?
11. El cociente de 2 números es $\frac{3}{2}$ y su MCD es 30, ¿cuál es el mcm de los números?
12. La población de un colegio es de 600 alumnos. Si las dos terceras partes de los hombres asisten a un torneo de futbol, ¿cuántos hombres se quedaron en el colegio, si las tres cuartas partes del total son mujeres?
13. Una región produce 750 toneladas de maíz, de las cuales utiliza la quinceava parte para consumo de su comunidad, las tres quintas partes del resto se envían a la Ciudad de México y el resto lo exportan, ¿cuántas toneladas son exportadas?

14. Adrián hace su testamento dejando las dos quintas partes de su fortuna a sus hijos, la cuarta parte a su esposa, la quinta parte a su chofer y $3 750 000 a una institución de beneficencia. ¿A cuánto asciende su fortuna?
15. José construye una barda en 24 días, David en 12 y Pedro en 8 días. ¿En cuánto tiempo la construirán los 3 juntos?
16. Una llave llena un depósito en 6 horas, otra lo llena en 9, ¿en cuánto tiempo lo llenarán si se abren al mismo tiempo ambas llaves?
17. Dos llaves llenan un depósito en 4 horas, si una de ellas lo llena en 12 horas, ¿en cuánto tiempo lo llena la otra llave?
18. Una llave llena un depósito en 5 horas, otra lo llena en 3 horas 20 minutos. Si se abren las 2 llaves al mismo tiempo, ¿qué parte del depósito se llena en 1 hora?
19. Un depósito tiene 2 llaves y 2 desagües. Una de las llaves tarda 8 horas en llenarlo y la otra 12 horas, si se abre uno de los desagües cuando el depósito está lleno tarda 24 horas en vaciarse, mientras que con el otro desagüe tarda 12 horas. ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse si se abren al mismo tiempo las llaves y los desagües?
20. Un depósito de agua tiene 2 llaves, una de ellas lo llena en 36 minutos, mientras que la otra lo llena en 12 minutos. Si el depósito está lleno hasta los $\frac{4}{9}$ de su capacidad, ¿en cuánto tiempo acabará de llenarse si se abren al mismo tiempo las 2 llaves?
21. Mario y José Luis pintan una barda en 4 días; Mario trabajando solo, tardaría 6 días. ¿En cuántos días la pinta José Luis?
22. Alfredo hace un trabajo en 12 horas, Juan y Pedro juntos hacen el mismo en 6 horas. ¿En cuánto tiempo lo harán Alfredo y Juan, si Pedro tarda 8 horas en hacer el mismo trabajo?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Problemas de agrupación

En ocasiones es conveniente agrupar u ordenar las operaciones de tal forma que al resolverlas el proceso sea más sencillo.

Para resolver los siguientes problemas se utilizarán algunas fórmulas y conceptos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Deduce la fórmula para hallar la suma de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$.

Solución

Sea $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$, se invierte el orden de los sumandos de S y se efectúa la suma de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 & & n+1 & & n+1 \end{array}$$

Existen $(n + 1)$ sumandos y son n términos, la suma es:

$$2S = n(n + 1)$$

Si $n(n + 1)$ es el doble de la suma, entonces la suma es:

$$\boldsymbol{S = \frac{n(n+1)}{2}}$$

La cual se conoce como la fórmula de Gauss, para hallar la suma de los primeros n números naturales.

2 Calcula la suma de $4 + 8 + 12 + 16 + \ldots + 200$.

Solución

Los términos de la suma son múltiplos de 4, al aplicar la propiedad distributiva de los números reales $a(b + c) = ab + ac$, la suma se escribe de la siguiente forma:

$$4 + 8 + 12 + 16 + \ldots + 200 = 4(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50)$$

Al aplicar la fórmula de Gauss en la suma $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50$ con $n = 50$ se tiene que:

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{50(50+1)}{2} = \frac{(50)(51)}{2} = \frac{2\,550}{2} = 1275$$

Luego:

$$\begin{aligned} 4 + 8 + 12 + 16 + \ldots + 200 &= 4(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50) \\ &= 4(1\,275) \\ &= 5\,100 \end{aligned}$$

Por tanto, $4 + 8 + 12 + 16 + \ldots + 200 = 5\,100$

3 Determina el resultado de $1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1\,024$.

Solución

La suma se escribe de la siguiente manera:

$$1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1\,024 = 1 + (-4)^1 + (-4)^2 + (-4)^3 + (-4)^4 + (-4)^5$$

La expresión anterior tiene la forma:

$$\mathbf{1 + a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}}$$

Donde $a = -4$, $n = 5$:

$$\begin{aligned} 1 + (-4)^1 + (-4)^2 + (-4)^3 + (-4)^4 + (-4)^5 &= \frac{(-4)^{5+1} - 1}{(-4) - 1} = \frac{(-4)^6 - 1}{-4 - 1} = \frac{4\,096 - 1}{-5} \\ &= \frac{4\,095}{-5} = -819 \end{aligned}$$

Por consiguiente, $1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1\,024 = -819$

4 Escribe 111 111 como suma de potencias de 10.

Solución

La cantidad 111 111 se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 111\,111 &= 100\,000 + 10\,000 + 1\,000 + 100 + 10 + 1 \\ &= 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 \end{aligned}$$

Por tanto, $111\,111 = 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0$

5 Escribe $2^7 + 2^7$ como potencia de 2.

Solución

$2^7 + 2^7 = 2^7(1 + 1)$ Propiedad distributiva de los números reales.
$= 2^7(2)$
$= 2^7(2)^1$
$= 2^{7+1}$ Teorema de los exponentes $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$= 2^8$

Por consiguiente, $2^7 + 2^7 = 2^8$

6 ¿Cuántos dígitos tiene el producto de $2^{2006} \times 5^{2012}$?

Solución

5^{2012} se descompone de la siguiente forma:

$$5^{2012} = 5^{2006} \times 5^{6}$$

Luego:

$$2^{2006} \times 5^{2012} = 2^{2006} \times \left(5^{2006} \times 5^{6}\right)$$

$= \left(2^{2006} \times 5^{2006}\right) \times \left(5^{6}\right)$ Propiedad asociativa de los números reales.

$= \left(2 \times 5\right)^{2006} \times 5^{6}$ Teorema de los $\left(a \cdot b\right)^{n} = a^{n} \cdot b^{n}$

$= \left(2 \times 5\right)^{2006} \times 5^{6}$

$= \left(2 \times 5\right)^{2006} \times 15\,625$

$= 15\,625 \times 10^{2006}$ Propiedad conmutativa de los números reales.

(15 625: 5 dígitos; 10^{2006}: 2 006 dígitos)

Por tanto, el producto tiene 5 + 2 006 = 2 011 dígitos.

7 Calcula el producto de todos los divisores de $3^{100} \times 5^{100}$

Solución

Los divisores de 3^{100} son: $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{100}$

Los divisores de 5^{100} son: $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, \ldots, 5^{100}$

Los divisores de $3^{100} \times 5^{100}$ se obtienen al multiplicar cada uno de los divisores de 3^{100} por los divisores de 5^{100}, es decir:

$$\begin{array}{cccccc}
3^0 \times 5^0 & 3^0 \times 5^1 & 3^0 \times 5^2 & 3^0 \times 5^3 & \ldots & 3^0 \times 5^{100} \\
3^1 \times 5^0 & 3^1 \times 5^1 & 3^1 \times 5^2 & 3^1 \times 5^3 & \ldots & 3^1 \times 5^{100} \\
3^2 \times 5^0 & 3^2 \times 5^1 & 3^2 \times 5^2 & 3^2 \times 5^3 & \ldots & 3^2 \times 5^{100} \\
3^3 \times 5^0 & 3^3 \times 5^1 & 3^3 \times 5^2 & 3^3 \times 5^3 & \ldots & 3^3 \times 5^{100} \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots \\
3^{100} \times 5^0 & 3^{100} \times 5^1 & 3^{100} \times 5^2 & 3^{100} \times 5^3 & \ldots & 3^{100} \times 5^{100}
\end{array}$$

Al multiplicar los números de cada renglón se obtiene:

$(3^0 \times 5^0) \times (3^0 \times 5^1) \times (3^0 \times 5^2) \times \ldots \times (3^0 \times 5^{100}) = 3^{101} \times (5^0 \times 5^1 \times 5^2 \times \ldots \times 5^{100})$

$(3^1 \times 5^0) \times (3^1 \times 5^1) \times (3^1 \times 5^2) \times \ldots \times (3^1 \times 5^{100}) = (3^1)^{101} \times (5^0 \times 5^1 \times 5^2 \times \ldots \times 5^{100})$

$(3^2 \times 5^0) \times (3^2 \times 5^1) \times (3^2 \times 5^2) \times \ldots \times (3^2 \times 5^{100}) = (3^2)^{101} \times (5^0 \times 5^1 \times 5^2 \times \ldots \times 5^{100})$

.
.
.

$(3^{99} \times 5^0) \times (3^{99} \times 5^1) \times (3^{99} \times 5^2) \times \ldots \times (3^{99} \times 5^{100}) = (3^{99})^{101} \times (5^0 \times 5^1 \times 5^2 \times 5^3 \times \ldots \times 5^{100})$

$(3^{100} \times 5^0) \times (3^{100} \times 5^1) \times (3^{100} \times 5^2) \times \ldots \times (3^{100} \times 5^{100}) = (3^{100})^{101} \times (5^0 \times 5^1 \times 5^2 \times 5^3 \times \ldots \times 5^{100})$

Al multiplicar los productos se obtiene:

$$\left((3^0)^{101}\times(3^1)^{101}\times(3^2)^{101}\times(3^3)^{101}\times\ldots\times(3^{99})^{101}\times(3^{100})^{101}\right)\times\left(5^0\times5^1\times5^2\times5^3\times\ldots5^{99}\times5^{100}\right)^{101}=$$

$$\left(3^0\times3^1\times3^2\times3^3\times\ldots\times3^{99}\times3^{100}\right)^{101}\times\left(5^0\times5^1\times5^2\times5^3\times\ldots\times5^{99}\times5^{100}\right)^{101}$$

$$=\left(3^0\times3^1\times3^2\times3^3\times\ldots\times3^{99}\times3^{100}\right)^{101}\times\left(5^0\times5^1\times5^2\times5^3\times\ldots\times5^{99}\times5^{100}\right)^{101}$$

$$=\left(3^{0+1+2+3+\ldots+99+100}\right)^{101}\times\left(5^{0+1+2+3+\ldots+99+100}\right)^{101}$$

Para determinar la suma de 1 + 2 + 3 + … + 99 + 100 se utiliza la fórmula de Gauss.

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$0+1+2+3+\ldots+99+100=0+\frac{100(100+1)}{2}=\frac{(100)(101)}{2}=5\,050 \text{ con } n=100$$

$$=\left(3^{5\,050}\right)^{101}\times\left(5^{5\,050}\right)^{101}=\left(3^{5\,050}\times5^{5\,050}\right)^{101}=\left[(3\times5)^{5\,050}\right]^{101}=(3\times5)^{5\,050\times101}=(15)^{510\,050}$$

Finalmente, el producto de los divisores de $3^{100}\times5^{100}$ es $(15)^{510\,050}$

Sea N un número compuesto, su descomposición en factores primos se representa con $\boldsymbol{N = a^m b^n c^p \ldots}$ con a, b, c números primos; m, n, p números naturales.

El número de divisores de N está dado por el producto

$$\boldsymbol{(m+1)(n+1)(p+1)\ldots}$$

Ejemplo

Encuentra el número de divisores de 108.

Solución

108 se descompone en factores primos, es decir, $108 = 2\times2\times3\times3\times3 = 2^2\times3^3$

Al aplicar la fórmula con $m = 2$, $n = 3$, se tiene que:

$$(m+1)(n+1)=(2+1)(3+1)=3\times4=12$$

Por tanto, el número de divisores de 108 son 12

Suma de los divisores de un número

Sea N un número compuesto, su descomposición en factores primos está dada por $N = a^m b^n c^p\ldots$ con a, b, c números primos; m, n, p números naturales.

La suma de los divisores de N está dada por la fórmula:

$$S=\frac{a^{m+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{p+1}-1}{c-1}\cdot\ldots$$

Ejemplo

Determina la suma de los divisores de 9 000.

Solución

El número 9 000 se descompone en sus factores primos y se representa de la forma $a^m b^n c^p\ldots$, obteniendo:

$$9\,000 = 2^3\times3^2\times5^3$$

(*continúa*)

(*continuación*)
Se determinan los valores de a, b, c, m, n y p

$$a=2 \quad b=3 \quad c=5 \quad m=3 \quad n=2 \quad p=3$$

Estos valores se sustituyen en la fórmula

$$S=\frac{a^{m+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{p+1}-1}{c-1}\cdot\ldots=\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{3+1}-1}{5-1}=\frac{2^4-1}{2-1}\cdot\frac{3^3-1}{3-1}\cdot\frac{5^4-1}{5-1}$$
$$=\frac{16-1}{2-1}\cdot\frac{27-1}{3-1}\cdot\frac{625-1}{5-1}$$
$$=\frac{15}{1}\cdot\frac{26}{2}\cdot\frac{624}{4}$$
$$=(15)(13)(156)$$
$$=30\,420$$

Por tanto, la suma de los divisores de 9 000 es 30 420

EJERCICIO 116

1. Calcula la suma de: 2 + 4 + 6 + 8 + … + 20
2. Calcula la suma de: 1 + 3 + 6 + 9 + … + 60
3. Calcula la suma de: 5 + 10 + 15 + 20 + … + 200
4. Paola leyó un libro en 15 días; si el primer día leyó 3 páginas y los siguientes días leyó 5 páginas más que el día anterior, ¿cuántas páginas tiene el libro?
5. Calcula la suma de las 100 fracciones que se obtienen al formar todos los cocientes de los números de la siguiente lista: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, 6 561, 19 683
6. Calcula la suma 1 – 3 + 9 – 27 + 81 – 243 + 729 – 2 187
7. Escribe el número 111 111 111 como suma de potencias de 10
8. Escribe el número 111 111 111 111 como suma de potencias de 10
9. Escribe el número 101 010 101 como suma de potencias de 10^2
10. Calcula la suma de todos los divisores positivos de 1 800
11. Expresa $2^{10}+2^{10}$ como potencia de 2
12. Expresa $3^5+3^5+3^5$ como potencia de 3
13. Expresa $4^2+4^2+4^2+4^2$ como potencia de 4

Encuentra el número de divisores de:

14. 18
15. 60
16. 210
17. 450
18. ¿Cuántas cifras tiene el número $20^{10}\times 2^{404}\times 5^{403}$?
19. ¿Cuántas cifras tiene el número $40^{420}\times 2^{1\,001}\times 5^{1\,850}$?

 Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Problemas de repartimientos proporcionales

Es una regla por medio de la cual se divide un número propuesto en partes proporcionales a otros números dados. Para dividir un número N en partes proporcionales entre los números x, y y z; se utiliza la siguiente fórmula:

$$\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}=\frac{m+n+p}{x+y+z}=\frac{N}{S}\Rightarrow m=\frac{N\cdot x}{S},\ n=\frac{N\cdot y}{S},\ p=\frac{N\cdot z}{S}$$

Donde:
$N = m + n + p$
$S = x + y + z$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Dividir proporcionalmente 700 entre los números 2, 3 y 5.

Solución

Sean m, n y p, lo que le toca a cada parte, respectivamente.
N: cantidad a repartir $= m + n + p = 700$
S: suma los números dados $= x + y + z = 2 + 3 + 5 = 10$
Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(700)(2)}{10}=\frac{1400}{10}=140$$
$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(700)(3)}{10}=\frac{2100}{10}=210$$
$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(700)(5)}{10}=\frac{3500}{10}=350$$

Por tanto, las cantidades son: 140, 210 y 350, respectivamente.

2 Divide proporcionalmente 4 440 entre los números $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

Solución

Sean m, n y p, lo que le toca a cada parte, respectivamente.
N: cantidad a repartir $= m + n + p = 4\,440$
Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}=\frac{m}{\frac{1}{4}}=\frac{n}{\frac{5}{2}}=\frac{p}{\frac{1}{3}}$$

Al transformar a un mismo denominador (mcm) se obtiene:

$$\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}=\frac{m}{\frac{1}{4}}=\frac{n}{\frac{5}{2}}=\frac{p}{\frac{1}{3}}=\frac{m}{\frac{3}{12}}=\frac{n}{\frac{30}{12}}=\frac{p}{\frac{4}{12}}=\frac{m}{3}=\frac{n}{30}=\frac{p}{4}$$

S: suma los números dados $= x + y + z = 3 + 30 + 4 = 37$

$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(4\,440)(3)}{37}=\frac{13\,320}{37}=360$$
$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(4\,440)(30)}{37}=\frac{133\,200}{37}=3600$$
$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(4\,440)(4)}{37}=\frac{17\,760}{37}=480$$

Por tanto, las cantidades son: 360, 3 600 y 480, respectivamente.

3 Se repartieron \$1 150 a 3 personas, cuyas edades son: 12, 16 y 18 años. ¿Cuánto le tocó a cada una, si se dividió proporcionalmente a sus edades?

Solución

Sean m, n y p, lo que le toca a cada persona, respectivamente.

N: cantidad a repartir = $m + n + p$ = \$1 150

S: suma de las edades = $x + y + z = 12 + 16 + 18 = 46$ años.

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$m = \frac{N \cdot x}{S} = \frac{(1\,150)(12)}{46} = \frac{13800}{46} = 300$$
$$n = \frac{N \cdot y}{S} = \frac{(1\,150)(16)}{46} = \frac{18\,400}{46} = 400$$
$$p = \frac{N \cdot z}{S} = \frac{(1\,150)(18)}{46} = \frac{20\,700}{46} = 450$$

Por tanto, cada persona recibió \$300, \$400 y \$450 respectivamente.

4 Se repartieron \$2 800 a 4 personas, que tienen respectivamente 4, 6, 10 y 15 años. ¿Cuánto le tocó a cada una, si se dividió inversamente proporcional a sus edades?

Solución

Las razones inversas son: $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}$, lo que indica que la persona de mayor edad recibió menos cantidad de dinero.

Sean l, m, n y p, las partes respectivas, entonces:

$$\frac{l}{w} = \frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z} = \frac{l}{\frac{1}{4}} = \frac{m}{\frac{1}{6}} = \frac{n}{\frac{1}{10}} = \frac{p}{\frac{1}{15}}$$

Se transforman las fracciones a un denominador común (mcm) de 4, 6, 10 y 15

$$\frac{l}{\frac{15}{60}} = \frac{m}{\frac{10}{60}} = \frac{n}{\frac{6}{60}} = \frac{p}{\frac{4}{60}} = \frac{l}{15} = \frac{m}{10} = \frac{n}{6} = \frac{p}{4}$$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

N: cantidad a repartir = $l + m + n + p$ = \$2 800

S: suma de las edades = $w + x + y + z = 4 + 6 + 10 + 15 = 35$ años

$$l = \frac{N \cdot w}{S} = \frac{(2\,800)(15)}{35} = \frac{42\,000}{35} = 1200$$
$$m = \frac{N \cdot x}{S} = \frac{(2\,800)(10)}{35} = \frac{28\,000}{35} = 800$$
$$n = \frac{N \cdot y}{S} = \frac{(2\,800)(6)}{35} = \frac{16\,800}{35} = 480$$
$$p = \frac{N \cdot z}{S} = \frac{(2\,800)(4)}{35} = \frac{11200}{35} = 320$$

Finalmente:

La persona de 4 años recibió \$1 200

La persona de 6 años recibió \$800

La persona de 10 años recibió \$480

La persona de 15 años recibió \$320

5 Se repartieron \$744 000 entre 3 personas, de modo que la parte de la primera persona sea a la segunda como 4 es a 5, y que la parte de la segunda sea a la tercera como 3 es a 7, ¿cuánto le tocó a cada una?

Solución

La segunda parte está representada por 2 números, ésta se modificará para ser representada por un solo número.

Cuando la segunda parte es 5, la primera es 4, entonces si la segunda es 3 veces mayor, la primera también debe de ser 3 veces mayor.

Cuando la segunda parte es 3, la tercera es 7, entonces si la segunda es 5 veces mayor, la tercera también debe de ser 5 veces mayor.

1era. parte	2da. parte	3ra. parte
4	5	
	3	7
$(4)(3)=12$	$(5)(3)=15$ $(3)(5)=15$	$(7)(5)=35$
12	15	35

Por tanto, 744 000 se repartieron en proporción de 12, 15 y 35

Sean m, n y p, lo que le tocó a cada persona.

N: cantidad a repartir = $m + n + p$ = \$744 000

S: suma de las partes = $x + y + z = 12 + 15 + 35 = 62$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(744\,000)(12)}{62}=\frac{8\,928\,000}{62}=144\,000$$

$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(744\,000)(15)}{62}=\frac{11\,160\,000}{62}=180\,000$$

$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(744\,000)(35)}{62}=\frac{26\,040\,000}{62}=420\,000$$

Finalmente:
La primera persona recibió \$144 000
La segunda persona recibió \$180 000
La tercera persona recibió \$420 000

6 Antonio deja \$141 000 al morir y dispone en su testamento que dicha suma sea repartida entre su madre, 2 hermanos, 3 hermanas y 2 sobrinos, del modo siguiente: a los 2 sobrinos partes iguales; a cada hermana lo que a un sobrino, más la tercera parte de lo mismo; a cada hermano lo que a una hermana, más la mitad de lo mismo, y a su madre 3 veces la suma de la parte de cada hermano y cada hermana. ¿Cuánto le corresponde a cada heredero?

Solución

Sea 1 la parte de cada sobrino, la de los 2 es $2\times 1=2$

La parte que le corresponde a una hermana es: $1+\frac{1}{3}(1)=\frac{4}{3}$, de las 3 es $3\times\frac{4}{3}=4$

La parte que le corresponde a un hermano será $\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)=2$, de los 2 es $2\times 2=4$

La parte que le corresponde a la madre será $3\left(\frac{4}{3}+2\right)=3\left(\frac{10}{3}\right)=10$

Luego: sea l lo que toca a los 2 sobrinos, m lo que toca a las 3 hermanas, n lo que corresponde a los 2 hermanos y p lo que toca a la madre.

N: cantidad a repartir = $l + m + n + p$ = \$141 000

S: suma de las partes = $w + x + y + z = 2 + 4 + 4 + 10 = 20$

(*continúa*)

(*continuación*)

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$l=\frac{N\cdot w}{S}=\frac{(141\,000)(2)}{20}=\frac{282\,000}{20}=14\,100$$
$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(141\,000)(4)}{20}=\frac{564\,000}{20}=28\,200$$
$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(141\,000)(4)}{20}=\frac{564\,000}{20}=28\,200$$
$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(141\,000)(10)}{20}=\frac{1\,410\,000}{20}=70\,500$$

Finalmente:

Cada sobrino recibirá: $\frac{14\,100}{2}=\$7\,050.00$

Cada hermana recibirá: $\frac{28\,200}{3}=\$9\,400.00$

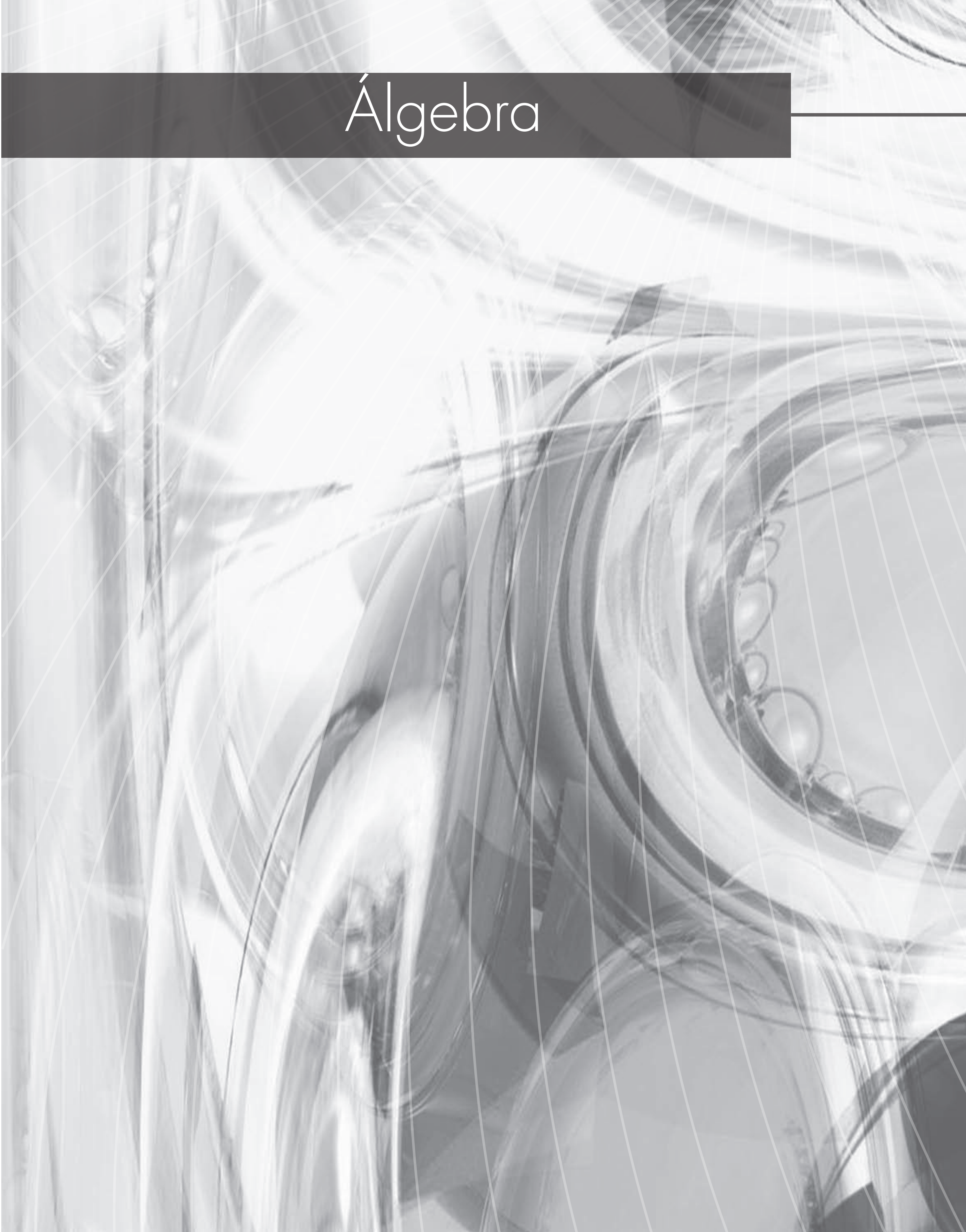
Cada hermano recibirá: $\frac{28\,200}{2}=\$14\,100.00$

La mamá recibirá: $70 500.00

EJERCICIO 117

1. Guillermo quiere repartir $2 310 entre sus 3 sobrinos de 7, 11 y 15 años. ¿Cuánto le tocará a cada sobrino, si se repartirá proporcionalmente a sus edades?
2. Allan quiere repartir $1 026 entre sus 4 hermanos de 6, 8, 10 y 12 años. ¿Cuánto le tocará a cada hermano, si se reparte inversamente proporcional a su edad?
3. Tres matemáticos se reúnen para resolver una guía de ecuaciones diferenciales, han ganado juntos $3 800; el primero ha trabajado durante 3 días, el segundo durante 6 y el tercero durante 10. ¿Qué parte de la ganancia le corresponde a cada uno en proporción del tiempo de su trabajo?
4. Divide el número 255 en 3 partes, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como 2:5 y la parte de la primera sea a la de la tercera como 1:4, ¿cuánto le corresponde a cada parte?
5. Divide el número 1 020 en 3 partes, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como 1:2 y la parte de la segunda sea a la de la tercera como 3:4, ¿cuánto le corresponde a cada parte?
6. Divide el número 228 en 3 partes, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como $\frac{2}{5}$ es a $\frac{3}{5}$ y la parte de la segunda sea a la de la tercera como $\frac{2}{5}$ es a $\frac{3}{5}$. ¿Cuánto le corresponde a cada parte?
7. Reparte $6 440 entre 3 personas, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como 3 es a 5 y que la parte de la segunda sea a la de la tercera como 1 es a 3, ¿cuánto le toca a cada persona?
8. José Luis muere dejando en su testamento una herencia de $234 000 a una hermana que se encuentra en otro país, y de quien nunca tuvo noticias, el notario lee el testamento: “Si mi hermana tiene una hija, dejo para ella las $\frac{3}{4}$ partes de la herencia y $\frac{1}{4}$ para la madre; pero si tiene un hijo, a éste le tocará $\frac{1}{4}$ de la herencia y las $\frac{3}{4}$ partes para la madre”. Sucede que la hermana tiene un hijo y una hija, ¿cuánto le corresponde a cada heredero?
9. Jorge deja $142 500 al morir y dispone en el testamento que dicha suma se reparta entre sus 4 hermanas, 2 hermanos y 5 sobrinos, de tal manera que: los 5 sobrinos a partes iguales, a cada hermana lo que a un sobrino, más $\frac{2}{3}$ de lo mismo, a cada hermano lo que a una hermana, más $\frac{1}{4}$ de lo mismo. ¿Cuánto le corresponde a cada heredero?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente



Álgebra

CAPÍTULO 12

CONJUNTOS Y LÓGICA

Reseña HISTÓRICA



Teoría de conjuntos

Georg Cantor fue un matemático alemán, quien con Dedekind inventó la teoría de conjuntos, base de las matemáticas modernas. Gracias a la presentación axiomática de su teoría de los conjuntos, fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito, bajo la forma de números transfinitos (cardinales y ordinales).

Cantor descubrió que los conjuntos infinitos no siempre tienen el mismo tamaño, el mismo cardinal: por ejemplo, el conjunto de los racionales es enumerable, es decir, del mismo tamaño que el conjunto de los naturales, mientras que el de los reales no lo es: existen, por tanto, varios infinitos, más grandes los unos que los otros.

Lógica matemática

Hasta casi finales del siglo XIX se pensaba que la validez de una demostración, de un razonamiento matemático, consistía principalmente en que "nos convenciera", en que se presentara como evidente a nuestra mente y lo aceptáramos como válido. Ésta era, por ejemplo, la forma de entender la argumentación del mismo René Descartes (1596-1650).

Se cita, como ejemplo, la frase del matemático francés Jean Marie Duhamel (1797-1872): "El razonamiento se hace por el sentimiento que nos produce en la mente la evidencia de la verdad, sin necesidad de norma o regla alguna".

Giuseppe Peano (1858-1932) se levantó contra esta forma de argumentar y, en esencia, defendía que "el valor de una demostración, de un proceso argumentativo, no depende del gusto o sentimientos interiores de nadie, sino de que el argumento tenga una propiedad de validez universalmente comprobable".

Para Peano la lógica matemática era, realmente, la lógica de la matemática, un instrumento cuyo objetivo era dar el rigor y adecuado valor a las argumentaciones del quehacer de la matemática.

Georg Cantor (1845-1918)

Simbología

Éstos son los símbolos que se utilizarán en el capítulo:

$\{\ \}$ Conjunto.

$\in$ Es un elemento del conjunto o pertenece al conjunto.

$\notin$ No es un elemento del conjunto o no pertenece al conjunto.

$|$ Tal que.

$n(C)$ Cardinalidad del conjunto C.

U Conjunto universo.

$\varnothing$ Conjunto vacío.

$\subseteq$ Subconjunto de.

$\subset$ Subconjunto propio de.

$\not\subset$ No es subconjunto propio de.

$>$ Mayor que.

$<$ Menor que.

$\geq$ Mayor o igual que.

$\leq$ Menor o igual que.

$\cap$ Intersección de conjuntos.

$\cup$ Unión de conjuntos.

A' Complemento del conjunto A.

$=$ Símbolo de igualdad.

$\neq$ No es igual a.

$\ldots$ El conjunto continúa.

$\Rightarrow$ Entonces.

$\Leftrightarrow$ Si y sólo si.

$\sim$ No (es falso que).

$\wedge$ y

$\vee$ o

Conjuntos

Un conjunto es una colección de cosas u objetos con características definidas. Los conjuntos se representan con letras mayúsculas y sus elementos se delimitan con llaves y separan con comas.

Ejemplos

a) El conjunto de las vocales.

$$A = \{ a, e, i, o, u \}$$

b) El conjunto de los dígitos.

$$B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

c) El conjunto de los números naturales.

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \}$$

Observación: los puntos suspensivos indican que el conjunto continúa y que los elementos siguientes conservan la misma característica.

d) El conjunto de los días de la semana.

$$S = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$$

e) El conjunto de los números naturales entre 5 y 10.

$$P = \{ 6, 7, 8, 9 \}$$

Para indicar que un elemento pertenece o no a un conjunto se utilizan los símbolos $\in$ y $\notin$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sea el conjunto $A = \{ a, e, i, o, u \}$, entonces
u pertenece al conjunto A y se representa $u \in A$.
x no pertenece al conjunto A y se representa $x \notin A$.

2 Sea el conjunto $B = \{ 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 \}$, entonces

$$2 \in B,\ 5 \in B,\ 1 \notin B,\ 11 \notin B$$

EJERCICIO 1

Dados los conjuntos: $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ coloca $\in$ o $\notin$ según corresponda:

1. a _____ B
2. c _____ A
3. 2 _____ B
4. 3 _____ A
5. u _____ A
6. 5 _____ B
7. i _____ A
8. o _____ B
9. e _____ A
10. 8 _____ B
11. b _____ B
12. 1 _____ A


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Conjuntos de números

- **Números naturales:** $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots\}$
- **Números enteros:** $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Números racionales:** $Q = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$

Ejemplos

$$\frac{6}{5}, -\frac{2}{7}, 6, -8, 0.75 = \frac{3}{4}, 0.\bar{2} = \frac{2}{9}$$

- **Números irracionales.** Números que no pueden expresarse como el cociente de dos números enteros.

Ejemplos

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[7]{64}, e, \pi, \ldots$$

- **Números reales.** Es la unión de los números racionales con los irracionales.

Tipos de números

- **Números dígitos.** Forman la base del sistema decimal.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- **Número par.** Son los divisibles entre 2.

Ejemplos

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …

- **Número impar.** Son los no divisibles entre 2.

Ejemplos

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, …

- **Número primo.** Sólo tiene dos divisores, entre sí mismo y la unidad.

Ejemplos

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …

- **Número compuesto.** Tiene dos o más divisores primos.

Ejemplos

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, …

- **Múltiplo de un número.** El múltiplo de un número k, es nk, donde n es un natural.

Ejemplos

Múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, …
Múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, …

Escritura y representación de conjuntos

Los conjuntos se representan de dos formas:

- **Forma descriptiva o por comprensión.** Se hace mención a la característica principal de los elementos del conjunto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en forma descriptiva el conjunto $S = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 6 \}$.

Solución

Este conjunto se lee:

x pertenece al conjunto de los números naturales, tal que x es un divisor de 6.
x es una variable que cumple con las características del conjunto S.

2 Si $Q = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ representa su forma descriptiva.

Solución

$Q = \{q \in N \mid q \text{ es primo menor que } 12\}$

- **Forma enumerativa o por extensión.** Se enlistan los elementos del conjunto, si algún elemento se repite se considera una sola vez.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en forma enumerativa el conjunto $M = \{m \in N \mid m < 5\}$.

Solución

El conjunto se lee:

los números naturales que son menores que 5 y su representación en forma enumerativa es:

$$M = \{1, 2, 3, 4\}$$

2 Representa en forma enumerativa el conjunto: $A = \{x \in Z \mid x + 8 = 10\}$.

Solución

Este conjunto lo forman los números enteros que sumados con 8 dan como resultado 10, por tanto, su forma enumerativa es:

$$A = \{2\}$$

Ya que $2 + 8 = 10$

EJERCICIO 2

Transforma a la forma descriptiva o enumerativa los siguientes conjuntos:

1. $R = \{ 1, 2, 5, 10 \}$
2. $A = \{ x \in N \mid 1 < x \leq 9 \}$
3. $B = \{ x \in N \mid x + 3 = 7 \}$
4. $C = \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$
5. $V = \{ y \in Z \mid -2 \leq y < 3 \}$
6. $Q = \{ x \mid x$ es una vocal de la palabra número $\}$
7. $T = \{ x$ es un dígito de la cifra 453 425 $\}$
8. $S = \{ x$ es un dígito primo de la cifra 729 634 $\}$
9. $U = \{ 4, 8, 12, 16, \ldots \}$
10. $M = \{ x \in N \mid x$ es divisor par de 50 $\}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cardinalidad

Es el número de elementos que contiene un conjunto.

Ejemplo

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto $A = \{ x \mid x$ es compuesto menor que 10, $x \in N \}$?

Solución

El conjunto A, en forma enumerativa, es:

$$A = \{ 4, 6, 8, 9 \}$$

Entonces su cardinalidad es 4 y se denota: $n(A) = 4$

Conjunto finito. Es aquel conjunto con cardinalidad definida.

Ejemplo

¿El conjunto $B = \{ x \mid x$ es un día de la semana $\}$ es finito?

Solución

El conjunto B en forma enumerativa es:

$$B = \{ \text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo} \}$$

El conjunto tiene 7 elementos, es decir su cardinalidad está definida, por tanto es finito.

Conjunto infinito. Es aquel cuya cardinalidad no está definida, por ser demasiado grande para cuantificarlo.

Ejemplo

¿El conjunto $C = \{ x \in N \mid x$ es múltiplo de 3 $\}$ es infinito?

Solución

El conjunto C en su forma enumerativa es:

$$C = \{ 3, 6, 9, 12, 15, \ldots \}$$

El conjunto continúa indefinidamente, no se puede determinar su número de elementos, por tanto, su cardinalidad es infinita y se escribe como:

$$n(C) = \infty$$

Conjunto vacío o nulo. Es aquel que carece de elementos y se denota con el símbolo $\varnothing$ o bien { }.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿El conjunto $D = \{ x \in N \mid 2x - 1 = 0 \}$ es vacío?

Solución

El único valor de x que satisface la igualdad es $\frac{1}{2}$ pero no pertenece al conjunto de los números naturales, por tanto, el conjunto D es vacío.

$$D = \{ \ \} = \varnothing \text{ su cardinalidad es } n(D) = 0$$

2 ¿El conjunto $E = \{ x \mid x$ es un número par e impar $\}$ es vacío?

Solución

El conjunto E es vacío, ya que no hay ningún número que sea par e impar a la vez.

EJERCICIO 3

Encuentra la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

1. $A = \{ x \in N \mid x$ es un divisor de 30 $\}$
2. $B = \{ x$ es vocal de la palabra casa $\}$
3. $S = \{ x \mid x$ es una estación del año $\}$
4. $R = \{ x \in N \mid x + 3 = 1 \}$
5. $Q = \{ x \in N \mid x > 6 \}$
6. $T = \{ x \in R \mid x = 6 \}$
7. $M = \{ x \in N \mid x < 1 \}$
8. $L = \{ x \in N \mid x$ es par divisor de 20 $\}$
9. $J = \{ x$ es natural $\}$
10. $O = \{ x \mid x$ es un mes del año $\}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Conjuntos equivalentes

Sean A y B conjuntos no vacíos, se dice que A es equivalente a B si y sólo si tiene la misma cardinalidad; se denota: $A \cong B$ y se lee A es equivalente a B.

Ejemplo

Si $A = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 6 $\}$ y $B = \{ a, e, i, o \}$ comprueba que A es equivalente a B.

Solución

Las cardinalidades son: $n(A) = 4$, $n(B) = 4$, por tanto, se concluye que ambos son equivalentes. $A \cong B$.

Conjuntos iguales

Son aquellos que tienen la misma cardinalidad y los mismos elementos.

Ejemplo

¿Son iguales los conjuntos $A = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 6 $\}$ y $B = \{ 1, 2, 3, 6 \}$?

Solución

Los conjuntos en su forma enumerativa son:

$$A = \{ 1, 2, 3, 6 \} \text{ y } B = \{ 1, 2, 3, 6 \}$$

Sus cardinalidades son: $n(A) = n(B) = 4$.
Ambos tienen la misma cardinalidad y los mismos elementos, por tanto, los conjuntos son iguales, es decir, $A = B$.

Conjuntos disjuntos

Son aquellos que no tienen elementos comunes.

Ejemplo

¿Son disjuntos los conjuntos $R = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 5 $\}$ y $S = \{ x \in N \mid 2 < x < 5 \}$?

Solución

Los conjuntos en su forma enumerativa son:

$$R = \{ 1, 5 \} \text{ y } S = \{ 3, 4 \}$$

Los conjuntos no tienen elementos en común, por tanto, los conjuntos R y S son disjuntos.

EJERCICIO **4**

Sean los conjuntos:

$A = \{ x \in N \mid x < 5 \}$

$B = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 8 $\}$

$C = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$D = \{ 1, 2, 4, 8 \}$

$E = \{ a, e, i, o \}$

$F = \{ x \mid x$ es una vocal de la palabra murciélago $\}$

Verifica si son equivalentes, iguales o disjuntos los siguientes pares de conjuntos:

1. A y C
2. D y E
3. B y F
4. F y D
5. A y D
6. E y B
7. C y E
8. F y C
9. A y F
10. B y D

 Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Subconjuntos

Dado un conjunto S se dice que A es subconjunto de S, si todos los elementos de A están contenidos en el conjunto S y se denota por $A \subseteq S$. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Ejemplo

Dados los conjuntos $S = \{ x \mid x \text{ es dígito} \}$ y $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, verifica que $A \subseteq S$.

Solución

El conjunto S en forma enumerativa es: $S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

Los elementos de A están contenidos en S, por tanto, $A \subseteq S$.

Subconjunto propio. Dados dos conjuntos A y B, se dice que B es subconjunto propio de A si todos los elementos de B están en A y no son equivalentes.

Ejemplo

Sean los conjuntos $L = \{ 2, 4, 5, 6, 8 \}$ y $M = \{ 2, 4, 6 \}$, verifica que $M \subset L$.

Solución

Los elementos de M están contenidos en L, y M no es equivalente a L, por consiguiente, $M \subset L$.

Número de subconjuntos de un conjunto. El número de subconjuntos está dado por la fórmula:

$$N(s) = 2^n \quad \text{con } n = \text{cardinalidad}$$

Ejemplo

Determina el número de subconjuntos del conjunto:

$$R = \{ a, b, c, d \}$$

Solución

La cardinalidad del conjunto es 4, entonces $n = 4$ y al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\text{Número de subconjuntos} = 2^4 = 16$$

Conjunto potencia

Se le llama así al conjunto que forman todos los subconjuntos de un conjunto.

Ejemplo

Encuentra el conjunto potencia de:

$$T = \{ 2, 4, 6 \}$$

Solución

El número de subconjuntos de T es:

$$N(s) = 2^3 = 8$$

El conjunto potencia está formado por 8 subconjuntos de cero, uno, dos y tres elementos, los cuales son:

$$\{\{\ \}, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}\}$$

Conjunto universo

Sean A, B, C, …, subconjuntos de un conjunto U, a este último se le llama conjunto universo de los conjuntos dados.

Ejemplo

Sea $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ y los conjuntos A, B y C tales que:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8 \},\ B = \{ 1, 2, 3, 4 \} \text{ y } C = \{ 1, 2, 6, 7 \}$$

Como $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $C \subseteq U$, siendo U el conjunto universo.

EJERCICIO 5

Resuelve lo que se indica en los siguientes ejercicios:

1. Si $W = \{ x, y, z \}$, halla el número de subconjuntos de W.
2. Si $T = \{ x \in N \mid 1 < x < 7 \}$, determina el número de subconjuntos de T.
3. Si $A = \{ x \in N \mid x$ es par menor que 10 $\}$, halla el número de subconjuntos de A.
4. Sea el conjunto $L = \{ \alpha, \beta, \theta \}$, determina el conjunto potencia.
5. Sea el conjunto $M = \{ a, c, e, f \}$, determina el conjunto potencia.
6. Sea el conjunto $N = \left\{ 1, 2, 3, 6 \right\}$, halla el conjunto potencia.
7. Sea el conjunto $P = \{ x \in N \mid x$ es un divisor de 9$\}$, determina el conjunto potencia.
8. Sea el conjunto $Q = \{ x \in N \mid 4 < x \leq 7 \}$, determina el conjunto potencia.


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Diagramas de Venn

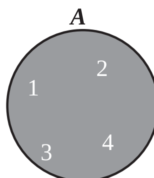
Es la representación de un conjunto o conjuntos y sus operaciones, que delimitan figuras planas como círculos o rectángulos; por lo general los círculos delimitan a los elementos del conjunto o conjuntos dados y los rectángulos delimitan al conjunto universo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en un diagrama de Venn el conjunto $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

Solución



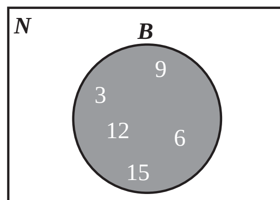
2 Representa en un diagrama de Venn el conjunto:

$$B = \{ x \in N \mid x \text{ es múltiplo de 3 menor que 17} \}$$

Solución

El conjunto B en forma enumerativa es: $B = \{ 3, 6, 9, 12, 15 \}$ y el conjunto universo son los números naturales.

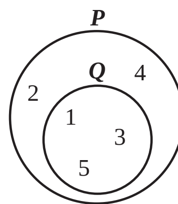
Por tanto, el diagrama es:



3 Representa en un diagrama de Venn los conjuntos $Q = \{ 1, 3, 5 \}$ y $P = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$.

Solución

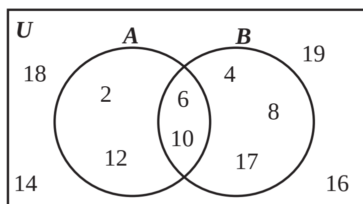
El conjunto Q es un subconjunto propio de P, ya que todos los elementos de Q son elementos de P, por consiguiente, la representación de ambos conjuntos en un diagrama de Venn es:



4 Representa en un diagrama de Venn los conjuntos $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 19\}$, $A = \{2, 6, 10, 12\}$ y $B = \{4, 6, 8, 10, 17\}$

Solución

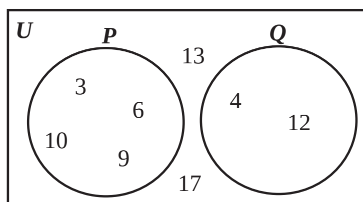
Los elementos que se repiten se colocan en la región común de los conjuntos A y B. Los elementos faltantes de cada conjunto se colocan, respectivamente, en la región sobrante. Los elementos del universo que no aparecen en los conjuntos se colocan fuera de ellos.



5 Sean los conjuntos $U = \{3, 4, 6, 9, 10, 12, 13, 17\}$, $P = \{3, 6, 9, 10\}$ y $Q = \{4, 12\}$, represéntalos en un diagrama de Venn.

Solución

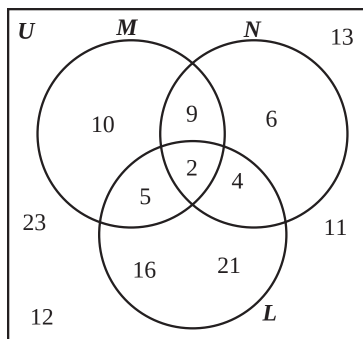
No hay elementos en común; en el diagrama los conjuntos están separados con sus respectivos elementos y los elementos que no pertenecen a los conjuntos se colocan fuera de ellos.



6 Dibuja en un diagrama de Venn los conjuntos $U = \{2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 21, 23\}$, $M = \{2, 5, 9, 10\}$, $N = \{2, 4, 6, 9\}$ y $L = \{2, 4, 5, 16, 21\}$

Solución

Los elementos que se repiten se colocan en la región común de los 3 conjuntos y los demás elementos se colocan en sus conjuntos correspondientes, de la misma forma que en los ejemplos anteriores.

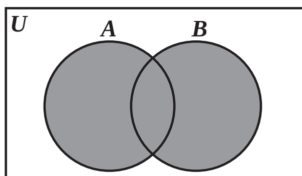


Unión de conjuntos

Sean A y B conjuntos no vacíos, entonces la unión de A y B, se define:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$$

Su diagrama de Venn se representa sombreando ambos conjuntos.



La unión de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos de ambos conjuntos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean los conjuntos $A = \{ 3, 5, 6, 8, 10 \}$ y $B = \{ 2, 6, 8, 10, 12 \}$, halla $A \cup B$.

Solución

El conjunto solución de la unión de los conjuntos A y B son todos los elementos de ambos conjuntos, los elementos que se repiten sólo se escriben una vez.

Por tanto, el conjunto es:

$$A \cup B = \{ 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12 \}$$

2 Si $S = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 20 \}$ y $T = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 6 \}$, halla y representa en un diagrama de Venn $S \cup T$.

Solución

La representación en forma enumerativa de los conjuntos es:

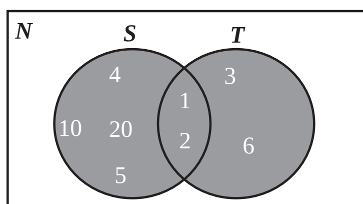
$$S = \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$$

$$T = \{ 1, 2, 3, 6 \}$$

El conjunto solución de la unión de los conjuntos S y T es:

$$S \cup T = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20 \}$$

Diagrama de Venn



3 Para los conjuntos $U = \{ x \mid x \text{ es un dígito} \}$, $P = \{ x \in U \mid x \text{ es par} \}$ y $Q = \{ x \in U \mid x \text{ es impar} \}$. Determina y representa en un diagrama de Venn $P \cup Q$.

Solución

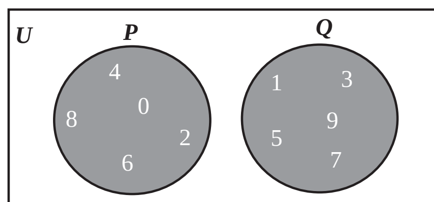
La representación en forma enumerativa de los conjuntos es:

$$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \},\ P = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \} \text{ y } Q = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

El conjunto solución de la unión de P y Q es:

$$P \cup Q = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

Diagrama de Venn

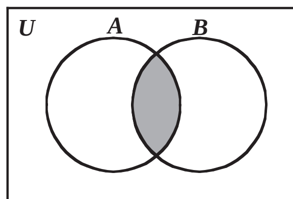


Intersección de conjuntos

Sean A y B conjuntos no vacíos, entonces la intersección de A y B se define:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B \}$$

Su diagrama de Venn se representa sombreando la región común de ambos conjuntos.



En esta operación se toman únicamente los elementos que se repiten en los dos conjuntos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean los conjuntos $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$, $A = \{ 1, 2, 5, 6 \}$ y $B = \{ 1, 4, 5, 6, 7 \}$, precisa y representa en un diagrama de Venn $A \cap B$.

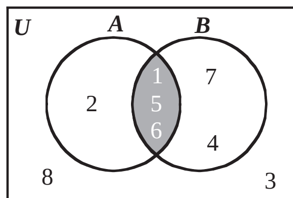
Solución

Para encontrar el conjunto solución de la intersección de los conjuntos A y B, se toman únicamente los elementos que se repiten en los conjuntos.

Por tanto, el conjunto es

$$A \cap B = \{ 1, 5, 6 \}$$

Diagrama de Venn



2 Encuentra la intersección de los conjuntos $C = \{ x \mid x \text{ es un dígito} \}$, $D = \{ x \in N \mid x \geq 6 \}$ y su diagrama de Venn.

Solución

La transformación en su forma enumerativa de los conjuntos es:

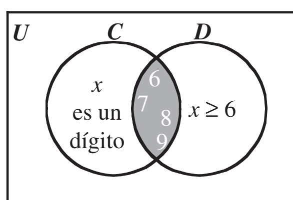
$$C = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \},\ D = \{ 6, 7, 8, 9, 10, 11... \}$$

Para hallar el conjunto solución de la intersección de los conjuntos C y D, se toman únicamente los elementos que se repiten en los 2 conjuntos.

Por consiguiente, el conjunto solución es:

$$C \cap D = \{ 6, 7, 8, 9 \}$$

Diagrama de Venn



3 Para: $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$, $S = \{ x \in U \mid x \text{ es par} \}$ y $T = \{ x \in U \mid x \text{ es impar} \}$. Determina y representa en un diagrama de Venn $S \cap T$.

Solución

La forma enumerativa de los conjuntos es:

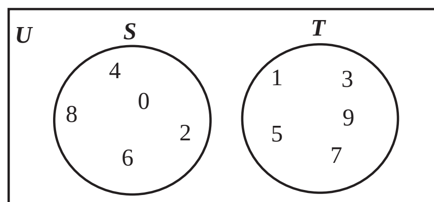
$$S = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \}$$
$$T = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

Los conjuntos no tienen elementos en común.
Por tanto, el conjunto solución es vacío:

$$A \cap B = \{\} = \varnothing$$

Diagrama de Venn

El diagrama de Venn no se sombrea



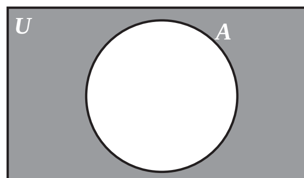
Conjunto complemento

Sea U el conjunto universo y A un subconjunto de U, el complemento de A se define:

$$A' = \{ x \mid x \in U \text{ y } x \notin A \}$$

El conjunto solución contiene a los elementos que pertenecen a U y no pertenecen al conjunto A y se representa como A' o A^c.

Su diagrama de Venn se representa sombreando la región fuera del conjunto A.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el complemento y su diagrama de Venn del conjunto $A = \{ 2, 3, 5, 7 \}$, si el universo es $U = \{ x \in N \mid x \leq 10 \}$.

Solución

El conjunto U en su forma enumerativa es:

$$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$$

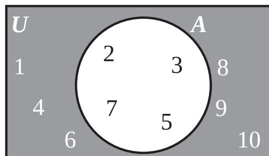
(*continúa*)

(*continuación*)

Por consiguiente, el complemento de A es:

$$A' = \{ 1, 4, 6, 8, 9, 10 \}$$

Diagrama de Venn



2 Sea $U = \{ x \in N \mid x$ es un número compuesto menor que 16 $\}$. Determina el complemento del conjunto $M = \{ x \in U \mid x$ es impar $\}$.

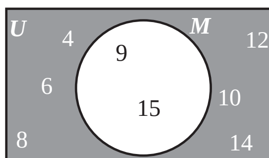
Solución

Los conjuntos en su forma enumerativa son:

$$U = \{ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 \}$$
$$M = \{ 9, 15 \}$$

Por tanto, el conjunto complemento de M es: $M' = \{ 4, 6, 8, 10, 12, 14 \}$

Diagrama de Venn



3 Sean los conjuntos

$U = \{ 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14 \}$
$A = \{ 2, 5, 6, 9, 12 \}$
$B = \{ 3, 5, 6, 8, 9 \}$

Determina $A' \cap B$.

Solución

Se obtiene el complemento de A:

$$A' = \{ 3, 8, 10, 13, 14 \}$$

Se obtiene la intersección de A' con el conjunto B:

$$A' \cap B = \{ 3, 8, 10, 13, 14 \} \cap \{ 3, 5, 6, 8, 9 \} = \{ 3, 8 \}$$

Por tanto, el conjunto solución es:

$$A' \cap B = \{ 3, 8 \}$$

4 Sean los conjuntos:

$A = \{ x \in N \mid x$ es par menor que 10 $\}$
$B = \{ x \in N \mid 6 \leq x < 10 \}$
$C = \{ x \in N \mid x$ es impar $\}$

Halla $(A \cup B) \cap C$

Solución

Los conjuntos en forma enumerativa son:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8 \},\ B = \{ 6, 7, 8, 9 \} \text{ y } C = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots \}$$

Se halla $A \cup B$:

$$A \cup B = \{ 2, 4, 6, 7, 8, 9 \}$$

Con el conjunto C y el conjunto anterior se halla la intersección:

$$(A \cup B) \cap C = \{ 2, 4, 6, 7, 8, 9 \} \cap \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots \} = \{ 7, 9 \}$$

Finalmente, el conjunto solución es:

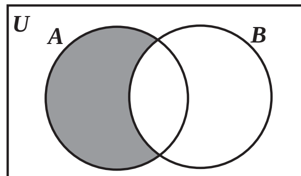
$$(A \cup B) \cap C = \{ 7, 9 \}$$

Diferencia de conjuntos

Sean A y B conjuntos no vacíos, se define la diferencia como el conjunto que contiene a los elementos que pertenecen a A y que no pertenecen al conjunto B. La diferencia se representa como $A - B$.

$$A - B = A \cap B^c = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \notin B \}$$

Su diagrama de Venn se representa de la manera siguiente:



Ejemplo

Si $A = \{ a, b, c, d, e \}$ y $B = \{ a, e, i, o, u \}$, halla $A - B$ y su diagrama de Venn.

Solución

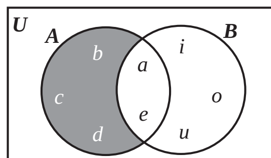
El conjunto solución contiene a los elementos que pertenecen a A y que no pertenecen al conjunto B, entonces:

$$A - B = \{ a, b, c, d, e \} - \{ a, e, i, o, u \}$$

Por tanto, el conjunto es:

$$A - B = \{ b, c, d \}$$

Diagrama de Venn



EJERCICIO 6

Sean los conjuntos:

$U = \{x \in Z \mid -4 < x \leq 7\}$
$A = \{x \in U \mid x < 3\}$
$B = \{x \in U \mid x \text{ es un número par mayor que } 1\}$

Representa en diagrama de Venn y determina:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. A'
4. B'
5. $A - B$
6. $B - A$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

En los siguientes ejemplos, se combinan las operaciones de conjuntos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Dados los conjuntos $U = \{ x \in N \mid x \leq 9 \}$, $A = \{ x \in N \mid 3 < x < 8 \}$ y $B = \{ 1, 4, 7, 9 \}$, encuentra el conjunto solución de: $A' \cap B'$

Solución

Se escriben los conjuntos U y A en su forma enumerativa:

$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ $\qquad$ $A = \{ 4, 5, 6, 7 \}$

Se buscan los complementos de ambos conjuntos:

$A' = \{ 1, 2, 3, 8, 9 \}$ $\qquad$ $B' = \{ 2, 3, 5, 6, 8 \}$

Se efectúa la operación y el conjunto solución es:

$$A' \cap B' = \{ 1, 2, 3, 8, 9 \} \cap \{ 2, 3, 5, 6, 8 \}$$
$$= \{ 2, 3, 8 \}$$

2 Para los conjuntos:

$P = \{ x \in N \mid -3 < x \leq 6 \}$ $\qquad$ $R = \{ x \in N \mid x \text{ es par menor que } 16 \}$
$Q = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 20 \}$ $\qquad$ $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \}$

Determina $(P - Q) \cup (R \cap S)$

Solución

Los conjuntos en forma enumerativa son:

$P = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ $\qquad$ $R = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \}$
$Q = \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$ $\qquad$ $S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \}$

Se obtiene la diferencia entre los conjuntos P y Q:

$$P - Q = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} - \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$$
$$P - Q = \{ -2, -1, 0, 3, 6 \}$$

Se determina la intersección de R y S:

$$R \cap S = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \} \cap \{ 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \}$$
$$R \cap S = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

Se determina la unión:

$$(P - Q) \cup (R \cap S) = \{ -2, -1, 0, 3, 6\} \cup \{2, 4, 6, 8 \}$$
$$(P - Q) \cup (R \cap S) = \{ -2, -1, 0, 2, 3, 4, 6, 8 \}$$

EJERCICIO 7

Sean los conjuntos:

$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

$A = \{ x \in U \mid x \text{ es par menor que } 10\}$

$B = \{ x \in U \mid x \text{ es divisor de } 12 \}$

$C = \{ x \in U \mid x < 6 \}$

$D = \{ x \in U \mid 2 < x \leq 6 \}$

$E = \{ x \in U \mid x \text{ es un dígito} \}$

$F = \{ x \in U \mid x > 13 \}$

$G = \{ x \in U \mid x \text{ es par mayor que } 10 \}$

Determina:

1. $A \cup B$
2. $B \cup C$
3. $C \cup D$
4. $D \cup B$
5. $A \cap B$
6. $A \cap D$
7. $C \cap E$
8. $B \cap C$
9. A'
10. B'
11. C'
12. D'
13. $A - B$
14. $C - D$
15. $E - B$
16. $B - A$
17. $A' \cap B$
18. $A \cup B'$
19. $B' \cap E'$
20. $A' - G$
21. $(A \cup B)'$
22. $(A \cap B)'$
23. $(A \cup F) \cap C$
24. $B \cup (F - G)$
25. $(F - G) \cap E'$
26. $(F \cap G) \cup D$
27. $E' \cap (A \cup G)$
28. $(E \cup F) \cap (A \cup G)$
29. $(C \cup E) \cap (F \cup G)$
30. $(B \cup D) \cup (F \cap G)$
31. $(B \cup D)' - (E \cup G)'$
32. $(A' \cap B') - (E' \cap F')$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Operaciones de conjuntos con diagramas de Venn

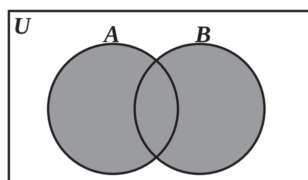
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en un diagrama de Venn la siguiente operación $(A \cup B)'$:

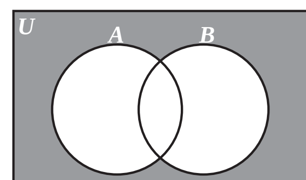
Solución

Se determina el diagrama de la unión del conjunto A con B.



$A \cup B$

El complemento es todo lo que no pertenece a la unión, por tanto, su diagrama de Venn es:

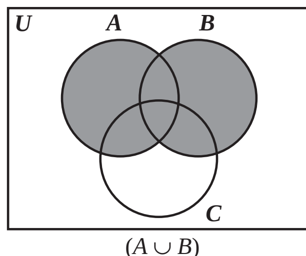


$(A \cup B)'$

2 Representa en un diagrama de Venn la siguiente operación $(A \cup B) \cap C$.

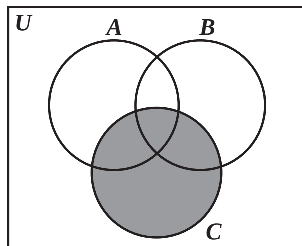
Solución

Diagrama de Venn de $(A \cup B)$

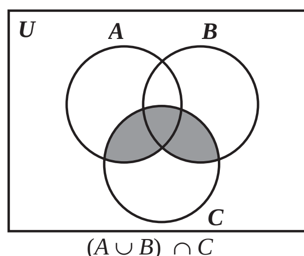


$(A \cup B)$

Diagrama de Venn del conjunto C



La intersección de la unión de A con B y el conjunto C, es la región común entre las áreas sombreadas.

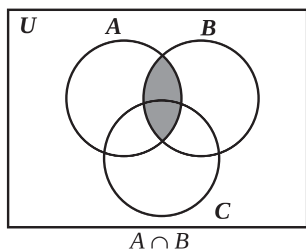


$(A \cup B) \cap C$

3 Representa en un diagrama de Venn la siguiente operación $(A \cap B) \cup (A - C)$.

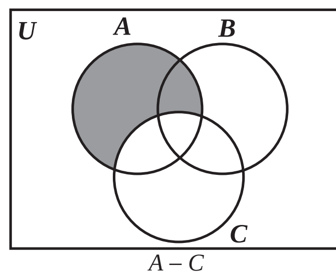
Solución

Diagrama de Venn $(A \cap B)$



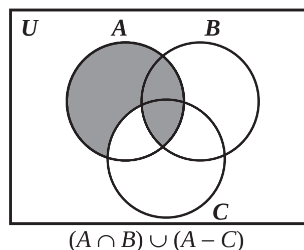
$A \cap B$

Diagrama de Venn $(A - C)$



$A - C$

Finalmente, el conjunto solución es la unión de las áreas sombreadas.



$(A \cap B) \cup (A - C)$

EJERCICIO 8

Realiza el diagrama de Venn de cada una de las siguientes operaciones:

1. A'
2. $(A \cap B)'$
3. $A' \cap B'$
4. $A \cap B \cap C$
5. $(A \cup B) \cap C$
6. $B' \cap (A - C)$
7. $(A \cup C) \cap (B - C)$
8. $(A - B) \cup (A \cap C)$
9. $(A \cap B \cap C)'$
10. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
11. $((A - B) \cup (B \cap C))'$
12. $(A' \cup B') - (A' \cup C')$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ejemplo

Sean los conjuntos:

$U = \{ a, b, c, d, f, g, h, i \}$ $\quad$ $B = \{ b, d, g, h \}$

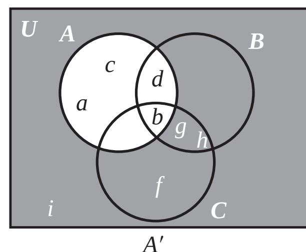
$A = \{ a, b, c, d \}$ $\quad$ $C = \{ b, f, g, h \}$

Representa en diagrama de Venn y halla el conjunto solución $(A' - B) \cap C$.

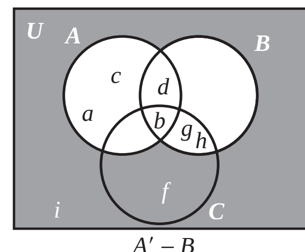
Solución

Para determinar el conjunto se procede de la siguiente manera:

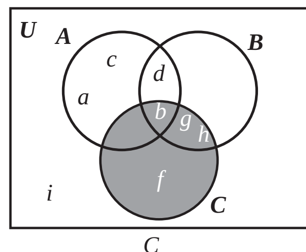
Se halla primero A', se realiza la diferencia con el conjunto B y, finalmente, con esta última operación se realiza la intersección con el conjunto C.



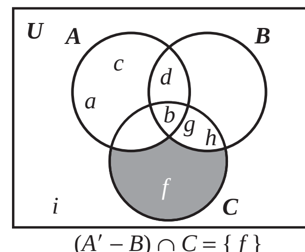
A'



$A' - B$



C



$(A' - B) \cap C = \{ f \}$

EJERCICIO 9

Sean los conjuntos:

$U = \{ x \mid x \text{ es un dígito} \}$ $\quad$ $B = \{ x \in U \mid x \text{ sea primo} \}$

$A = \{ x \in U \mid x < 5 \}$ $\quad$ $C = \{ 2, 4, 5, 8 \}$

Representa en diagrama de Venn y determina el conjunto solución.

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A' \cup B'$
4. $A' \cap B'$
5. $(A \cup B) \cap C$
6. $(A \cup B \cup C)'$
7. $(A' - B') \cap C$
8. $(A - B)' \cap (B \cap C)'$
9. $(A - B)' \cup C'$
10. $(A \cap B)' \cap (A' \cap B')$
11. $(A - B)' \cap (B - C)'$
12. $(A' \cup B') - (A' \cup C')$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Se realizó una encuesta a 82 alumnos sobre el tipo de música que más les agrada; los resultados fueron los siguientes: a 32 de ellos les gusta el pop, a 33 les agrada el rock, a 36 el reggae, a 10 les gusta el pop y el rock, a 11 el pop y el reggae, a 9 les agrada el rock y el reggae, a 4 les gustan los 3 estilos y únicamente a 7 otros tipos de música.

¿Cuántos estudiantes sólo prefieren rock?

¿A cuántos alumnos sólo les agrada el reggae?

¿Cuántos estudiantes prefieren únicamente pop y reggae?

¿Cuántos alumnos prefieren solamente rock y reggae?

Solución

Se construye el diagrama de Venn, de la siguiente manera:

Se inicia con la zona en la que se intersecan los 3 conjuntos.

$$4$$

Se obtienen los alumnos de la zona donde se interseca el pop y el rock únicamente.

$$10 - 4 = 6$$

Se obtienen los estudiantes de la zona donde se interseca el pop y el reggae, solamente.

$$11 - 4 = 7$$

Se obtienen los alumnos de la zona donde se interseca el rock y el reggae únicamente.

$$9 - 4 = 5$$

Se obtienen los estudiantes de la zona que únicamente escuchan pop.

$$32 - (6 + 4 + 7) = 15$$

Se obtienen los alumnos de la zona que únicamente escuchan rock.

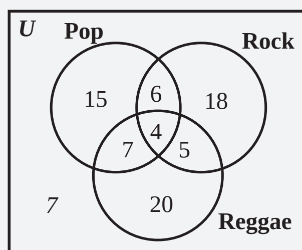
$$33 - (6 + 4 + 5) = 18$$

Se obtienen los estudiantes de la zona que únicamente escuchan reggae.

$$36 - (7 + 4 + 5) = 20$$

Los alumnos a quienes les gusten otros estilos, se colocan en la zona que no corresponde a los conjuntos anteriores.

El diagrama de Venn que se obtiene es:



Finalmente:

Los alumnos que sólo prefieren rock, son 18

Los alumnos que sólo les agrada reggae, son 20

Los alumnos que prefieren únicamente pop y reggae, son 7

Los alumnos que prefieren únicamente rock y reggae, son 5

2 En una preparatoria se obtuvieron los siguientes datos de 350 estudiantes:

200 alumnos aprobaron la materia de cálculo diferencial;
160 estudiantes aprobaron física;
187 aprobaron historia;
112 aprobaron cálculo diferencial e historia;
120 aprobaron cálculo diferencial y física;
95 aprobaron física e historia;
80 alumnos aprobaron cálculo diferencial, física e historia.

Indica cuántos de estos 350 alumnos aprobaron:

1. Sólo una materia
2. Exactamente 2 materias
3. Al menos una materia
4. Cuando mucho 2 materias

Solución

Otra forma de resolver este tipo de problemas es la siguiente:

Se denotan los conjuntos de los estudiantes

U: Conjunto universo

C = { alumnos que aprobaron cálculo diferencial }

F = { alumnos que aprobaron física }

H = { alumnos que aprobaron historia }

Cardinalidad de los conjuntos:

$n(U) = 350$ $n(C) = 200$ $n(F) = 160$ $n(H) = 187$

$n(C \cap H) = 112$ $n(C \cap F) = 120$ $n(F \cap H) = 95$ $n(C \cap F \cap H) = 80$

Para construir el diagrama de Venn se obtienen los siguientes datos:

Se coloca el número de estudiantes que aprobaron las tres materias; es decir, la intersección de los tres conjuntos: $n(C \cap F \cap H) = 80$

Se completa el número de estudiantes que aprobaron dos materias únicamente; es decir, la intersección de dos conjuntos:

$$n(C \cap H) - n(C \cap F \cap H) = 112 - 80 = 32$$
$$n(C \cap F) - n(C \cap F \cap H) = 120 - 80 = 40$$
$$n(F \cap H) - n(C \cap F \cap H) = 95 - 80 = 15$$

Se completa el número de estudiantes de cada conjunto, el cual es el número de estudiantes que aprobaron una sola materia.

Para el conjunto C:

$$n(C) - \left[n(C \cap F) - n(C \cap F \cap H)\right] - \left[n(C \cap H) - n(C \cap F \cap H)\right] - n(C \cap F \cap H) =$$

$= 200 - 40 - 32 - 80 = 48$ alumnos sólo aprobaron cálculo diferencial.

De una forma análoga se obtiene para los conjuntos F y H.

$$n(F) - \left[n(C\cap F) - n(C\cap F\cap H)\right] - \left[n(F\cap H) - n(C\cap F\cap H)\right] - n(C\cap F\cap H) =$$

= 160 – 40 – 15 – 80 = 25 alumnos sólo aprobaron física.

$$n(H) - \left[n(F\cap H) - n(C\cap F\cap H)\right] - \left[n(C\cap H) - n(C\cap F\cap H)\right] - n(C\cap F\cap H) =$$

= 187 – 15 – 32 – 80 = 60 sólo aprobaron historia.

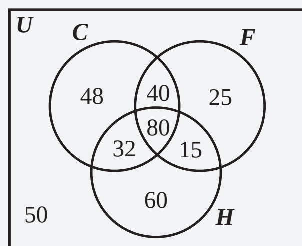
Para completar el diagrama se determina el número de alumnos que no aprobaron ninguna materia.

Es la diferencia del total de estudiantes, de los cuales se obtuvieron los datos y el total de alumnos de los conjuntos.

$$350 - \left[n(C) + n(F) + n(H) - n(C\cap F) - n(C\cap H) - n(F\cap H) + n(C\cap F\cap H)\right]$$

$$350 - (200 + 160 + 187 - 120 - 112 - 95 + 80) = 350 - 300 = 50$$

Diagrama de Venn



Finalmente:

Sólo una materia:

Suma de los alumnos que aprobaron una sola materia de cada conjunto:

$$n(C) + n(F) + n(H) - 2n(C\cap F) - 2n(C\cap H) - 2n(F\cap H) + 3n(C\cap F\cap H)$$

$$200 + 160 + 187 - 2(120) - 2(112) - 2(95) + 3(80) = 133$$

Exactamente 2 materias:

Suma de los estudiantes que aprobaron 2 materias únicamente:

$$n(C\cap H) + n(C\cap F) + n(F\cap H) - 3\cdot n(C\cap F\cap H) = 112 + 120 + 95 - 3(80) = 87$$

Al menos una materia:

Son los estudiantes que aprobaron 1, 2 o 3 materias:

$$n(C) + n(F) + n(H) - n(C\cap F) - n(C\cap H) - n(F\cap H) + n(C\cap F\cap H) = 300$$

Cuando mucho 2 materias:

Son los estudiantes que aprobaron 0, 1 o 2 materias:

$$350 - n(C\cap F\cap H) = 270$$

EJERCICIO 10

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una empresa realizó una encuesta a 250 personas para saber qué programa de televisión prefieren ver en domingo. Se les dieron 3 opciones: deportes, películas o musicales. El resultado de la encuesta fue: 130 personas prefieren deportes; 80 prefieren ver películas; 40, musicales; 25 prefieren deportes y películas; 20, películas y musicales; 10, deportes y musicales; y sólo a 6 personas les gustan los tres tipos de programas.

   a) ¿Cuántas prefieren ver sólo deportes?
   b) ¿Cuántas prefieren ver sólo un programa de televisión?
   c) ¿Cuántas prefieren ver películas o musicales?

2. A los niños de una organización civil se les apoya para que hagan deporte. Una encuesta reveló que los deportes que más les agradan son: natación, futbol, béisbol, entre otros. Los resultados de la encuesta fueron: 7 sólo prefieren natación; 28 sólo quieren jugar futbol; uno sólo quiere practicar béisbol; 30, natación y futbol; 18, natación y béisbol; 20, futbol y béisbol; 12, los 3 deportes de mayor preferencia, y 20, otros deportes.

   a) ¿Cuántos niños quieren béisbol o natación?
   b) ¿Cuántos niños prefieren futbol o béisbol?
   c) ¿Cuántos niños fueron encuestados?
   d) ¿Cuántos niños prefieren únicamente 2 deportes?

3. Una empresa concede como prestación a sus empleados la asistencia a su club deportivo; en éste hay canchas de squash, un gimnasio, un boliche y una cafetería, donde se pueden divertir con juegos de mesa o simplemente platicar. A 70 personas se les aplicó una encuesta para saber la actividad de esparcimiento de su preferencia y se encontró que: 20 prefieren boliche, 27 el gimnasio, 24 squash, 8 boliche y gimnasio, 10 squash y boliche, 15 squash y gimnasio y, por último, 6 prefieren squash, gimnasio y boliche.

   a) ¿Cuántas únicamente prefieren jugar boliche?
   b) ¿Cuántas únicamente quieren jugar squash?
   c) ¿Cuántas personas sólo desean estar en el gimnasio?
   d) ¿Cuántas personas prefieren otras actividades?
   e) ¿Cuántas prefieren el squash o el boliche?
   f) ¿Cuántas no quieren boliche o squash?

4. En un supermercado se hizo una encuesta a 60 personas, para saber qué tipo de bebida alcohólica que esté en oferta prefieren. Los resultados fueron: 12 comprarían whisky y tequila; 16 vodka y tequila; 14 whisky y vodka; 29 whisky; 30 tequila; 29 vodka y sólo 9 personas las 3 bebidas.

   a) ¿Cuántas personas contestaron que otras bebidas?
   b) ¿Cuántas prefieren 2 tipos de bebida únicamente?
   c) ¿Cuántas quieren al menos una de las tres bebidas?
   d) ¿Cuántas quieren sólo un tipo de bebida?

5. En una fiesta infantil a los niños se les pidió su opinión acerca del sabor del helado que preferirían comer. Los resultados fueron los siguientes: 9 quieren de chocolate, vainilla y fresa; 12 de fresa y vainilla; 13 de chocolate y fresa; 15 de chocolate y vainilla; 18 de fresa; 26 de vainilla; 29 de chocolate, y 8 niños prefieren de otros sabores.

   a) ¿Cuántos niños había en la fiesta?
   b) ¿Cuántos quieren sólo de 2 sabores?
   c) ¿Cuántos sólo de un sabor?
   d) ¿Cuántos no quieren de chocolate o fresa?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Álgebra de conjuntos

En el siguiente cuadro se muestran diferentes operaciones con conjuntos. Sean los conjuntos U, A, B y C tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ y $C \subseteq U$, donde U es el conjunto universo.

Operaciones con conjuntos	
1. $(A')' = A$	8. $A \cup A = A$
2. $\varnothing' = U$	9. $A \cup A' = U$
3. $A - A = \varnothing$	10. $U' = \varnothing$
4. $A - \varnothing = A$	11. $A \cap U = A$
5. $A - B = A \cap B'$	12. $A \cap \varnothing = \varnothing$
6. $A \cup \varnothing = A$	13. $A \cap A = A$
7. $A \cup U = U$	14. $A \cap A' = \varnothing$
Asociativas	***Conmutativas***
15. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	19. $A \cup B = B \cup A$
16. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	20. $A \cap B = B \cap A$
Distributivas	***Leyes de De Morgan***
17. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	21. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
18. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	22. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Aplica las definiciones de las operaciones con conjuntos y demuestra que:
$(A \cup B)' = A' \cap B'$

Solución

Si $x \in (A \cup B)'$

Entonces $x \in U$ y $x \notin (A \cup B)$	Definición de complemento
Si $x \notin (A \cup B)$, entonces $x \notin A$ o $x \notin B$	Definición de unión de conjuntos
Si $x \notin A$ o $x \notin B$, entonces $x \in A'$ y $x \in B'$	Definición de complemento
Entonces $x \in (A' \cap B')$	Definición de intersección de conjuntos
Por tanto, $(A \cup B)' = A' \cap B'$	

2 Aplica las definiciones de las operaciones con conjuntos y demuestra que:
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Solución

Si $x \in (A \cap B)'$

Entonces $x \in U$ y $x \notin (A \cap B)$	Definición de complemento
Si $x \notin (A \cap B)$, entonces $x \notin A$ y $x \notin B$	Definición de intersección de conjuntos
Si $x \notin A$ y $x \notin B$ entonces $x \in A'$ o $x \in B'$	Definición de complemento
Entonces $x \in (A' \cup B')$	Definición de unión de conjuntos
Por tanto, $(A \cap B)' = A' \cup B'$	

Es más práctico realizar las demostraciones utilizando las leyes y operaciones de conjuntos.

3 Aplica las leyes y demuestra que $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

Solución

$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B')$	Ley distributiva (18)
$= A \cap U$	Operaciones con conjuntos (9)
$= A$	Operaciones con conjuntos (11)

4 Aplica las leyes y demuestra que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Solución

$(A \cap B) \cup C = C \cup (A \cap B)$	Ley conmutativa (19)
$= (C \cup A) \cap (C \cup B)$	Ley distributiva (17)
$= (A \cup C) \cap (B \cup C)$	Ley conmutativa (19)

5 Aplica las leyes y demuestra que $A \cap (B \cap C)' = (A - B) \cup (A - C)$.

Solución

$A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C')$	Ley de De Morgan (22)
$= (A \cap B') \cup (A \cap C')$	Ley distributiva (18)
$= (A - B) \cup (A - C)$	Operaciones con conjuntos (5)

EJERCICIO 11

Aplica las leyes y demuestra las siguientes identidades:

1. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
2. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
3. $A' \cap (B \cup C)' = (A \cup B \cup C)'$
4. $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$
5. $(A \cup B) \cap A' = A' \cap B$
6. $A' - (A \cup C)' = C - A$
7. $A \cup (B \cap A') = A \cup B$
8. $A - (A - B)' = A - B$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Lógica

La lógica se ocupa del razonamiento a partir de las premisas, las cuales son proposiciones que dan la pauta para el proceso deductivo e inductivo. Analicemos algunos conceptos:

Inferir. Proceso de unir ideas para llegar a conclusiones verdaderas a partir de proposiciones verdaderas.

Proposición lógica. Es un enunciado que se califica como falso o verdadero, pero no ambos a la vez.

Ejemplos

a = "Cuba está en América"	Verdadero (***v***)
b = "4 es número impar"	Falso (***f***)
c = "El elefante es un ave"	(***f***)
p = "Los perros ladran"	(***v***)
q = "Hermosa tarde"	No es una proposición lógica

Negación. Se obtiene negando o afirmando el enunciado y se denota por el símbolo (~).

Ejemplo

Sea la proposición:

a = "5 es número primo"

La negación de la proposición es:

~ a = "5 no es número primo"

Tipos de proposiciones

Proposición lógica simple. Es aquella que está formada por un solo enunciado.

Ejemplos

t = "El delfín es un mamífero"

r = "4 es número par"

Proposición lógica compuesta. Es aquella que forman 2 o más proposiciones simples unidas por uno o más conectivos lógicos.

Ejemplos

a = "8 es número par y 5 es número primo"

b = "China está en Asia o Colombia está en América"

c = "Si un volcán está en Perú, entonces está en América"

p = "8 es número par si y sólo si es divisible por 2"

Proposiciones compuestas

En el siguiente cuadro se muestran las distintas proposiciones compuestas con su respectivo conectivo lógico y símbolo.

Nombre	Conectivo lógico	Símbolo
Negación	No	$\sim$
Disyunción	o	$\vee$
Conjunción	y	$\wedge$
Implicación	entonces	$\Rightarrow$
Doble implicación	Si y sólo si	$\Leftrightarrow$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean las proposiciones:

a = "El tucán es un ave"
b = "El león es un mamífero"

La disyunción entre las proposiciones es:

$a \vee b$ = "El tucán es un ave o el león es un mamífero"

2 Sean las proposiciones:

p = "4 es número par"
q = "4 es número natural"

La conjunción entre las proposiciones es:

$p \wedge q$ = "4 es número par y es número natural"

3 Sean las proposiciones:

p = "$x \leq 8, x \in Z$"
$p \wedge q$ = "2 es divisor de 6 y es primo"
$p \vee q$ = "8 es número impar o es compuesto"

La negación entre las proposiciones es:

$\sim p$ = "$x \nleq 8, x \in Z$" o "$x > 8, x \in Z$"
$\sim (p \wedge q)$ = "No es verdad que 2 es divisor de 6 y es primo"
$\sim (p \vee q)$ = "No es verdad que 8 es número impar o es compuesto"

4 Sean las proposiciones:

p = "30 es múltiplo de 10"
q = "30 es múltiplo de 5"

La implicación entre las proposiciones es:

$p \Rightarrow q$ = "Si 30 es múltiplo de 10, entonces es múltiplo de 5"

5 Sean las proposiciones:

p = "China está en Asia"
q = "Cuba está en América"

La doble implicación entre las proposiciones es:

$p \Leftrightarrow q$ = "China está en Asia si y sólo si Cuba está en América"

EJERCICIO 12

Sean las siguientes proposiciones:

p = "España está en Europa"
q = "Japón está en Asia"

Escribe las siguientes proposiciones:

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $\sim p$
4. $\sim q$
5. $p \Rightarrow q$
6. $p \Leftrightarrow q$
7. $\sim p \wedge q$
8. $p \vee \sim q$
9. $\sim (p \vee q)$
10. $\sim (p \wedge q)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

La representación de una proposición simple o compuesta se ilustra con los siguientes ejemplos:

Ejemplos

Sean los siguientes enunciados:

p = "9 es múltiplo de 3"
q = "5 es divisor de 10"

Escribe en forma simbólica los siguientes enunciados:

1. 9 es múltiplo de 3 y 5 es divisor de 10

$$p \wedge q$$

2. No es verdad que 5 es divisor de 10

$$\sim q$$

3. 5 es divisor de 10 o no es verdad que 9 es múltiplo de 3

$$p \vee \sim q$$

EJERCICIO 13

Sean las siguientes proposiciones:

a = "La guacamaya es un ave"
b = "A Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones"

Escribe en forma simbólica los siguientes enunciados:

1. La guacamaya es un ave y a Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones
2. La guacamaya es un ave y a Luis no le gusta escuchar a los Rolling Stones
3. La guacamaya no es un ave o a Luis no le gusta escuchar a los Rolling Stones
4. A Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones o la guacamaya es un ave
5. La guacamaya no es un ave y a Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones
6. No es verdad que la guacamaya es un ave y que a Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Leyes de De Morgan

La negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones de sus proposiciones.

$$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

La negación de una conjunción es la disyunción de las negaciones de sus proposiciones.

$$\sim(p \vee q) = \sim p \vee \sim q$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Niega la siguiente proposición:
a = "4 es número par o Japón está en Asia"

Solución

$\sim a$ = "4 no es número par y Japón no está en Asia"

2 Niega la proposición:
b = "La guacamaya es un ave y el delfín es un mamífero"

Solución

$\sim b$ = "La guacamaya no es un ave o el delfín no es un mamífero"

3 Niega la proposición:
c = "El león es un mamífero y el tiburón no es un pez"

Solución

$\sim c$ = "El león no es un mamífero o el tiburón es un pez"

EJERCICIO 14

Niega las siguientes proposiciones compuestas:

1. a = "España está en Europa o 6 es número par"
2. b = "Los perros ladran y 12 es múltiplo de 3"
3. c = "5 es un número par y no es múltiplo de 15"
4. d = "7 no es primo o es divisor de 21"
5. e = "6 no es número impar y el tucán no es un ave"


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Proposiciones condicionales

Conversa de la implicación. Si $p \Rightarrow q$, la conversa se define como $q \Rightarrow p$.

Ejemplo

Hallar la conversa de la proposición:
$p \Rightarrow q$ = "Si un volcán está en Perú, entonces está en América"

Solución

La conversa de la proposición es:

$$q \Rightarrow p = \text{"Si un volcán está en América, entonces está en Perú"}$$

Contrapositiva de una implicación. Si $p \Rightarrow q$, la contrapositiva se define como $\sim q \Rightarrow \sim p$.

Ejemplo

Determina la contrapositiva de la proposición:
$p \Rightarrow q$ = "Si un volcán está en Perú, entonces está en América"

Solución

La contrapositiva de la proposición es:

$\sim q \Rightarrow \sim p$ = "Si un volcán no está en América, entonces no está en Perú"

Inversa de una implicación. Si $p \Rightarrow q$, la inversa se define como $\sim p \Rightarrow \sim q$.

Ejemplo

Determina la inversa de la proposición:
$p \Rightarrow q$ = "Si 8 es múltiplo de 4, entonces es múltiplo de 2"

Solución

La inversa de la proposición es:

$\sim p \Rightarrow \sim q$ = "Si 8 no es múltiplo de 4, entonces no es múltiplo de 2"

EJERCICIO 15

Determina la conversa, contrapositiva e inversa de las siguientes implicaciones:

1. $p \Rightarrow q$ = "Si 3 es divisor de 6, entonces no es par"
2. $p \Rightarrow q$ = "Si x es múltiplo de 5, entonces es divisor de 25"
3. $p \Rightarrow q$ = "Si un triángulo es un polígono, entonces no es un cuadrilátero"
4. $p \Rightarrow q$ = "Si Marte no es un planeta, entonces la Luna es un satélite"
5. $p \Rightarrow q$ = "Si 17 es un número primo, entonces no es múltiplo de 50"


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Relación de proposiciones abiertas con conjuntos

Proposición abierta. Es aquella en la que el sujeto es una variable. Toda proposición abierta representa un conjunto, que recibe el nombre de conjunto solución de la proposición.

Ejemplo

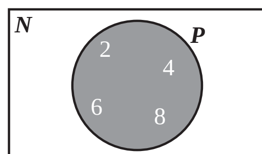
Encuentra y representa en un diagrama de Venn el conjunto solución de la proposición:
p = "x es un número par menor que 10"; $x \in N$

Solución

Conjunto solución:

$$P = \{\ 2, 4, 6, 8\ \}$$

Diagrama de Venn



Conjunción. La conjunción se relaciona con la intersección de conjuntos.

Ejemplo

Determina y representa en un diagrama de Venn el conjunto solución de la proposición:

$$p = \text{“}x \text{ es primo y } x \leq 7\text{”}; x \in N$$

Solución

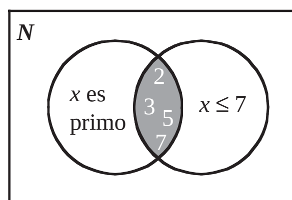
La proposición se representa de la siguiente forma:

$$P = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \ldots \} \cap \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

Por tanto, el conjunto solución es:

$$P = \{ 2, 3, 5, 7 \}$$

Diagrama de Venn



Disyunción. La disyunción se relaciona con la unión de conjuntos.

Ejemplo

Encuentra y representa en un diagrama de Venn el conjunto solución de la proposición:

$$q = \text{“}x \text{ es par menor que 10 o } x < 6\text{”}; x \in N$$

Solución

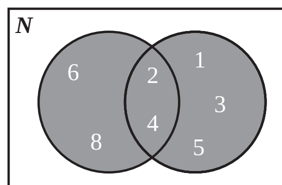
La proposición se representa de la siguiente forma:

$$Q = \{ 2, 4, 6, 8 \} \cup \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

El conjunto solución es:

$$Q = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 \}$$

Diagrama de Venn



Negación. La negación se relaciona con el complemento de un conjunto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el conjunto solución y el diagrama de Venn de cada una de las siguientes proposiciones?

a = “x es un dígito par” $\sim a$ = “x no es un dígito par”

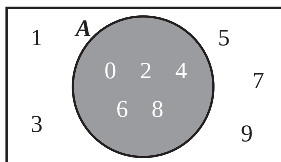
Solución

El conjunto solución de la proposición a, es: $A = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \}$

(*continúa*)

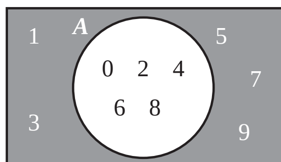
(*continuación*)

Diagrama de Venn



El conjunto solución de la proposición $\sim a$, es: $A' = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Diagrama de Venn



2 ¿Cuál es el conjunto solución de la negación de la siguiente proposición?
a = "x es primo menor que 15 o x es divisor de 15"; $x \in N$

Solución

$$A = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13 \} \cup \{ 1, 3, 5, 15 \}$$

Por consiguiente, el conjunto solución es:

$$A = \{ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 15 \}$$

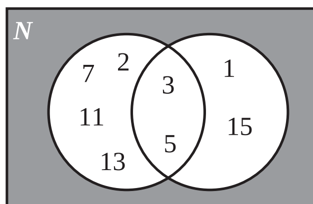
La negación de la proposición es:

$\sim a$ = "x no es primo menor que 15 y x no es divisor de 15"

El conjunto solución es:

$$A' = \{ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, \dots \}$$

Diagrama de Venn



3 ¿Cuál es el conjunto solución de la negación de la siguiente proposición?
b = "x es divisor de 6 y x es par menor que 10"; $x \in N$

Solución

$$B = \{ 1, 2, 3, 6 \} \cap \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

Por consiguiente, el conjunto solución es:

$$B = \{ 2, 6 \}$$

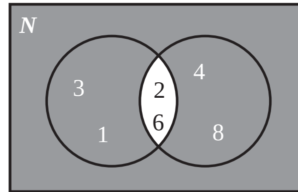
La negación de la proposición es:

$$\sim b = \text{“}x \text{ no es divisor de 6 o } x \text{ no es par menor que 10”}; \ x \in N$$

El conjunto solución es:

$$A' = \{\ 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, \ldots\ \}$$

Diagrama de Venn



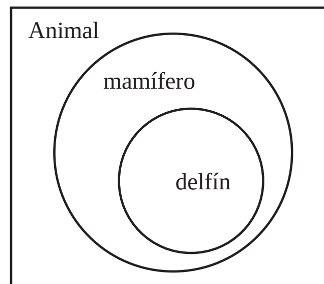
Implicación. La implicación se relaciona con el subconjunto de un conjunto.

Ejemplo

Representa en un diagrama de Venn la siguiente proposición:

a = "si un animal es un delfín, entonces es un mamífero"

Solución



EJERCICIO 16

Determina el conjunto solución y diagrama de Venn de las siguientes proposiciones:

1. a = "x es par y $x < 10$"; $x \in N$
2. b = "x es par menor que 12 y $x \leq 5$"; $x \in N$
3. c = "x es múltiplo de 3 o $x < 8$"; $x \in N$
4. d = "x es primo menor que 11 o x es par menor que 10"; $x \in N$

Representa en un diagrama de Venn las siguientes implicaciones:

5. e = "Si un ciudadano es duranguense, entonces es mexicano"
6. f = "Si un número real es primo, entonces es entero"

En las siguientes proposiciones determina la negación y represéntala en un diagrama de Venn.

7. g = "$x \leq 7$"; $x \in N$
8. h = "x es par o $x < 8$"; $x \in N$
9. i = "$x \geq 4$ y x es par"; $x \in N$
10. j = "$x \leq 5$ y x es primo"; $x \in N$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cálculo proposicional

Cuando una proposición se construye a partir de otras proposiciones, mediante conectivos lógicos, el valor de verdad lo determinan los valores de verdad de las proposiciones originales.

Dadas las proposiciones p y q, los valores de verdad de las proposiciones $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ y $\sim p$, los determinan los valores de verdad de p y q.

El número de valores de verdad está dado por 2^n donde n representa el número de proposiciones.

Para verificar el valor de verdad de una proposición compuesta se utilizan las siguientes tablas.

Tabla de verdad para la disyunción

La disyunción es verdadera, si una o las dos proposiciones z son verdaderas.

p	q	$p \vee q$
v	v	$\boldsymbol{v}$
v	f	$\boldsymbol{v}$
f	v	$\boldsymbol{v}$
f	f	$\boldsymbol{f}$

Tabla de verdad para la conjunción

La conjunción es verdadera, si las dos proposiciones son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
v	v	$\boldsymbol{v}$
v	f	$\boldsymbol{f}$
f	v	$\boldsymbol{f}$
f	f	$\boldsymbol{f}$

Tabla de verdad para la implicación

La implicación es falsa, si la primera proposición es verdadera y la segunda es falsa.

p	q	$p \Rightarrow q$
v	v	$\boldsymbol{v}$
v	f	$\boldsymbol{f}$
f	v	$\boldsymbol{v}$
f	f	$\boldsymbol{v}$

Tabla de verdad para la doble implicación

La doble implicación es verdadera, si las dos proposiciones son verdaderas o las dos son falsas.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
v	v	$\boldsymbol{v}$
v	f	$\boldsymbol{f}$
f	v	$\boldsymbol{f}$
f	f	$\boldsymbol{v}$

Tabla de verdad para la negación

En la negación de una proposición, su valor de verdad es el contrario del original.

p	$\sim p$
v	$\boldsymbol{f}$
f	$\boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{v}$ = Verdadero
$\boldsymbol{f}$ = Falso

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Construye una tabla de verdad y determina el valor de verdad de la siguiente proposición:

a = "3 es divisor de 15 o 3 es múltiplo de 2"

Solución

Se hallan los valores de verdad de las proposiciones:

p = "3 es divisor de 15" ***v***

q = "3 es múltiplo de 2" ***f***

Se construye la tabla de verdad para la disyunción ya que el conectivo lógico es "o".

p	q	$p \vee q$
v	*f*	***v***

Finalmente, el valor de verdad para la proposición "*a*" es verdadero (***v***).

2 Determina el valor de verdad de la siguiente proposición:

b = "15 no es múltiplo de 3 y 3 es primo"

Solución

Se determinan los valores de verdad de las proposiciones:

p = "15 no es múltiplo de 3" ***f***

q = "3 es primo" ***v***

Se construye la tabla de verdad para la conjunción:

p	q	$p \wedge q$
f	*v*	***f***

Finalmente, el valor de verdad para la proposición es falso (***f***).

3 Encuentra el valor de verdad de la siguiente proposición:

c = "Si 2 es número par, entonces 4 es divisor de 10"

Solución

Se determinan los valores de verdad de las proposiciones:

p = "2 es número par" ***v***

q = "4 es divisor de 10" ***f***

Se construye la tabla de verdad para la implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
v	*f*	***f***

Por consiguiente, el valor de verdad para la proposición es falso (***f***).

EJERCICIO 17

Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1. a = "4 es número par y 5 es múltiplo de 2"
2. b = "La víbora no es un reptil o el canario es un pez"
3. c = "Si 21 es múltiplo de 7, entonces 21 es múltiplo de 2"
4. d = "La guacamaya es un pez si y sólo si el tiburón es un ave"
5. e = "Si el oro es un metal, entonces es un buen conductor de la electricidad"
6. b = "3 es divisor de 18 o 18 es múltiplo de 24"


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Construcción de las tablas de verdad

Una tabla de verdad se construye paso a paso, al establecer los valores correspondientes de cada suboperación involucrada, hasta llegar a la expresión dada.

Después de construir una tabla de verdad, el resultado puede ser una tautología, una contradicción o una contingencia. Analicemos estos conceptos:

Tautología. Proposición compuesta en la que todas las combinaciones de valores son verdaderas.

Contradicción. Proposición compuesta en la cual todas las combinaciones de valores son falsas.

Contingencia. Proposición compuesta en donde las combinaciones de valores son verdaderas y falsas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Construye la tabla de verdad para $p \wedge \sim q$ y realiza una conclusión.

Solución

El número de proposiciones es 2, por tanto, el número de valores de verdad es $2^n = 2^2 = 4$, el resultado indica el número de renglones de la tabla.

Primero se determina la negación de la proposición q. Finalmente la conjunción se realiza tomando la proposición p y la negación de q antes obtenida.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
v	v	f	$\boldsymbol{f}$
v	f	v	$\boldsymbol{v}$
f	v	f	$\boldsymbol{f}$
f	f	v	$\boldsymbol{f}$

Se concluye que la tabla de valores de verdad es una contingencia.

2 Construye y da una conclusión de la tabla de verdad para $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$.

Solución

Primero se encuentra la conjunción de p y q, después se determina la disyunción de p y q.

Por último se realiza la implicación de la conjunción y la disyunción antes obtenida.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
v	*v*	*v*	*v*	***v***
v	*f*	*f*	*v*	***v***
f	*v*	*f*	*v*	***v***
f	*f*	*f*	*f*	***v***

Se concluye que la tabla de verdad construida es una tautología.

3 Realiza una tabla de verdad y verifica si la siguiente proposición $(p \wedge q) \wedge \sim p$ es una contradicción.

Solución

Primero se realiza la conjunción de las proposiciones p y q, simultáneamente se niega la proposición q, finalmente se determina la conjunción de los valores de la primera conjunción con la negación de p.

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
v	*v*	*v*	*f*	***f***
v	*f*	*f*	*f*	***f***
f	*v*	*f*	*v*	***f***
f	*f*	*f*	*v*	***f***

La proposición resultó falsa para todos los valores, por consiguiente, es una contradicción.

4 Construye la tabla de verdad para $p \vee (q \wedge r)$.

Solución

El número de proposiciones es 3, por tanto, el número de valores de verdad es $2^n = 2^3 = 8$, el resultado indica el número de renglones de la tabla.

Primero se encuentran los valores de verdad de la conjunción de las proposiciones q y r, finalmente se determina la disyunción de la proposición p con la conjunción antes determinada.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
v	*v*	*v*	*v*	***v***
v	*v*	*f*	*f*	***v***
v	*f*	*v*	*f*	***v***
v	*f*	*f*	*f*	***v***
f	*v*	*v*	*v*	***v***
f	*v*	*f*	*f*	***f***
f	*f*	*v*	*f*	***f***
f	*f*	*f*	*f*	***f***

Finalmente, la tabla indica que se trata de una contingencia.

5 Construye la tabla de verdad para $\sim p \vee \sim q$.

Solución

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
v	*v*	*f*	*f*	***f***
v	*f*	*f*	*v*	***v***
f	*v*	*v*	*f*	***v***
f	*f*	*v*	*v*	***v***

Los valores de verdad de la tabla indican que es una contingencia.

6 Construye la tabla de verdad para $\sim p \vee \sim (\sim p \vee q)$.

Solución

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim (\sim p \vee q)$	$\sim p \vee \sim (\sim p \vee q)$
v	*v*	*f*	*v*	*f*	***f***
v	*f*	*f*	*f*	*v*	***v***
f	*v*	*v*	*v*	*f*	***v***
f	*f*	*v*	*v*	*f*	***v***

La tabla es una contingencia.

7 Verifica si la siguiente proposición es tautología $p \vee (\sim p \vee q)$.

Solución

p	q	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$	$p \vee (\sim p \vee q)$
v	*v*	*f*	*v*	***v***
v	*f*	*f*	*f*	***v***
f	*v*	*v*	*v*	***v***
f	*f*	*v*	*v*	***v***

La proposición resultó verdadera para todos los valores, por tanto, es tautología.

8 Verifica si la siguiente proposición es tautología $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

Solución

p	q	$p \wedge q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
v	*v*	*v*	*v*	***v***
v	*f*	*f*	*f*	***v***
f	*v*	*f*	*f*	***v***
f	*f*	*f*	*v*	***v***

La proposición resultó verdadera para todos los valores, por consiguiente, es tautología.

9 Construye la tabla de verdad para $\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \Leftrightarrow p)$.

Solución

p	q	$p \wedge q$	$q \Leftrightarrow p$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(q \Leftrightarrow p)$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \Leftrightarrow p)$
v	v	v	v	f	f	$\boldsymbol{f}$
v	f	f	f	v	v	$\boldsymbol{v}$
f	v	f	f	v	v	$\boldsymbol{v}$
f	f	f	v	v	f	$\boldsymbol{v}$

La tabla es una contingencia.

EJERCICIO 18

Construye la tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones:

1. $p \vee \sim q$
2. $p \wedge \sim q$
3. $\sim p \Rightarrow \sim q$
4. $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim q$
5. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
6. $(p \vee q) \wedge \sim(p \Rightarrow q)$
7. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
8. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p$
9. $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim(p \vee q)$
10. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
11. $\sim p \vee (\sim q \Leftrightarrow r)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Producto cartesiano de conjuntos

Dados 2 conjuntos A y B no vacíos, el producto cartesiano es el conjunto $(A \times B)$ que contiene a todas las parejas ordenadas, cuyo primer elemento pertenece al conjunto A y su segundo elemento pertenece al conjunto B.

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x, y\}$, determina $A \times B$.

Solución

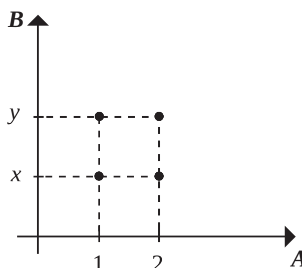
Se asocia a cada uno de los elementos del primer conjunto, con todos los elementos del segundo conjunto:

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Representación gráfica:



La representación gráfica también se conoce como diagrama sagital.

2 Si $A = \{ 1, 2 \}$ y $B = \{ 2, 3, 4 \}$ y $C = \{ 3, 4, 6 \}$, halla $(A \cup B) \times (B \cap C)$

Solución

Se halla el conjunto solución de las operaciones indicadas y posteriormente se realiza el producto cartesiano:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

$B \cap C = \{ 3, 4 \}$

$$(A \cup B) \times (B \cap C) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)$$

3 Si $M = \{ a, b, c \}$, $N = \{ 1, 2, 3 \}$ y $Q = \{ x, y \}$, encuentra $M \times N \times Q$

Solución

El producto cartesiano $M \times N \times Q$ se define como:

$$M \times N \times Q = \{ (m, n, q) \mid m \in M, n \in N \text{ y } q \in Q \}$$

Entonces:

$$M \times N \times Q = \left\{ \begin{matrix} (a, 1, x), (a, 1, y), (a, 2, x), (a, 2, y), (a, 3, x), (a, 3, y) \\ (b, 1, x), (b, 1, y), (b, 2, x), (b, 2, y), (b, 3, x), (b, 3, y) \\ (c, 1, x), (c, 1, y), (c, 2, x), (c, 2, y), (c, 3, x), (c, 3, y) \end{matrix} \right\}$$

EJERCICIO 19

Dados los siguientes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ y $C = \{3, 5, 6\}$

Realiza los siguientes productos cartesianos y verifica que el resultado del inciso 6 es igual al obtenido en el inciso 7:

1. $A \times B$
2. $A \times C$
3. $B \times C$
4. $B \times A$
5. $C \times B$
6. $A \times (B \times C)$
7. $(A \times B) \times C$
8. $(A \cup B) \times (A \cap C)$
9. $(A - B) \times C$
10. $(A - C) \times (A \cap C)$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 13

CONCEPTOS BÁSICOS DE ÁLGEBRA

Reseña HISTÓRICA



al-Khwarizmi

Matemático árabe, conocido como el padre del álgebra.

Sus obras incursionan en las ramas de las matemáticas, astrología, astronomía, geografía e historia. Una de sus obras importantes por su contenido algebraico es la que lleva por título *Hisab al-gabr wa'lmuqqabala*, considerada uno de los primeros libros de álgebra.

Es el autor de uno de los métodos geométricos más antiguos para resolver ecuaciones de segundo grado, el cual se conoce como completar cuadrado.

En las ecuaciones llamaba "cosa" (*xay* en castellano) a la incógnita, a él se debe que se utilice la letra "*x*" para representarla.

Sello ruso dedicado a al-Khwarizmi
(780-850 d.C.)

Álgebra

Rama de las matemáticas que trata a las cantidades de manera general.

Expresiones algebraicas

Se conoce así a la combinación de números reales (*constantes*) y literales o letras (*variables*) que representan cantidades, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, etcétera.

Ejemplos

$3a + 2b - 5$, en esta expresión son constantes 3, 2, −5, y las variables son a y b.
$(z^2 + 8)(5z^4 - 7)$, en esta expresión son constantes 8, 5 y −7, variable "z" y 2, 4 exponentes.

Término algebraico. Es un sumando de una expresión algebraica y representa una cantidad. A todo término algebraico se le denomina *monomio* y consta de: coeficiente, base(s) y exponente(s).

Ejemplos

Término	Coeficiente	Base(s)	Exponente(s)
$-8y^3$	-8	y	3
$\frac{1}{3}mn^x$	$\frac{1}{3}$	m, n	$1, x$
$-\frac{3}{4}(2x+1)^{-2}$	$-\frac{3}{4}$	$2x + 1$	-2

Términos semejantes. Dos o más términos son semejantes cuando los mismos exponentes afectan a las mismas bases.

Ejemplos

Los siguientes términos tienen las mismas bases con sus respectivos exponentes iguales, por lo consiguiente son semejantes.

$-7b$ con $4b$ $\qquad -8x^2y^3$ con $7x^2y^3$ $\qquad \frac{1}{6}abc^2$ con abc^2

Reducción de términos semejantes

Para simplificar expresiones que involucren términos semejantes, se suman o restan los coeficientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica la expresión $-7a + 3a$.

Solución

Se agrupan los coeficientes y se realiza la operación que da como resultado:

$$-7a + 3a = (-7 + 3)a = -4a$$

2 ¿Cuál es el resultado de simplificar la expresión $-6xy^2 + 9xy^2 - xy^2$?

Solución

Se agrupan los coeficientes y se realiza la operación para obtener el resultado:

$$-6xy^2 + 9xy^2 - xy^2 = (-6 + 9 - 1)xy^2 = 2xy^2$$

Por consiguiente, el resultado de la simplificación es: $2xy^2$

3 Reduce la expresión $-10x^{2a}y^b + 5x^{2a}y^b - 6x^{2a}y^b + 11x^{2a}y^b$.

Solución

Se efectúa el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores y se obtiene:

$$-10x^{2a}y^b + 5x^{2a}y^b - 6x^{2a}y^b + 11x^{2a}y^b = (-10 + 5 - 6 + 11)x^{2a}y^b = 0x^{2a}y^b = 0$$

El resultado es igual a 0

4 Simplifica la expresión $7x - 3y + 4z - 12x + 5y + 2z - 8y - 3z$.

Solución

Se agrupan los términos semejantes:

$$7x - 3y + 4z - 12x + 5y + 2z - 8y - 3z = 7x - 12x - 3y + 5y - 8y + 4z + 2z - 3z$$

Se realiza la reducción:

$$= (7 - 12)x + (-3 + 5 - 8)y + (4 + 2 - 3)z$$
$$= -5x - 6y + 3z$$

Por tanto, el resultado es: $-5x - 6y + 3z$

5 Simplifica $0.5a^3b - 3ab^3 - 5a^3b + 0.75ab^3 - \frac{2}{3}a^3b$.

Solución

Se expresan los decimales en fracciones, se agrupan y simplifican los términos semejantes.

$$0.5a^3b - 3ab^3 - 5a^3b + 0.75ab^3 - \frac{2}{3}a^3b = \frac{1}{2}a^3b - 3ab^3 - 5a^3b + \frac{3}{4}ab^3 - \frac{2}{3}a^3b$$
$$= \frac{1}{2}a^3b - 5a^3b - \frac{2}{3}a^3b - 3ab^3 + \frac{3}{4}ab^3$$
$$= \left(\frac{1}{2} - 5 - \frac{2}{3}\right)a^3b + \left(-3 + \frac{3}{4}\right)ab^3$$
$$= -\frac{31}{6}a^3b - \frac{9}{4}ab^3$$

Entonces, el resultado es: $-\frac{31}{6}a^3b - \frac{9}{4}ab^3$

EJERCICIO **20**

Simplifica:

1. $3x - 8x$
2. $6a^2b + 7a^2b$
3. $-6xy^2 - xy^2 - 3xy^2$
4. $4xy^4z^3 - 4xy^4z^3$
5. $-2a^2b + 12a^2b$
6. $-3a + 5a - 10a$
7. $4x - 3x - 2x$
8. $7ab + 4ab - 3ab$

9. $5a^2 - 7a^2 + 3a^2 - 2a^2$
10. $-m + n + m + n$
11. $\frac{1}{4}a^3b - \frac{3}{5}a^3b + \frac{1}{6}a^3b$
12. $-3a^{x+1} + 2a^{x+1} - a^{x+1} + 2a^{x+1}$
13. $0.25b - 0.4b + 0.2b$
14. $\frac{1}{2}ab^3c - \frac{3}{2}ab^3c - ab^3c$
15. $4m^{x-2} - 10m^{x-2} + 3m^{x-2}$
16. $8x - 3y - 9x + 5y - 2x + y$
17. $10a - 7b + 4a + 5b - 14a + 3b$
18. $-12m + 3n - 4m - 10n + 5m - n$
19. $12a^2b + 3ab^2 - 8a^2b - 10ab^2 - 3a^2b + 6ab^2$
20. $9a^3b^2c - 5a^2bc^2 - 12a^3b^2c + 3a^2bc^2 + 4a^3b^2c$
21. $-3x^2 + 2y^2 - 7 + 10x^2 - 12y^2 + 15$
22. $-81m^2 - 17mn + 15n^2 + 20m^2 + 3mn - 17n^2 + 53m^2 + 18mn + 7n^2$
23. $x^{2a+1} - 3x^{3a-2} - 7x^{2a+1} - 4x^{3a-2} + 8x^{2a+1} + 12x^{3a-2}$
24. $-3a^{m+5} + 10x^{m+2} + 2a^{m+5} - 3x^{m+2} - 8a^{m+5}$
25. $-\frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{1}{2}a^2 + 5ab - 3a^2 - \frac{1}{2}ab$
26. $\frac{2}{3}x^{m-1} - \frac{1}{10}b^{m-2} + \frac{1}{2}x^{m-1} - \frac{3}{4}b^{m-2} - 4x^{m-1}$
27. $0.5x - 2.5y + 0.4x - \frac{1}{2}y - \frac{2}{5}x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Valor numérico

El valor numérico de una expresión algebraica se obtiene al sustituir a las literales o letras con sus respectivos valores numéricos y entonces se realizan las operaciones indicadas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el valor numérico de la expresión: $x^4y^2z^3$; si $x = 4$, $y = 3$, $z = \frac{1}{2}$.

Solución

Se sustituyen los respectivos valores de x, y, z y se efectúan las operaciones indicadas para obtener el valor numérico de la expresión:

$$x^4y^2z^3 = (4)^4(3)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = (256)(9)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2\,304}{8} = 288$$

Entonces, el resultado es: 288

2 ¿Cuál es el valor numérico de $\frac{5x^2}{3}-\frac{2xy}{5}+\frac{y}{3x}$; $x=2, y=\frac{1}{4}$?

Solución

Al seguir los pasos del ejemplo anterior, se obtiene:

$$\frac{5x^2}{3}-\frac{2xy}{5}+\frac{y}{3x}=\frac{5(2)^2}{3}-\frac{2(2)\left(\frac{1}{4}\right)}{5}+\frac{\frac{1}{4}}{3(2)}=\frac{5(4)}{3}-\frac{\frac{4}{4}}{5}+\frac{\frac{1}{4}}{6}$$

$$=\frac{20}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{24}$$

$$=\frac{800-24+5}{120}=\frac{781}{120}$$

Por tanto, el valor numérico de la expresión es igual a: $\frac{781}{120}$

3 Encuentra el valor numérico de $3m^2-2mn+n^2p$; si $m=-3$, $n=4$, $p=-5$.

Solución

Se sustituyen los respectivos valores en la expresión y se realizan las operaciones:

$$3m^2-2mn+n^2p=3(-3)^2-2(-3)(4)+(4)^2(-5)$$
$$=3(9)-2(-3)(4)+(16)(-5)$$
$$=27+24-80$$
$$=-29$$

Por consiguiente, el valor numérico es: -29

EJERCICIO 21

Encuentra el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones si:

$$m=-2,\ n=3,\ p=\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{3},\ y=10,\ z=\frac{1}{2}$$

1. $2m+n$
2. $m-n+y$
3. $8p+3x$
4. $\frac{2z+6x}{n}$
5. $5m-2n+3y$
6. $x+z-p$
7. $\frac{3x+4z-9}{n}$
8. $\frac{m}{n}\left(\frac{y}{2}+m+6\right)$
9. $\frac{m^2+n^2+1}{p+x}$
10. $\left(\frac{z-x}{2m+n}\right)^2$
11. $p^2+2px+x^2$
12. $m^2-3mn+n^2$
13. $\frac{p}{x}-\frac{y}{z}+3$
14. $\frac{m^2}{2}-\frac{n^2}{3}+\frac{y^2}{4}$
15. $\frac{mn}{z}+\frac{mp}{x}-\frac{np}{m}$
16. $\frac{9x^2}{3}-\frac{8z^2}{2}+3$
17. $2\sqrt{p}-\sqrt{\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{24}{5}xy}$
18. $\frac{m-p}{n}-\frac{n+x}{m}$
19. $\frac{8p-z}{2n}-\frac{12x-m}{z}+\frac{2}{x}$
20. $\frac{m^n}{32}-p^n+z^n$
21. $(m-n)(p-x)$
22. $(6x-2p)(3m^2-z^3)$
23. $\frac{2(p-x)}{z}\div\frac{m^2+n^2}{p}$
24. $3(p-x)^m$
25. $\frac{5\sqrt{m^2n^2}}{2}+\frac{3\sqrt{6+y}}{4}-3\sqrt{p}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Lenguaje algebraico

Expresa oraciones de lenguaje común en términos algebraicos.

Ejemplos

Expresa las siguientes oraciones del lenguaje común al lenguaje algebraico.

	Lenguaje común	Lenguaje algebraico
1.	Un número cualquiera.	m
2.	Un número cualquiera aumentado en siete.	$j+7$
3.	La diferencia de dos números cualesquiera.	$f-q$
4.	El doble de un número excedido en cinco.	$2x+5$
5.	La división de un número entero entre su antecesor.	$\frac{x}{x-1}$
6.	La mitad de un número.	$\frac{d}{2}$
7.	El cuadrado de un número.	y^2
8.	La semisuma de dos números.	$\frac{b+c}{2}$
9.	Las dos terceras partes de un número disminuido en cinco es igual a 12.	$\frac{2}{3}(x-5)=12$
10.	Tres números naturales consecutivos.	$x, x+1, x+2$
11.	La parte mayor de 1 200, si la menor es w.	$1\,200-w$
12.	El cuadrado de un número aumentado en siete.	b^2+7
13.	Las tres quintas partes de un número más la mitad de su consecutivo equivalen a 3.	$\frac{3}{5}p+\frac{1}{2}(p+1)=3$
14.	La raíz cuadrada de la diferencia de dos cantidades.	$\sqrt{a-b}$
15.	El producto de un número positivo con su antecesor equivale a 30.	$x(x-1)=30$
16.	El cubo de un número más el triple del cuadrado de dicho número.	x^3+3x^2

EJERCICIO 22

Expresa en lenguaje algebraico las siguientes oraciones:

1. Un número disminuido en tres.
2. El triple de un número excedido en ocho.
3. El cociente de dos números cualesquiera.
4. La parte mayor de 100 si la parte menor es x.
5. Dos números enteros consecutivos.
6. Tres números enteros pares consecutivos.
7. El cuadrado de la suma de dos números cualesquiera.
8. La suma de los cuadrados de dos números cualesquiera.
9. El recíproco de un número.
10. La raíz cúbica de la diferencia de dos números cualesquiera.
11. La suma de las raíces cuadradas de dos números cualesquiera.

12. Diez unidades menos que cinco veces un número.
13. La sexta parte de la suma de dos números.
14. La suma de tres números pares consecutivos es igual al triple del menor, más las tres cuartas partes del mayor.
15. Un número de dos cifras, cuyo dígito de las decenas es el doble del de las unidades.
16. La cuarta parte del producto de tres números cualesquiera menos 4.
17. El cuadrado de la suma de dos números es igual a 49.
18. El área de un cuadrado de lado x unidades.
19. El perímetro de un rectángulo, si se sabe que el largo es tres veces su ancho.
20. El perímetro de un triángulo rectángulo, si se sabe que el cateto mayor mide tres unidades más que el cateto menor y que la hipotenusa es dos unidades mayor que el cateto mayor.
21. El precio de un artículo disminuido en su 15%.
22. El exceso de 50 sobre el doble de un número.
23. Dos números cuya suma sea 80.
24. Tres números impares consecutivos.
25. El área de un rectángulo, si se sabe que su largo mide tres unidades menos que el triple de su ancho.
26. La edad de una persona hace 10 años.
27. El exceso del cubo de un número sobre la mitad del mismo.
28. Los ángulos de un triángulo, si el primero es el doble del segundo.
29. La cantidad de alcohol en un recipiente de x litros de una mezcla si la concentración de alcohol es 30%.
30. La edad de Alberto si tiene cuatro años más que el doble de la edad de Patricia.
31. Las dos terceras partes de un número, más el triple de su consecutivo, menos su recíproco equivale a 10.
32. El doble de un número equivale al triple de su antecesor excedido en siete.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dada una expresión algebraica, se representa en lenguaje común de la siguiente manera:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en lenguaje común la expresión: $3x - 8$.

Solución

Primero se expresa la multiplicación y posteriormente la diferencia.

$3x - 8$ = el triple de un número disminuido en ocho

2 Expresa $2x + x^2$ en lenguaje común.

Solución

La expresión queda de la siguiente manera:

$2x + x^2$ = la suma del doble de un número y su cuadrado

Otra forma de representar en lenguaje común la misma expresión es:

$2x + x^2$ = doble de un número aumentado en su cuadrado.

3 Expresa en lenguaje común $\frac{2}{9}x-1=\frac{4}{3}$.

Solución

Una manera de la expresión en lenguaje común es:

Dos novenos de un número disminuido en la unidad equivalen a cuatro tercios.

EJERCICIO 23

Cambia las siguientes expresiones algebraicas a lenguaje común:

1. $x+3$
2. $2a-11$
3. $3x^2$
4. $\frac{5}{6}a$
5. $\frac{1}{x}$
6. $(a+b)^2$
7. x^3+y^3
8. $\frac{c}{c+1}$
9. $5x=30$
10. $3y-2=25$
11. $\frac{3}{4}z+2=z$
12. $\frac{1}{6}(x-y)+3=x+y$
13. $\frac{x}{y}=\frac{1}{5}(x-y)$
14. x^2-y^2
15. x^2-2x
16. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
17. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$
18. $x^2+(x+1)^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Polinomios

Expresión algebraica que consta de varios términos algebraicos.

Suma

En la suma los polinomios se escriben uno seguido del otro y se reducen los términos semejantes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Suma los siguientes polinomios: $5x^3-3x^2-6x-4$; $-8x^3+2x^2-3$; $7x^2-9x+1$.

Solución

Los polinomios se escriben de la siguiente forma y se realiza la reducción de términos semejantes:

$$(5x^3-3x^2-6x-4)+(-8x^3+2x^2-3)+(7x^2-9x+1)=-3x^3+6x^2-15x-6$$

Por tanto, el resultado es: $-3x^3+6x^2-15x-6$

2 Efectúa la siguiente operación: $(2x - 7y - 3z + 6) + (-9x + 4z) + (-x + 4y + z - 8)$.

Solución

Con un fin más práctico, se ordenan los polinomios haciendo coincidir los términos semejantes en columnas; asimismo, se reducen los coeficientes término a término.

$$\begin{array}{rrrrr} & 2x & -7y & -3z & +6 \\ + & -9x & & +4z & \\ - & x & +4y & +z & -8 \\ \hline & -8x & -3y & +2z & -2 \end{array}$$

El resultado de la suma es: $-8x - 3y + 2z - 2$

3 Realiza la siguiente operación: $\left(\frac{1}{2}x^{a+1} - \frac{3}{4}y^{b-1} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{2}x^{a+1} + \frac{1}{3}y^{b-1} + \frac{1}{4}\right)$.

Solución

Se acomodan en forma vertical los términos semejantes y se realiza la operación columna por columna:

$$\begin{array}{rrrr} & \frac{1}{2}x^{a+1} & -\frac{3}{4}y^{b-1} & -\frac{1}{6} \\ + & \frac{3}{2}x^{a+1} & +\frac{1}{3}y^{b-1} & +\frac{1}{4} \\ \hline & 2x^{a+1} & -\frac{5}{12}y^{b-1} & +\frac{1}{12} \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es: $2x^{a+1} - \frac{5}{12}y^{b-1} + \frac{1}{12}$

EJERCICIO 24

Realiza lo siguiente:

1. Suma los polinomios $3x - 8y - 2z$; $7x + 3y + z$
2. ¿Cuál es la suma de $-5m - 3n + 6$ con $2m + 2n - 8$?
3. Realiza $(11a - b + c) + (-8a - c)$
4. Efectúa $(3p - 5q - 6r) + (2p + 3q - 2r) + (-12p + 4q + r)$
5. Suma $6x^2 + 3x - 2$ con $-x^2 + 7x + 4$
6. $(8a^2 - 6a^3 + 4a) + (4a^3 + a^2 - 4a - 5)$
7. $(5x^4 - 3x^2 + 6x - 3) + (-3x^4 + x^3 + 5x^2 - 7x + 3)$
8. Realiza $(5x^2 - 5x + 6) + (2x^2 - 7x + 4) + (-6x^2 + 10x - 10)$
9. Suma $y^3 - y$; $2y^2 - 5y + 7$; $4y^3 - 5y^2 + 3y - 8$
10. ¿Cuál es el resultado de sumar $8z^3 - 9$; $-4z^3 + 2z^2 + 6$; $5z^2 - 2z^3 - 7z + 2$?
11. Efectúa la suma de $4x^2 - 10xy - 12y^2$; $3y^2 - 10x^2 + 5xy$; $8xy - 3x^2 - 2y^2$
12. Realiza $(x^5 - 3x) + (x^4 + 6x^2) + (-x^3 - 2)$
13. ¿Cuál es el resultado de la suma de $-15x^3y - 3x^2y^2 - 6xy^3$; $-8x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3$?
14. Suma $x^4 - y^4$; $-x^3y + x^2y^2 - xy^3$; $3x^4 + 5x^3y - 4x^2y^2$; $-4x^3y + 3x^2y^2 - 3y^4$
15. Realiza $(3a^6 - 4a^7) + (7a^4 + 6a^2) + (-3a^2 + 7a) + (-a^4 - 4a^2)$

16. Suma los polinomios $\frac{5}{2}x^2 - 5xy + \frac{2}{3}y^2$; $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}xy - \frac{1}{4}y^2$; $-2x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{3}{4}y^2$

17. Efectúa $\left(-\frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{2}ab\right) + \left(-\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{5}{6}ab\right) + \left(-\frac{2}{3}b^2 + \frac{3}{4}ab + \frac{5}{6}a^2\right)$

18. Suma los polinomios $\frac{1}{6}x^2y - \frac{3}{5}y^3 + \frac{1}{8}xy^2$; $x^3 - \frac{1}{2}x^2y - y^3$; $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}xy^2 - \frac{2}{5}y^3$

19. Efectúa $\left(x^2 - \frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{3}x^3 - 2y\right) + \left(-\frac{5}{2}x - \frac{1}{3}y\right)$

20. Suma $x^5 - y^5$; $\frac{1}{10}x^3y^2 - \frac{3}{4}xy^4 - \frac{1}{6}y^5$; $\frac{3}{5}x^4y - \frac{5}{6}x^2y^3 - \frac{1}{9}y^5$; $2x^4y - \frac{2}{5}x^3y^2 - \frac{1}{3}y^5$

21. $\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 2\right) + \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x - 1\right) + \left(-\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right)$

22. ¿Cuál es el resultado de sumar $(5a^{3x} - 2a^{2x} + 7a^x) + (-2a^{3x} + 4a^{2x} - 6a^x)$?

23. Suma $3x^{2a} - 5x^{2a-1} + 4x^{2a-2}$; $x^{2a} + 4x^{2a-1} + x^{2a-2}$; $-3x^{2a} - 7x^{2a-2}$; $x^{2a-1} + 3x^{2a-2}$

24. ¿Cuál es el resultado de sumar $\frac{3}{8}b^{2x} - \frac{5}{6}b^x + b$, $-\frac{1}{4}b^{2x} + b^x - \frac{2}{3}b$ y $-b^{2x} + 2b$?

25. $\left(\frac{1}{3}x^{1-y} - \frac{5}{4}x^{1-2y} - x^{1-3y}\right) + \left(-\frac{1}{6}x^{1-y} + \frac{2}{3}x^{1-3y} + x^{1-2y}\right) + \left(\frac{1}{2}x^{1-y} + \frac{1}{3}x^{1-2y}\right)$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Resta

En esta operación es importante identificar el minuendo y el sustraendo, para posteriormente realizar la reducción de términos semejantes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente operación: $(4a - 2b - 5c) - (3a - 5b - 7c)$.

Solución

En este ejemplo $4a - 2b - 5c$ representa al minuendo y $3a - 5b - 7c$ al sustraendo. Se suprimen los paréntesis y se procede a efectuar la reducción de términos semejantes.

$$\begin{aligned}(4a - 2b - 5c) - (3a - 5b - 7c) &= 4a - 3a - 2b + 5b - 5c + 7c\\ &= a + 3b + 2c\end{aligned}$$

Por consiguiente, el resultado de la resta es: $a + 3b + 2c$

2 De $16x^2 - 7x - 8$ restar $6x^2 - 3x + 6$.

Solución

El minuendo es $16x^2 - 7x - 8$ y el sustraendo es $6x^2 + 3x - 6$, entonces al sustraendo se le cambia el signo $-(6x^2 - 3x + 6) = -6x^2 + 3x - 6$ y se acomodan los polinomios en forma vertical para realizar las operaciones entre los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 16x^2 - 7x - 8 \\ -6x^2 + 3x - 6 \\ \hline 10x^2 - 4x - 14 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es: $10x^2 - 4x - 14$

3 Resta $-\frac{3}{4}a^2b - 6b^3 + 2a^3 - \frac{1}{2}ab^2$ de $\frac{1}{3}a^3 - 2b^3 + \frac{1}{3}a^2b - ab^2$.

Solución

En este caso el minuendo es $\frac{1}{3}a^3 - 2b^3 + \frac{1}{3}a^2b - ab^2$ y el polinomio sustraendo al cual se cambia el signo y se ordena con respecto a los exponentes es: $-\frac{3}{4}a^2b - 6b^3 + 2a^3 - \frac{1}{2}ab^2$

$$-\left(-\frac{3}{4}a^2b - 6b^3 + 2a^3 - \frac{1}{2}ab^2\right) = -2a^3 + \frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{2}ab^2 + 6b^3$$

Se acomodan los polinomios y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^2b - \ ab^2 - 2b^3 \\ -2a^3 + \frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{2}ab^2 + 6b^3 \\ \hline -\frac{5}{3}a^3 + \frac{13}{12}a^2b - \frac{1}{2}ab^2 + 4b^3 \end{array}$$

Finalmente, el resultado es: $-\frac{5}{3}a^3 + \frac{13}{12}a^2b - \frac{1}{2}ab^2 + 4b^3$

EJERCICIO 25

Realiza las siguientes operaciones:

1. De $5a^2 - 3a + 2$ resta $8a^2 - 5a + 7$
2. ¿Cuál es el resultado de $(3x^3 - 5x^2 - 6x + 3) - (2x^3 + 4x - 8)$?
3. De $4a^4 - 10a^3 + 2a^2 - 3a - 4$ resta $5a^5 - 3a^3 + 6a - 3$
4. Efectúa $(4x^3y^2 - 5x^2y^3 + 6x^4y - 8xy^4) - (12x^2y^3 - 3xy^4 + 4x^3y^2 - 9x^4y)$
5. De $7 - 8a^5b + 3a^3b^3 - 6a^4b^2 + 2ab^5$ resta $5a^3b^3 - 3ab^5 + 8 - 7a^5b - 2a^4b^2$
6. Realiza $(3x^{a+2} - 7x^{a+1} - 8x^a + 3x^{a-1}) - (4x^{a+2} + 6x^{a+1} - 7x^a - 9x^{a-1})$
7. De $5a^{2m-1} + 6a^{2m} - 8a^{m+1} - 3a^{m-3}$ resta $12a^{2m} - 5a^{2m-1} - 3a^{m+1} - 4a^{m-3}$
8. ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 6x + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right)$?
9. De $\frac{1}{6}m^2n^3 + 6mn^4 + m^4n - \frac{2}{5}m^3n^2$ resta $\frac{1}{3}m^4n + \frac{3}{2}m^2n^3 + 8mn^4 - m^3n^2$
10. De $\frac{2}{5}x^2y^2 + 3x^3y - 4x^4 + \frac{1}{6}y^4$ resta $-\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^3y + \frac{1}{2}y^4 + \frac{2}{3}x^2y^2$
11. Resta $8x - 3y - 6$ de $5x + 4y - 1$
12. Realiza $(a^2 + a - 1) - (a^2 - a + 1)$
13. Resta $-8x^3 + 6x^2 - 3x - 2$ de $10x^3 - 12x^2 + 2x - 1$
14. ¿Cuál es el resultado de restar $12a^4 - 3a^2 + a - 8$ de $14a^4 - 5a^2 - 3$?
15. Resta $16x^6y^4 - 3x^3y^2 + 8x^7y^5$ de $4x^7y^5 + 9x^3y^2 + 10x^6y^4$
16. Resta $3m^{x-6} - 7m^{x-5} + 8m^{x-9} - 12m^{x+1}$ de $4m^{x-9} - 6m^{x-5} + 2m^{x-2} - 8m^{x+1}$
17. Resta $15a^{n+10} - 3a^{n+1} - 8a^{n-3} + 10a^n$ de $4a^{n+9} - 5a^{n+2} - 3a^{n-3} + 2a^n$

18. Resta $\frac{1}{3}m-\frac{4}{5}n-p$ de $\frac{5}{6}m-\frac{3}{2}n-\frac{1}{6}p$

19. Resta $\frac{3}{4}x^2y-\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{6}xy^2+\frac{2}{3}y^3$ de $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{3}xy^2+\frac{1}{4}y^3$

20. Resta $\frac{1}{2}a^5b-\frac{3}{4}a^3b^3-6a^4b^2$ de $3a^3b^3-8a^5b-\frac{1}{4}a^4b^2+\frac{1}{2}a^2b^4$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Signos de agrupación

Los signos de agrupación se utilizan para indicar que las cantidades en su interior se deben considerar como una sola. Los signos son:

a) Corchetes [ ] *b*) Paréntesis ( ) *c*) Llaves { } *d*) Vínculo ——

Reglas para suprimir los signos de agrupación

Si el signo de agrupación está precedido por el signo "+", éste se suprime y las cantidades que están dentro de él conservan su signo.

$$+(-a+b-c)=-a+b-c$$

Si el signo de agrupación está precedido por el signo "–", éste se suprime y cambia el signo de cada una de las cantidades que se encuentren dentro de él.

$$-(x-2y+3z)=-x+2y-3z$$
$$-\overline{2x-3y}=-(2x-3y)=-2x+3y$$

Si en una expresión existen varios signos de agrupación se suprimen aquellos que no contengan otros. Este proceso se repite hasta llegar a una expresión que carezca de signos de agrupación.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica $2x+\{-[5y+(3x-z)+2-(-x+y-\overline{z+4})]-(-x+y)\}$.

Solución

Se suprime el vínculo:

$$2x+\{-[5y+(3x-z)+2-(-x+y-\overline{z+4})]-(-x+y)\}$$
$$=2x+\{-[5y+(3x-z)+2-(-x+y-z-4)]-(-x+y)\}$$

Se suprimen los paréntesis:

$$=2x+\{-[5y+3x-z+2+x-y+z+4]+x-y\}$$

Se suprimen los corchetes:

$$=2x+\{-5y-3x+z-2-x+y-z-4+x-y\}$$

Se suprimen las llaves:

$$=2x-5y-3x+z-2-x+y-z-4+x-y$$

Se agrupan y reducen los términos semejantes:

$$=2x-3x-x+x-5y+y-y+z-z-2-4$$
$$=-x-5y-6$$

Por tanto, el resultado es: $-x-5y-6$

2 Simplifica: $\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y-\left[-x+\frac{1}{4}y-\overline{x-y}\right]\right)\right\}$.

Solución

Se sigue el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior:

$$\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y-\left[-x+\frac{1}{4}y-\overline{x-y}\right]\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y-\left[-x+\frac{1}{4}y-x+y\right]\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y+x-\frac{1}{4}y+x-y\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+2x-\frac{2}{3}y+x-\frac{1}{4}y+x-y\right\}$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x+2y-2x+\frac{2}{3}y-x+\frac{1}{4}y-x+y$$
$$=-\frac{17}{4}x+\frac{47}{12}y$$

Por tanto, el resultado es: $-\frac{17}{4}x+\frac{47}{12}y$

EJERCICIO 26

Simplifica:

1. $3x-\{2y-(5x+3y)\}$
2. $-(6a-3b)-\{5a-9b-(2c-9b)\}$
3. $-10x-(8x-4y+2z)+(5x-4y-2z)-(10x-3y-4z)$
4. $4m+\{(6m-3n)-(9n-5m)+(8m-2n)\}$
5. $2a-\{7a-(3a-7b)+(10a-9b)\}$
6. $-(x+y)+[3x-2y+\{-8x-5y-(6x-8y-7y)\}-6x]$
7. $8x^2-\{3x^2-6y-\overline{2x-3y}-[9x^2-6y-4x]-(2x^2-9y+6x)-3x^2\}$
8. $-\{-6x+3y-(8x-[2y-4x-\overline{2x-6y}+10x]-9y)+12x\}$
9. $-9y+3z-\{5x-10y-8z-(2x-6y+7z-[2x-3y])\}$
10. $-6x+\{8y-(2x-[4x-9y-6z]-7x)-6y\}-(8x-[3y-2z]-9y)$
11. $\frac{2}{3}a-\left\{-\frac{1}{5}b-\left(2a-\frac{3}{5}b\right)+\frac{2}{3}a\right\}-\frac{1}{2}b$
12. $4x-\frac{2}{5}x-(3x-y)+\left\{\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y-\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}y\right)\right\}$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Multiplicación

Para realizar esta operación es conveniente recordar las reglas de los signos.

Regla de los signos

$(+)(+) = +$ $(+)(-) = -$ $(-)(+) = -$ $(-)(-) = +$

Ley de los exponentes para la multiplicación. En la multiplicación de términos con la misma base los exponentes se suman.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Monomio por monomio

Al multiplicar monomios, primero se multiplican los coeficientes y después las bases.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $(-5x^4y^5z)(3x^2y^6z)$?

Solución

Se multiplican los coeficientes y las bases:

$$(-5x^4y^5z)(3x^2y^6z) = (-5)(3)\ x^4\ x^2\ y^5\ y^6\ zz$$

Se aplican las leyes de los signos y de los exponentes:

$$= -15x^{4+2}y^{5+6}z^{1+1}$$
$$= -15x^6y^{11}z^2$$

Por tanto, el resultado es: $-15x^6y^{11}z^2$

2 Realiza la siguiente operación: $\left(-\frac{5}{4}a^6b^5c^5\right)\left(-\frac{2}{3}a^2bc^4\right)$.

Solución

Se efectúa el producto de las fracciones y se aplica la ley de los exponentes para las bases.

$$\left(-\frac{5}{4}a^6b^5c^5\right)\left(-\frac{2}{3}a^2bc^4\right) = \left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)a^{6+2}b^{5+1}c^{5+4} = \frac{10}{12}a^8b^6c^9 = \frac{5}{6}a^8b^6c^9$$

Por consiguiente, el resultado es: $\frac{5}{6}a^8b^6c^9$

3 Realiza $(-abc)(3ac)$.

Solución

En este ejemplo, la base b no se repite en ambos factores, por tanto, se pasa igual en el resultado.

$$(-abc)(3ac) = -3a^{1+1}bc^{1+1} = -3a^2bc^2$$

El resultado de la multiplicación es: $-3a^2bc^2$

4 Realiza $\left(3x^{2a-1}y^{3a}\right)\left(-2x^{4a-3}y^{2a}\right)$.

Solución

Se aplica el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores, no importa que los exponentes de las bases sean expresiones algebraicas.

$$\left(3x^{2a-1}y^{3a}\right)\left(-2x^{4a-3}y^{2a}\right) = -6x^{(2a-1)+(4a-3)}y^{3a+2a} = -6x^{6a-4}y^{5a}$$

Por tanto, el resultado es: $-6x^{6a-4}y^{5a}$

5 Efectúa $\left(-3a^4bc\right)\left(2a^2c^5\right)\left(-5ab^3c^2\right)$.

Solución

$$\left(-3a^4bc\right)\left(2a^2c^5\right)\left(-5ab^3c^2\right)=(-3)(2)(-5)a^{4+2+1}b^{1+3}c^{1+5+2}=30a^7b^4c^8$$

El resultado del producto es: $30a^7b^4c^8$

EJERCICIO 27

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $(5x)(-3x)$
2. $(4x^3y^5z)(6x^5y^4z)$
3. $(-7a^5c^2)(2a^4bc^6)$
4. $\left(\frac{3}{4}xyz\right)\left(-\frac{2}{5}z^4\right)$
5. $\left(-10m^6p\right)\left(-5m^2p^3\right)$
6. $\left(9c^5m^9p^2\right)\left(-\frac{1}{3}c^6m\right)$
7. $(-xyz)(xyz)$
8. $(ac)\left(-4a^3b\right)$
9. $\left(-\frac{3}{5}mn\right)\left(-\frac{5}{3}m^4np\right)$
10. $\left(\frac{7}{4}a^6b^8c^2\right)\left(\frac{2}{3}a^2b^5c\right)$
11. $\left(-\frac{4}{5}xyz\right)\left(\frac{3}{7}x^2yz^3\right)$
12. $\left(\frac{9}{5}mp^2\right)\left(-15m^6p\right)$
13. $\left(0.5m^6p^5\right)\left(0.2m^2n\right)$
14. $(0.4abc)(0.12xyz)$
15. $(5a^mb^nc)(-2a^2b^3c)$
16. $(6m^{2x+8}n^{4x})(-7m^{x-6}n^5)$
17. $(-9x^{3m}y^{2n-1})(4x^5y^6)$
18. $(-3x^{2a-3}y^{5a+1})(-2x^{3a+1}y^{4a-6})$
19. $\left(-\frac{7}{6}a^{4x-3}b^{2x}c^4\right)\left(-\frac{3}{14}a^{x+1}bc^x\right)$
20. $\left(-\frac{1}{2}x^{4a-1}y^{2a}\right)\left(4x^{2-3a}y^{1-2a}\right)$
21. $(5ab)(-3a^2b)(2a^3bc)$
22. $(-7x^2y^5z)(-2x^6y^2)(-4xyz)$
23. $(-5x)(3y)(-2z)$
24. $(4x^4y)(-2xy^2)(3x^6y)(-2y^4)$
25. $\left(\frac{1}{3}a^3b^2c\right)\left(\frac{2}{5}a^4bc^2\right)(6ac)\left(\frac{10}{3}a^4b^2\right)$
26. $\left(-\frac{3}{4}a^6b\right)\left(\frac{2}{3}a^2bc\right)\left(-\frac{1}{2}ac\right)\left(-2b^2c^2\right)$
27. $(4a^5b^3c)(-5a^{2x}b^xc)(-2a^{4x-1}b^{2x}c^x)$
28. $\left(\frac{1}{4}x^{3a-1}y^{4a}\right)\left(\frac{2}{3}x^{a+2}y^{a+1}\right)\left(-\frac{1}{2}xy^{2a}\right)$
29. $(3x^{3a-1}y)(-4x^{2a}y^{4a})(-2x^{4a-1}y^{2a})$
30. $(2a^{8x}b^6)(-2m^{2x}n^3)(-5a^2m^3n^{5x})$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Polinomio por monomio

Se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio o viceversa, como lo ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve $(5x^5y^4-3x^4y^3z+4xz^4)(-3x^4y)$.

Solución

Se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio:

$$(5x^5y^4-3x^4y^3z+4xz^4)(-3x^4y)=(5x^5y^4)(-3x^4y)+(-3x^4y^3z)(-3x^4y)+(4xz^4)(-3x^4y)$$
$$=-15x^9y^5+9x^8y^4z-12x^5yz^4$$

Por tanto, el resultado es: $-15x^9y^5+9x^8y^4z-12x^5yz^4$

2 Realiza el siguiente producto: $(-7a^{x+3}b^{1-2x})(4a^{3x-1}b^{2x} - 5a^{3x-2}b^{2x+1} + 3a^{3x-3}b^{2x+2})$.

Solución

Se realiza el producto del monomio por cada uno de los elementos del polinomio:

$$(-7a^{x+3}b^{1-2x})(4a^{3x-1}b^{2x} - 5a^{3x-2}b^{2x+1} + 3a^{3x-3}b^{2x+2})$$
$$= (-7a^{x+3}b^{1-2x})(4a^{3x-1}b^{2x}) + (-7a^{x+3}b^{1-2x})(-5a^{3x-2}b^{2x+1}) + (-7a^{x+3}b^{1-2x})(3a^{3x-3}b^{2x+2})$$
$$= -28a^{4x+2}b + 35a^{4x+1}b^2 - 21a^{4x}b^3$$

Luego, el resultado es: $-28a^{4x+2}b + 35a^{4x+1}b^2 - 21a^{4x}b^3$

3 Resuelve el siguiente producto: $\left(\frac{4}{5}x^{m-1} - \frac{2}{3}x^{m-2} + \frac{3}{4}x^{m-3}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right)$.

Solución

Se multiplica el monomio por cada uno de los elementos del polinomio:

$$\left(\frac{4}{5}x^{m-1} - \frac{2}{3}x^{m-2} + \frac{3}{4}x^{m-3}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right)$$
$$= \left(\frac{4}{5}x^{m-1}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right) + \left(-\frac{2}{3}x^{m-2}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right) + \left(\frac{3}{4}x^{m-3}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right)$$
$$= -\frac{8}{15}x^{2m} + \frac{4}{9}x^{2m-1} - \frac{1}{2}x^{2m-2}$$

Por consiguiente, el resultado es: $-\frac{8}{15}x^{2m} + \frac{4}{9}x^{2m-1} - \frac{1}{2}x^{2m-2}$

EJERCICIO 28

Realiza los siguientes productos:

1. $(4a^2 - 7ab)(2a^3b)$
2. $(-3m)(5m^4 - 3m^3 + 6m - 3)$
3. $(3x^3 - 7x^2 - 2x)(xy)$
4. $(-3ab)(2a^2 - 7ab + 8b^2)$
5. $(6a^3b^2 - 7a^2b^3 + 4ab^5)(4a^5b^2)$
6. $(-5xy^2z)\ (7x^6y^2z - 3x^5y - 4xz)$
7. $(5m^3n - 3m^4p + 6m^2)(8mp^3)$
8. $(4a^3c - 7a^2b - 2c)(-3ac^4)$
9. $(5m^6n - 3mn^4 + 2mn)(3m^{x+1}n^{2x})$
10. $(-2x^{a-2})(7x^5 - 8x^2 + 6x^3 - 9x + 2)$
11. $(3a^{2x+1}b^{4x} - 7a^{2x}b^{4x+1} - 4a^xb^{3x+1})(-3a^{x+1}b^{1-x})$
12. $(-5x^{2m}y^{n+1})(5x^{3m}y^{2n} - 2x^{3m+1}y^{2n+1} - 4x^{3m+2}\ y^{2n+2})$
13. $(3a^{x+2}b^yc^m - 3a^{x+1}b^{y+1}c^2 + 2a^{x-3}b^{y-1}c)(-4a^3b^2c^5)$
14. $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{5}b^2 - \frac{3}{4}ab\right)\left(\frac{2}{3}ab^2\right)$

15. $\left(\frac{4}{3}x^3y\right)\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{3}y^2+6xy\right)$

16. $\left(\frac{2}{5}a^6-\frac{7}{2}a^4b^2+\frac{8}{5}a^2b^4-\frac{1}{16}b\right)\left(\frac{4}{5}ab^2c\right)$

17. $\left(\frac{4}{5}a^{6m+1}b^{2m}-\frac{7}{2}a^{m+3}c^m\right)\left(-5a^3c^4\right)$

18. $\left(\frac{1}{2}x^{m-3}-\frac{1}{6}x^{m-2}+\frac{1}{4}x^{m-1}\right)\left(-6x^m\right)$

19. $\left(4ab\right)\left(\frac{7}{3}a^mb^{3n}c+\frac{4}{5}a^{m-1}b^{3n+2}\right)$

20. $\left(-\frac{4}{5}m^xn^4\right)\left(\frac{4}{3}m^{2x+3}n^{3a}-\frac{5}{4}m^{2x+2}n^{3a-1}-\frac{7}{2}m^{2x}n\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Polinomio por polinomio

Para multiplicar polinomios por polinomios, se siguen los pasos indicados en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: $(5x^2 - 3x - 2)(4x - 3x^2 - 6)$.

Solución

Se escriben los factores de la multiplicación en forma escalonada (como en las multiplicaciones aritméticas), y se ordenan los polinomios con respecto a los exponentes en forma ascendente o descendente, según se quiera.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x - 2 \\ \times \quad -3x^2 + 4x - 6 \\ \hline \end{array}$$

Se multiplica el primer término del polinomio de abajo por cada uno de los términos del polinomio de arriba.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x \;\; - 2 \\ \times \;\; -3x^2 + 4x \;\; - 6 \\ \hline -15x^4 + 9x^3 + 6x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (-3x^2)(5x^2) = -15x^4 \\ (-3x^2)(-3x) = +9x^3 \\ (-3x^2)(-2) = +6x^2 \end{array}$$

A continuación se multiplica el segundo término del polinomio de abajo por cada uno de los términos del polinomio de arriba y los resultados se colocan debajo de sus respectivos términos semejantes del primer resultado.

$$\begin{array}{rrrr} & 5x^2 - & 3x & -2 \\ \times & -3x^2 + & 4x & -6 \\ \hline -15x^4 + & 9x^3 + & 6x^2 & \\ & +20x^3 - & 12x^2 - & 8x \end{array} \qquad \begin{array}{l} (4x)(5x^2) = 20x^3 \\ (4x)(-3x) = -12x^2 \\ (4x)(-2) = -8x \end{array}$$

Se repite el paso anterior para cada uno de los términos siguientes (si es que existe).

$$\begin{array}{rrrrr} & 5x^2 - 3x - 2 & & & \\ \times & -3x^2 + 4x - 6 & & & \\ \hline -15x^4 + & 9x^3 + & 6x^2 & & \\ & +20x^3 - & 12x^2 - & 8x & \\ & & -30x^2 + & 18x + & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (-6)(5x^2) = -30x^2 \\ (-6)(-3x) = 18x \\ (-6)(-2) = 12 \end{array}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Por último, se realiza la suma.

$$\begin{array}{rrrrr} & 5x^2 & -3x & -2 & \\ \times & -3x^2 & +4x & -6 & \\ \hline -15x^4 & +9x^3 & +6x^2 & & \\ & +20x^3 & -12x^2 & -8x & \\ & & -30x^2 & +18x & +12 \\ \hline -15x^4 & +29x^3 & -36x^2 & +10x & +12 \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es: $-15x^4 + 29x^3 - 36x^2 + 10x + 12$

2 Efectúa la siguiente operación: $(5x^4y - 3x^2y^3 - 6xy)(3x^4y - 4x^2y^3 + 3xy)$.

Solución

Se acomodan los polinomios de manera vertical y se realiza el procedimiento descrito en el ejemplo anterior.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 5x^4y & -3x^2y^3 & -6xy & & \\ \times & 3x^4y & -4x^2y^3 & +3xy & & \\ \hline & 15x^8y^2 & -9x^6y^4 & -18x^5y^2 & & \\ + & & -20x^6y^4 & & +12x^4y^6 & +24x^3y^4 \\ & & & +15x^5y^2 & -9x^3y^4 & -18x^2y^2 \\ \hline & 15x^8y^2 & -29x^6y^4 & -3x^5y^2 & +12x^4y^6 +15x^3y^4 & -18x^2y^2 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es: $15x^8y^2 - 29x^6y^4 - 3x^5y^2 + 12x^4y^6 + 15x^3y^4 - 18x^2y^2$

3 ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{5}{2}m^2 - 3mn + \frac{1}{3}n^2\right)\left(\frac{2}{3}m - \frac{1}{2}n\right)$?

Solución

Éste es un producto de un polinomio por un binomio, los resultados de los productos se acomodan de manera horizontal y se realizan las reducciones de términos semejantes.

$$\left(\frac{5}{2}m^2 - 3mn + \frac{1}{3}n^2\right)\left(\frac{2}{3}m - \frac{1}{2}n\right) = \frac{5}{3}m^3 - 2m^2n + \frac{2}{9}mn^2 - \frac{5}{4}m^2n + \frac{3}{2}mn^2 - \frac{1}{6}n^3$$

$$= \frac{5}{3}m^3 - \frac{13}{4}m^2n + \frac{31}{18}mn^2 - \frac{1}{6}n^3$$

El resultado de la operación es: $\frac{5}{3}m^3 - \frac{13}{4}m^2n + \frac{31}{18}mn^2 - \frac{1}{6}n^3$

4 Obtén el resultado de $\left(2x^{a+3} + 5x^{a+2} - x^{a+1} + x^{a-2}\right)\left(x^{a+1} + 2x^a - x^{a-1}\right)$.

Solución

Se acomodan los polinomios verticalmente y en orden decreciente y se obtiene como resultado:

$$\begin{array}{lllllllll} & 2x^{a+3} & +5x^{a+2} & -x^{a+1} & +x^{a-2} & & & & \\ \times & & x^{a+1} & +2x^a & -x^{a-1} & & & & \\ \hline & 2x^{2a+4} & +5x^{2a+3} & -x^{2a+2} & & & +x^{2a-1} & & \\ + & & +4x^{2a+3} & +10x^{2a+2} & -2x^{2a+1} & & & +2x^{2a-2} & \\ & & & -2x^{2a+2} & -5x^{2a+1} & +x^{2a} & & & -x^{2a-3} \\ \hline & 2x^{2a+4} & +9x^{2a+3} & +7x^{2a+2} & -7x^{2a+1} & +x^{2a} & +x^{2a-1} & +2x^{2a-2} & -x^{2a-3} \end{array}$$

EJERCICIO 29

Efectúa los siguientes productos:

1. $(x-7)(x+2)$
2. $(m+9)(m-8)$
3. $(-x+2)(3-x)$
4. $(3x+7)(x+4)$
5. $(2x-5)(3x+2)$
6. $(5x-4y)(5x+4y)$
7. $(3x+2y)(3x-y)$
8. $(n^2+4)(n^2-7)$
9. $\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)$
10. $\left(\frac{5}{3}x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x-3y\right)$
11. $\left(\frac{3}{2}y-\frac{1}{3}x\right)\left(-\frac{4}{5}x-\frac{1}{2}y\right)$
12. $(x^2-2xy+y^2)(x-y)$
13. $(x^2+2xy+y^2)(x+y)$
14. $(m^2-mn+n^2)(m+n)$
15. $(m^2+mn+n^2)(m-n)$
16. $(5x^2-7y^2-4xy)(3x-2y)$
17. $(4b^2-9a^2-4ab)(3a-7b)$
18. $(2a^3-3a+4)(2a-1)$
19. $(5x^4-3x^2-6)(3x-4)$
20. $(x^2-3x+1)(x^2-1)$
21. $\left(\frac{1}{5}a^2-3ab+\frac{1}{3}b^2\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{7}{2}b\right)$
22. $\left(\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{5}y^2-\frac{3}{4}xy\right)\left(4x-\frac{1}{3}y\right)$
23. $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{5}xy\right)\left(2y-\frac{3}{2}x\right)$
24. $(m^{x-1}-n^{a-1})(m-n)$
25. $(b^m-b^{m+1}+b^{m+2})(b+1)$
26. $(2x^{m+1}+x^{m+2}-x^m)(x^{m+3}-2x^{m+1})$
27. $(x^{a+2}-2x^a+3x^{a+1})(x^a+x^{a+1})$
28. $(3x^2-5x-2)(2x^2-7x+4)$
29. $(4x-6x^2-9)(3x^2+2x+1)$
30. $(4x^3-2x^2y+6xy^2)(x^2y-xy^2-2y^3)$
31. $(m+n-p)(m-p-n)$
32. $(2m-3n+5p)(n+2p-m)$
33. $(a+b-c)(a-b+c)$
34. $(x^2-2x+1)(x^4-2x^2+2)$
35. $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)(6x^2-4x-2)$
36. $(x^m+x^{m+1}-x^{m+2})(x^m-x^{m+1}+x^{m+2})$
37. $(2x^{2m+1}+3x^{2m}-x^{2m-1})(x^2+2x+1)$
38. $(a^2b^2-a^3b+a^4-3ab^3+b^4)(a^2-2b^2+ab)$
39. $(3m^{a-2}-2m^{a-1}+m^a)(m^2+2m-1)$
40. $(3x^{2a}+x^{2a+1}-5x^{2a+2})(x^{3a-3}-8x^{3a-2}-6x^{3a-1})$
41. $(m^3-m+m^2+1)(m^2+m^3-2m-1)$
42. $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x^2-2+\frac{1}{4}x\right)$
43. $(a^{x+1}-2a^{x+2}-a^{x+3}+a^{x+4})(a^{x-3}-a^{x-1}+a^{x-2})$
44. $(a^{x+3}+4a^{x+1}-5a^{x-1})(a^{x+1}+a^{x+2}+a^{x+3})$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

División

A continuación se muestra la regla de los signos de esta operación:

Regla de los signos

$(+)\div(+)=+$　　$(+)\div(-)=-$　　$(-)\div(+)=-$　　$(-)\div(-)=+$

Ley de los exponentes para la división

En la división los exponentes de las bases iguales se restan.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Monomio entre monomio

Cuando se dividen monomios, primero se realiza la división de los coeficientes y después se aplica la ley de los exponentes para las bases. Si la división de los coeficientes no es exacta, entonces se deja especificada; si las bases no son iguales, entonces se deja expresado el cociente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente operación: $\frac{-16a^5b^4c^6}{8a^2b^3c}$.

Solución

Se dividen los coeficientes y las bases para obtener:

$$\frac{-16a^5b^4c^6}{8a^2b^3c} = \frac{-16}{8}a^{5-2}b^{4-3}c^{6-1} = -2a^3bc^5$$

Finalmente, el resultado es: $-2a^3bc^5$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{-10x^7y^6c}{-6x^2y^2c}$?

Solución

La división de los coeficientes no es exacta, por tanto, se deja expresada como fracción, la cual se simplifica y se efectúa la división de las bases.

$$\frac{-10x^7y^6c}{-6x^2y^2c} = \frac{10}{6}x^{7-2}y^{6-2}c^{1-1} = \frac{5}{3}x^5y^4c^0 = \frac{5}{3}x^5y^4$$

Por tanto, el resultado es: $\frac{5}{3}x^5y^4$

3 Realiza $\frac{-xyz}{-xyz}$.

Solución

Se aplica la ley de los signos para la división y se dividen las bases.

$$\frac{-xyz}{-xyz} = x^{1-1}y^{1-1}z^{1-1} = x^0y^0z^0 = (1)(1)(1) = 1$$

El resultado es: 1

4 ¿Cuál es el resultado de $8x^{3a-1}y^{5a-4} \div 2x^{2a+3}y^{3a-1}$?

Solución

Se dividen los coeficientes y se restan los exponentes para obtener como resultado:

$$\frac{8x^{3a-1}y^{5a-4}}{2x^{2a+3}y^{3a-1}} = 4x^{(3a-1)-(2a+3)}y^{(5a-4)-(3a-1)} = 4x^{3a-1-2a-3}y^{5a-4-3a+1} = 4x^{a-4}y^{2a-3}$$

EJERCICIO 30

Realiza las siguientes divisiones de monomios:

1. $\frac{9a^6b^{10}}{3a^2b^5}$
2. $\frac{42x^9y^2}{-7x^5y^2}$
3. $\frac{-26a^5b^6}{-13b^3}$
4. $\frac{32p^5q^6}{-8p^3q^2}$
5. $\frac{36a^{10}b^8}{-12a^2b^7}$
6. $\frac{-25a^{12}b^9}{-5a^6b^3}$
7. $\frac{-6x^8y^9}{18x^4y^7}$
8. $\frac{-44a^5b^8}{66a^3b^2}$
9. $\frac{12x^3y^2z^4}{18xy^2z^3}$
10. $\frac{2x^4y^5z}{8x^3y^2}$
11. $\frac{12x^{10a-4}y^{5b-2}}{-6x^{3a+2}y^{2b+1}}$
12. $\frac{-10a^{5n-5}b^{4n+2}}{-2a^{4n+1}b^{2n-5}}$
13. $\frac{48a^{2x+3}b^{3x-2}c^x}{-16a^{x+1}b^{2x-5}c^3}$
14. $\frac{-20x^{5m-2}y^{9n}z^{2m}}{-6x^3y^5z^2}$
15. $\frac{x^{2a-1}y^{3a-4}z^5}{x^{2a-1}y^{3a-4}z^5}$
16. $-\frac{7}{8}a^2b^5c^8 \div -\frac{5}{2}ab^5c^6$
17. $-\frac{3}{5}a^3b \div -\frac{4}{5}a^2b$
18. $\frac{2}{3}xy^5z^3 \div -\frac{1}{6}z^3$
19. $-\frac{7}{8}a^mb^n \div -\frac{3}{4}ab^2$
20. $-\frac{2}{9}x^4y^5 \div -2$
21. $3m^4n^5p^6 \div -\frac{1}{3}m^4np^5$
22. $-\frac{3}{8}c^3d^5 \div \frac{3}{4}d^x$
23. $\frac{3}{2}a^{m-2}b^{n-5} \div \frac{3}{4}a^{m-5}b^{n-7}$
24. $\frac{3}{4}a^{m+1}b^{n+2} \div \frac{2}{3}a^{2-3m}b^{4-n}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Polinomio entre monomio

Se divide cada término del polinomio entre el monomio, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $\frac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2}$

Solución

Se divide cada término del polinomio entre el monomio.

$$\frac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2}=\frac{2x^4}{-x^2}-\frac{5x^3}{-x^2}+\frac{x^2}{-x^2}=-2x^{4-2}+5x^{3-2}-x^{2-2}$$
$$=-2x^2+5x-x^0=-2x^2+5x-1$$

2 Determina el cociente de: $\frac{16x^6y^5z-12x^4y^6z^2+6x^3y^9}{-4x^2y}$.

Solución

Al aplicar los pasos del ejemplo anterior se obtiene:

$$\frac{16x^6y^5z}{-4x^2y}-\frac{12x^4y^6z^2}{-4x^2y}+\frac{6x^3y^9}{-4x^2y}=-4x^{6-2}y^{5-1}z+3x^{4-2}y^{6-1}z^2-\frac{3}{2}x^{3-2}y^{9-1}$$
$$=-4x^4y^4z+3x^2y^5z^2-\frac{3}{2}xy^8$$

El resultado es: $-4x^4y^4z+3x^2y^5z^2-\frac{3}{2}xy^8$

3 ¿Cuál es el cociente de $\frac{4x^{2m+1}+8x^{3m-2}-12x^{m+3}}{6x^{m-2}}$?

Solución

El monomio divide a cada uno de los términos que conforman el polinomio.

$$\frac{4x^{2m+1}}{6x^{m-2}}+\frac{8x^{3m-2}}{6x^{m-2}}-\frac{12x^{m+3}}{6x^{m-2}}=\frac{4}{6}x^{(2m+1)-(m-2)}+\frac{8}{6}x^{(3m-2)-(m-2)}-\frac{12}{6}x^{(m+3)-(m-2)}$$
$$=\frac{2}{3}x^{2m+1-m+2}+\frac{4}{3}x^{3m-2-m+2}-2x^{m+3-m+2}$$
$$=\frac{2}{3}x^{m+3}+\frac{4}{3}x^{2m}-2x^{5}$$

Por consiguiente, el resultado es: $\frac{2}{3}x^{m+3}+\frac{4}{3}x^{2m}-2x^{5}$

EJERCICIO 31

Realiza las siguientes divisiones:

1. $\frac{x^2+2x}{x}$
2. $\frac{4x^3+2x^2}{2x^2}$
3. $\frac{8x^2y-20x^3}{4x^2}$
4. $\frac{2x^3-x^2+x}{x}$
5. $\frac{2x^4+6x^3-8x^2}{2x^2}$
6. $\frac{8x^6-10x^4-12x^3}{-4x^2}$
7. $\frac{27m^4n^6-15m^3n^6+3mn^2}{3mn^2}$
8. $\frac{32a^7b^5+48a^6b^4-a^4b^3}{8ab^3}$
9. $\frac{28x^9y^6-49x^7y^3-7x^2y}{7x^2y}$
10. $\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{5}{2}a\right)\div\frac{1}{2}a$
11. $\left(\frac{1}{5}a^5b^7-\frac{1}{4}a^4b^5-a^3b^4\right)\div 6a^3b^2$
12. $\left(\frac{1}{4}a^8b^7-\frac{3}{2}a^6b^6+\frac{1}{6}a^4b^3\right)\div -\frac{3}{4}ab^2$
13. $\left(\frac{3}{5}x^7y^9-\frac{2}{3}x^8y^7+\frac{4}{3}x^4y^5\right)\div\frac{4}{15}xy^5$
14. $\left(\frac{1}{6}x^8y^7-\frac{4}{3}x^6y^5+\frac{1}{3}x^5y^{10}\right)\div -\frac{6}{5}x^4y^3$
15. $\left(\frac{1}{2}x^{10}y^8-\frac{2}{3}x^8y^7+\frac{1}{8}x^5y^6-x^3y^5\right)\div -\frac{5}{2}x^2y^3$
16. $\frac{a^{2x}b^{3y}c^{4z}+6a^{3x}b^{4y}c^{5z}-8a^{4x}b^{5y}c^{6z}}{\frac{1}{2}a^{2x}b^{3y}c^{4z}}$
17. $\frac{x^{2a-1}y^{3a+5}-12x^{a+6}y^{2a-6}}{6x^{a+2}y^{3a-7}}$
18. $\frac{16a^{5m-3}b^{7m+1}-12a^{4m+2}b^{6m-5}+8a^{3m-4}b^{5m}}{-4a^{2m-5}b^{4m+1}}$
19. $\frac{20a^{6m-4}b^{3n+10}-50a^{7m-2}b^{3n-1}+8a^{5m}b^{5}}{-10a^{2m+2}b^{2n}}$
20. $\frac{\frac{3}{4}x^{2-a}y^{3-b}z^{4-c}+\frac{1}{6}x^{1-a}y^{2-b}z^{3}-\frac{1}{3}x^{-a}y^{-b}z^{4}}{\frac{1}{12}x^{2-3a}y^{3-2b}z^{1-c}}$

 Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Polinomio entre otro polinomio

A continuación se enlistan los pasos a seguir para realizar esta operación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: $\frac{3x^2-5x+2}{3x-2}$.

Solución

1. Se colocan los polinomios como en la división con números reales, y se ordenan según convenga con respecto a los exponentes:

$$3x-2\ \overline{\big)\,3x^2-5x+2}$$

2. Se toma el primer término del dividendo, se divide entre el primer término del divisor y el resultado se coloca en la parte de arriba: $\frac{3x^2}{3x}=x$.

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline 3x-2 & 3x^2-5x+2 \end{array}$$

3. Se multiplica el resultado de la división por cada uno de los términos del divisor; a cada resultado se le cambia el signo y se acomoda debajo del dividendo con su término semejante: $(x)(3x)=3x^2$; $(x)(-2)=-2x$.

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline 3x-2 & 3x^2-5x+2 \\ & \underline{-3x^2+2x} \end{array}$$

4. Se reducen los términos semejantes y se baja el siguiente término del dividendo, a la expresión resultante se le llama primer residuo.

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline 3x-2 & 3x^2-5x+2 \\ & \underline{-3x^2+2x} \\ & \qquad -3x+2 \end{array}$$

5. Se repite el primer paso, es decir, se divide el primer término del primer residuo que resultó de la reducción anterior entre el primer término del divisor y se escribe el resultado arriba: $\frac{-3x}{3x}=-1$.

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline 3x-2 & 3x^2-5x+2 \\ & \underline{-3x^2+2x} \\ & \qquad -3x+2 \end{array}$$

6. Se multiplica el resultado de la división anterior por cada uno de los términos del divisor y se escribe el resultado debajo de cada término semejante del residuo anterior (no olvides cambiar el signo): $(-1)(3x)=-3x$; $(-1)(-2)=2$.

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline 3x-2 & 3x^2-5x+2 \\ & \underline{-3x^2+2x} \\ & \qquad -3x+2 \\ & \qquad\ \ 3x-2 \end{array}$$

7. Se realiza la suma y si el residuo es cero como en el ejemplo, la división terminó; en caso contrario, se siguen los pasos anteriores hasta obtener cero como residuo o algún polinomio de grado menor al del divisor.

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline 3x-2 & 3x^2-5x+2 \\ & \underline{-3x^2+2x} \\ & \qquad -3x+2 \\ & \qquad\ \ \underline{3x-2} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Por tanto, el resultado del cociente es: $x-1$

2 Efectúa la siguiente operación: $\frac{5a^2-21b^2+8ab}{a+3b}$.

Solución

Al emplear los pasos del ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r|l} & 5a-7b \\ \hline a+3b & 5a^2+8ab-21b^2 \\ & -5a^2-15ab \\ \hline & \quad -7ab-21b^2 \\ & \quad 7ab+21b^2 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

$$\frac{5a^2}{a}=5a \rightarrow (5a)(a+3b)=5a^2+15ab$$

$$\frac{-7ab}{a}=-7b \rightarrow (-7b)(a+3b)=-7ab-21b^2$$

Por consiguiente, el cociente es: $5a-7b$

En una división de polinomios, si al dividendo le falta uno de sus términos, se deja indicado el espacio que ocupa dicho término o se escribe con coeficiente 0.

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $\frac{-2a+a^4-a^2-1}{a+a^2+1}$?

Solución

Se ordena tanto el dividendo como el divisor en orden decreciente con respecto a los exponentes y, en el caso del dividendo, se deja el espacio correspondiente al término de exponente 3:

$$a^2+a+1 \,\overline{\big|\, a^4+0a^3-a^2-2a-1}$$

Se realiza la división como en los ejemplos anteriores:

$$\begin{array}{r|l} & a^2-a-1 \\ \hline a^2+a+1 & a^4+0a^3-a^2-2a-1 \\ & -a^4-a^3-a^2 \\ \hline & \quad -a^3-2a^2-2a \\ & \quad a^3+a^2+a \\ \hline & \quad\quad -a^2-a-1 \\ & \quad\quad a^2+a+1 \\ \hline & \quad\quad 0 \end{array}$$

$$\frac{a^4}{a^2}=a^2 \rightarrow (a^2)(a^2+a+1)=a^4+a^3+a^2$$

$$\frac{-a^3}{a^2}=-a \rightarrow (-a)(a^2+a+1)=-a^3-a^2-a$$

$$\frac{-a^2}{a^2}=-1 \rightarrow (-1)(a^2+a+1)=-a^2-a-1$$

El resultado de la división es: a^2-a-1

EJERCICIO 32

Determina el cociente de las siguientes divisiones:

1. $\frac{x^2+3x+2}{x+1}$
2. $\frac{x^2+4x+3}{x+3}$
3. $\frac{x^2+5xy+6y^2}{x+2y}$
4. $\frac{x^2+7x+12}{x+4}$
5. $\frac{x^2-4x-12}{x+2}$
6. $\frac{x^2+3x-18}{x-3}$

7. $\dfrac{m^2-11mn+28n^2}{m-7n}$

8. $\dfrac{x^2-9xy-10y^2}{x+y}$

9. $\dfrac{n^4+2n^2-48}{n^2+8}$

10. $\dfrac{m^6-m^3-20}{m^3-5}$

11. $\dfrac{x^8+11x^4+18}{x^4+9}$

12. $\dfrac{x^{12}-9x^6+14}{x^6-2}$

13. $\dfrac{9x^2-6x-35}{3x+5}$

14. $\dfrac{16m^2-4m-6}{4m+2}$

15. $\dfrac{15a^2-a-28}{3a+4}$

16. $\dfrac{8a^2-6ab-27b^2}{4a-9b}$

17. $\dfrac{49m^2-56m+15}{7m-5}$

18. $\dfrac{15a^2-ab-28b^2}{5a-7b}$

19. $\dfrac{7m^2-31mn+12n^2}{m-4n}$

20. $\dfrac{12x^2-5xy-2y^2}{4x+y}$

21. $\dfrac{18m^4-21m^2n^2-15n^4}{6m^2+3n^2}$

22. $\dfrac{9m^4-9m^2-40}{3m^2-8}$

23. $\dfrac{20m^6-9m^3-18}{4m^3+3}$

24. $\dfrac{15m^3-34m^2+9m+10}{3m-5}$

25. $\dfrac{12x^3+13x^2-59x+30}{4x-5}$

26. $\dfrac{8a^3-44a^2+44a+42}{4a^2-8a-6}$

27. $(x^3-y^3)\div(x-y)$

28. $(8x^3+27y^3)\div(3y+2x)$

29. $(x^6-8y^6)\div(x^2-2y^2)$

30. $(a^4-a)\div(a-1)$

31. $\dfrac{x^3+48x-64-12x^2}{x^2+16-8x}$

32. $\dfrac{4x^4+x^2y^2-5xy^3-6y^4}{2x^2-xy-2y^2}$

33. $\dfrac{6x^4-8x^2-x^3+x+2}{2x^2-x-1}$

34. $\dfrac{3x^4+2x^3+3x-6x^2-2}{x^2+x-2}$

35. $\dfrac{4x^4-4x^3-13x^2+11x+4}{2x^2-4+x}$

36. $\dfrac{6x^4-19x^3-12x^2+43x+30}{3x^2-5x-6}$

37. $\dfrac{4a^4+26a^3-79a^2-20a+42}{a^2+8a-6}$

38. $\dfrac{12x^4-36x^3-29x^2+38x+24}{2x^2-5x-6}$

39. $\dfrac{28x^4-17x^3+18x+23x^2-24}{4x^2-3x+6}$

40. $\dfrac{5x^4-9x^3-23x^2+36x+12}{x^2-4}$

41. $\dfrac{12x^4+9x^3-11x^2-6x+2}{3x^2-2}$

42. $\dfrac{10a^4-41a^3b+9a^2b^2+38ab^3+14b^4}{2a-7b}$

43. $\dfrac{8x^6-32x^5+16x^4+19x^3+34x^2+19x-10}{2x-5}$

44. $\left(5a^2-\dfrac{13}{18}ab-\dfrac{2}{3}b^2\right)\div\left(3a-\dfrac{4}{3}b\right)$

45. $\left(\dfrac{4}{5}x^2-\dfrac{203}{75}xy+\dfrac{2}{15}y^2\right)\div\left(\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{3}y\right)$

46. $\left(6m^2-\dfrac{3}{2}mn+\dfrac{1}{12}n^2\right)\div\left(\dfrac{3}{2}m-\dfrac{1}{4}n\right)$

47. $\dfrac{\dfrac{5}{8}a^3+\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{17}{18}a-\dfrac{4}{3}}{\dfrac{5}{2}a^2-\dfrac{2}{3}a-2}$

48. $\left(x^{a+3}+x^a\right)\div(x+1)$

49. $\dfrac{a^m-ab^{y-1}-a^{m-1}b+b^y}{a-b}$

50. $\dfrac{m^{a+2}-2m^a+m^{a-2}}{m^2+2m+1}$

51. $\dfrac{m^{2x+3}+4m^{2x+2}+m^{2x+1}-2m^{2x}}{m^x+m^{x+1}}$

52. $\dfrac{m^{2x+5}+2m^{2x+4}-3m^{2x+3}-4m^{2x+2}+2m^{2x+1}}{m^{x+3}-2m^{x+1}}$

53. $\dfrac{-30m^{5x+1}+46m^{5x}+5m^{5x-1}-23m^{5x-2}+3m^{5x-3}}{m^{3x-3}-8m^{3x-2}+6m^{3x-1}}$

54. $\dfrac{-x^{2m+3}+2x^{2m+2}+2x^{2m+1}-4x^{2m}-x^{2m-1}+x^{2m-2}}{x^{m-3}-x^{m-1}+x^{m-2}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una empresa construye estructuras prediseñadas para casas y edificios. Si x representa el número de estructuras y los costos de producción son: $x^2+12x-1\,200$ para las casas y $3x^2+x+2\,000$ para los edificios, ¿cuál es el costo total de producción de la compañía?

Solución

El costo total se obtiene al sumar el precio de las casas y el de los edificios.

$$\begin{array}{rr} & x^2+12x-1200 \\ + & 3x^2+x+2\,000 \\ \hline & 4x^2+13x+800 \end{array}$$

Por tanto, la empresa gasta: $4x^2+13x+800$

2 El largo de un terreno en metros lo determina la expresión $2a^2+3a+2$ y su ancho lo representa $2a-1$, ¿cuál es la superficie del terreno en metros cuadrados?

Solución

Para obtener la superficie del terreno se multiplica su largo por su ancho.

$$\begin{array}{rr} & 2a^2+3a+2 \\ \times & 2a-1 \\ \hline & 4a^3+6a^2+4a \\ + & -2a^2-3a-2 \\ \hline & 4a^3+4a^2+a-2 \end{array}$$

Entonces, la superficie del terreno es de: $4a^3+4a^2+a-2$ metros cuadrados.

3 Al adquirir $2x + 3$ artículos se paga un importe de $10x^2 + 29x + 21$ pesos, ¿cuál es el precio unitario de los artículos?

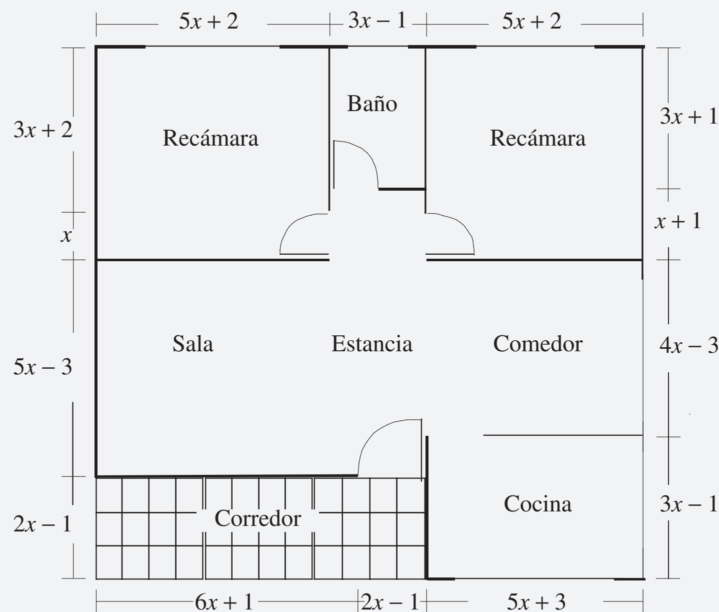
Solución

Para obtener el precio unitario, se divide el importe total entre el número de artículos.

$$\begin{array}{r|l} & 5x + 7 \\ \hline 2x+3 & 10x^2 + 29x + 21 \\ & -10x^2 - 15x \\ \hline & \quad\quad 14x + 21 \\ & \quad\quad -14x - 21 \\ \hline & \quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

El costo de cada artículo es: $5x + 7$ pesos.

4 Observa el siguiente plano de distribución de una casa, la cual se proyecta en un terreno rectangular.



De acuerdo con él, calcula la superficie que abarca la construcción, excepto el corredor.

Solución

Se calcula el largo y ancho del rectángulo que abarca la construcción:

$$\text{Largo} = (6x + 1) + (2x - 1) + (5x + 3) = 13x + 3$$

$$\text{Ancho} = (3x + 2) + x + (5x - 3) + (2x - 1) = 11x - 2$$

Se obtiene el área del rectángulo que ocupa la casa y la del corredor:

Área del rectángulo

$$\begin{aligned} \text{Área} &= (\text{Largo})(\text{Ancho}) \\ &= (13x + 3)(11x - 2) \\ &= 143x^2 - 26x + 33x - 6 \\ &= 143x^2 + 7x - 6 \end{aligned}$$

Área del corredor

$$\begin{aligned} \text{Área} &= (\text{Largo})(\text{Ancho}) \\ &= ((6x + 1) + (2x - 1))(2x - 1) \\ &= (8x)(2x - 1) \\ &= 16x^2 - 8x \end{aligned}$$

Para saber cuál es la superficie, se resta al área del rectángulo el área del corredor:

$$A = (143x^2 + 7x - 6) - (16x^2 - 8x)$$
$$= 143x^2 + 7x - 6 - 16x^2 + 8x$$
$$= 127x^2 + 15x - 6$$

Por tanto, la superficie es: $127x^2 + 15x - 6$

EJERCICIO 33

Resuelve los siguientes problemas.

1. Una partícula recorre $5t^2 + 4t + 7$ metros, después recorre $t^2 - 4$ y, finalmente, $-5t + 3$ metros. ¿Cuál es la distancia total de su recorrido?
2. Una empresa obtiene con la venta de un artículo un ingreso de $3x^2 - 7x + 6\,400$ y sus costos de producción son de $2x^2 - 9x + 2\,000$. ¿Cuál es la utilidad que obtiene dicha compañía?
3. Un obrero pinta una barda, cuya superficie es de $8x^2 + 6xy + 9y^2$ metros cuadrados, si le faltan por pintar $3x^2 + 8y^2$ metros cuadrados, ¿qué superficie lleva pintada?
4. Un producto tiene un precio en el mercado de $5y + 3$ pesos, si se venden $3y + 1$ productos. ¿Cuál es el ingreso que se obtuvo?
5. Si un terreno rectangular mide $4x - 3y$ metros de largo y $5x + 2y$ metros de ancho, ¿cuál es su superficie?
6. Las dimensiones de una caja en decímetros son: $2w - 3$ de largo, $3w + 1$ de ancho y $2w + 1$ de altura. ¿Cuál es su volumen?
7. Se tienen $12x^2 - 5xy - 2y^2$ litros de aceite y se van a envasar en botellas de $3x - 2y$ litros de capacidad, ¿cuántas botellas se van a emplear?
8. Un móvil se mueve a razón de $3t^3 - t^2 + 4t - 2$ metros por segundo, calcula la distancia que recorre en un tiempo de $2t + 1$ segundos (distancia = (velocidad)(tiempo)).

Utiliza el plano del ejemplo 4 de la página anterior, para calcular lo siguiente:

9. La superficie de las recámaras.
10. El área del baño.
11. La superficie de la cocina.
12. El área del comedor.


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

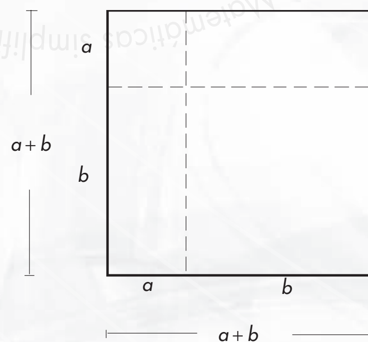
Capítulo 14

Productos notables

El trinomio cuadrado perfecto

Así se denomina al resultado de $(a + b)^2$, que se obtiene mediante un cuadrado de lado $(a + b)$, al que conforman dos cuadrados de área "a^2" y "b^2", así como dos rectángulos de área "ab"; por tanto, el desarrollo de la expresión $(a + b)^2$ es:

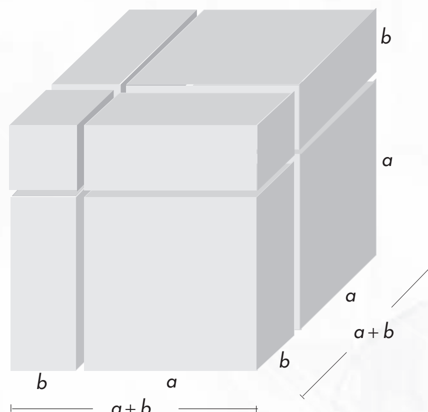
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



El cubo perfecto

Es la denominación del resultado de $(a + b)^3$; para su desarrollo se propone un cubo de arista $(a + b)$ cuyo volumen será la expresión $(a + b)^3$. A este cubo perfecto lo conforman dos cubos de volumen "a^3" y "b^3" respectivamente, tres paralelepípedos con volumen "a^2b" y otros tres con volumen "ab^2", lo que da el desarrollo de la expresión:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



Definición

Los productos notables se obtienen con un simple desarrollo, sin necesidad de efectuar el producto.

Cuadrado de un binomio

El desarrollo de la suma de dos cantidades al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo; esta regla general se expresa con la fórmula:

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

A la expresión resultante se le conoce como trinomio cuadrado perfecto.

Demostración
La expresión $(a+b)^2$ es equivalente a $(a+b)(a+b)$, entonces al realizar el producto de los binomios, se obtiene:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $(x+7)^2$.

Solución

Al aplicar la regla general:

- El cuadrado del primer término: $(x)^2 = x^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2(x)(7) = 14x$
- El cuadrado del segundo término: $(7)^2 = 49$

Se suman los términos resultantes y se obtiene:

$$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$$

2 ¿Cuál es el resultado de desarrollar $(3m+5n)^2$?

Solución

Se aplica la fórmula con $3m$ como primer término y $5n$ como segundo término

$$\begin{aligned}(3m+5n)^2 &= (3m)^2 + 2(3m)(5n) + (5n)^2\\ &= 9m^2 + 30mn + 25n^2\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es: $9m^2 + 30mn + 25n^2$

3 Desarrolla $\left(\frac{1}{2}a+3\right)^2$.

Solución

Se sustituyen los términos en la fórmula y se efectúan las operaciones, para obtener:

$$\left(\frac{1}{2}a+3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}a\right)(3) + (3)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{6}{2}a + 9 = \frac{1}{4}a^2 + 3a + 9$$

4 Desarrolla $(5m^{2x-3} + n^{4x})^2$.

Solución

En este ejemplo los exponentes de las bases son expresiones algebraicas, entonces, al aplicar la fórmula, se obtiene:

$$(5m^{2x-3} + n^{4x})^2 = (5m^{2x-3})^2 + 2(5m^{2x-3})(n^{4x}) + (n^{4x})^2 = 25m^{4x-6} + 10m^{2x-3}n^{4x} + n^{8x}$$

5 Desarrolla $(-2x-3y)^2$.

Solución

El binomio se expresa de la siguiente manera: $(-2x-3y)^2 = \left((-2x)+(-3y)\right)^2$, se aplica la fórmula:

$$(-2x-3y)^2 = \left((-2x)+(-3y)\right)^2 = (-2x)^2 + 2(-2x)(-3y) + (-3y)^2$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

Por tanto: $(-2x-3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

El desarrollo del cuadrado de una diferencia de dos cantidades, es igual a:

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

En este desarrollo los términos se sustituyen con signo positivo, como lo ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de desarrollar $(4x^4 - 9y^3)^2$?

Solución

Se aplica la fórmula anterior y se obtiene:

$$(4x^4-9y^3)^2 = (4x^4)^2 - 2(4x^4)(9y^3) + (9y^3)^2$$
$$= 16x^8 - 72x^4y^3 + 81y^6$$

2 Desarrolla $(3x^3y - 2x^5z)^2$.

Solución

Se aplica la fórmula de la misma manera que en el ejemplo anterior y se obtiene:

$$(3x^3y-2x^5z)^2 = (3x^3y)^2 - 2(3x^3y)(2x^5z) + (2x^5z)^2 = 9x^6y^2 - 12x^8yz + 4x^{10}z^2$$

Finalmente, el resultado de la operación es: $9x^6y^2 - 12x^8yz + 4x^{10}z^2$

Cuadrado de un trinomio

El desarrollo de la expresión: $(a+b+c)^2$ es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos, más los dobles productos de las combinaciones entre ellos:

$$\boldsymbol{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$$

Demostración

La expresión $(a+b+c)^2$ es equivalente al producto $(a+b+c)(a+b+c)$, entonces:

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$

Al simplificar los términos semejantes:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $(x+2y+3z)^2$.

Solución

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$$\begin{aligned}(x+2y+3z)^2 &= (x)^2+(2y)^2+(3z)^2+2(x)(2y)+2(x)(3z)+2(2y)(3z)\\ &= x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz\end{aligned}$$

2 Obtén el resultado de $(4m-7n-5)^2$.

Solución

El trinomio se expresa de la siguiente manera: $(4m-7n-5)^2=(4m+(-7n)+(-5))^2$ y se aplica la fórmula para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}(4m-7n-5)^2 &= (4m)^2+(-7n)^2+(-5)^2+2(4m)(-7n)+2(4m)(-5)+2(-7n)(-5)\\ &= 16m^2+49n^2+25-56mn-40m+70n\end{aligned}$$

3 Desarrolla $\left(\frac{1}{2}x^{m+1}+2x^m+x^{m-1}\right)^2$.

Solución

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$=\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)^2+\left(2x^m\right)^2+\left(x^{m-1}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)\left(2x^m\right)+2\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)\left(x^{m-1}\right)+2\left(2x^m\right)\left(x^{m-1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}x^{2m+2}+4x^{2m}+x^{2m-2}+2x^{2m+1}+x^{2m}+4x^{2m-1}$$

Se reducen los términos semejantes y se acomodan de forma decreciente, respecto a los exponentes:

$$=\frac{1}{4}x^{2m+2}+2x^{2m+1}+5x^{2m}+4x^{2m-1}+x^{2m-2}$$

EJERCICIO 34

Desarrolla las siguientes expresiones:

1. $(x+8)^2$
2. $(m-10)^2$
3. $(a-3)^2$
4. $(y+1)^2$
5. $(y+5)^2$
6. $(p-6)^2$
7. $(1-b)^2$
8. $(x-5)^2$
9. $(2+n)^2$
10. $(4-m)^2$
11. $(y+9)^2$
12. $(x-12)^2$
13. $(p+15)^2$
14. $(2a-1)^2$
15. $\left(\frac{5}{4}x-\frac{1}{3}\right)^2$
16. $(3ax-1)^2$
17. $(mn+8a)^2$
18. $(7a-3b)^2$
19. $(2x+3y)^2$
20. $(x+0.2)^2$
21. $(4x^3+5y)^2$
22. $(9a^3-a^2b)^2$
23. $(6mn^4+3m^5p)^2$
24. $(a^5-b^5)^2$
25. $\left(1-\frac{3}{4}xy\right)^2$
26. $\left(\frac{1}{4}x-2y^3\right)^2$
27. $\left(\frac{2}{3x}-\frac{1}{4y}\right)^2$

28. $(3x^2+4xy^7)^2$
29. $(5ab-3xy^5)^2$
30. $(m^9+12y^4)^2$
31. $(3x^2-9y^6)^2$
32. $(a^x-b^y)^2$
33. $(3x^{4a-5}+2y^{2a+1})^2$
34. $(m^{3a+6}-4n^{3b})^2$
35. $\left(3a^x+\frac{1}{2}a^{3x}b^{4y}\right)^2$
36. $\left(\frac{4}{5}a^{2m-1}-\frac{3}{2}b\right)^2$
37. $(0.6m^{2x}-0.5n^4)^2$
38. $(6x^{3m-2}+5y^{4m}z^3)^2$
39. $\left(0.3x^{2a}-0.8y^{b-1}\right)^2$
40. $\left(\frac{5}{3}x^{3a-2}+\frac{6}{5}y^{1-3a}\right)^2$
41. $\left(\frac{x^{8-y}}{2}+3y^{8-x}\right)^2$
42. $\left(\frac{x^{4a}}{5}+\frac{b^{4x}y^{a+1}}{4}\right)^2$
43. $(x+2y+3z)^2$
44. $(3x-2y+1)^2$
45. $(a+6b-5c)^2$
46. $(a^2+5a+4)^2$
47. $(a^2+3a-2)^2$
48. $(x^2-2x+1)^2$
49. $(x+y-2)^2$
50. $(2a-3b+1)^2$
51. $(4m+5n+p)^2$
52. $(3x^2+2y^2-1)^2$
53. $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+c\right)^2$
54. $\left(\frac{1}{6}x-y+\frac{1}{4}\right)^2$
55. $\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{1}{z}\right)^2$
56. $(a^x-b^y+c^z)^2$
57. $(a^{x+1}-2a^x-a^{x-1})^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Binomios conjugados

Son de la forma $(a+b)(a-b)$ y su resultado es la diferencia de los cuadrados de ambas cantidades, como se ilustra en la fórmula:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Demostración
Se realiza el producto y se obtiene:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Desarrolla $(x+6)(x-6)$.

Solución

Ambos términos se elevan al cuadrado:

- El cuadrado del término que no cambia de signo: $(x)^2=x^2$
- El cuadrado del término que cambia de signo: $(6)^2=36$

Finalmente, se realiza la diferencia y el resultado es: x^2-36

2 Desarrolla $(m - 4)\ (m + 4)$.

Solución

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$(m - 4)(m + 4) = (m)^2 - (4)^2 = m^2 - 16$$

3 Resuelve $(-2x^3 + 7)\ (-2x^3 - 7)$.

Solución

Los binomios se expresan de la siguiente manera para aplicar la fórmula:

$$(-2x^3 + 7)(-2x^3 - 7) = [(-2x^3) + 7]\ [(-2x^3) - 7] = (-2x^3)^2 - (7)^2 = 4x^6 - 49$$

4 Desarrolla $\left(\frac{10}{3} - \frac{3m^4}{2}\right)\left(\frac{3m^4}{2} + \frac{10}{3}\right)$.

Solución

Se ordenan los términos y se aplica la fórmula para obtener:

$$\left(\frac{10}{3} - \frac{3m^4}{2}\right)\left(\frac{3m^4}{2} + \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3} - \frac{3m^4}{2}\right)\left(\frac{10}{3} + \frac{3m^4}{2}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{3m^4}{2}\right)^2 = \frac{100}{9} - \frac{9m^8}{4}$$

5 Resuelve $(5x^{2a-3} + y^{4m})\ (5x^{2a-3} - y^{4m})$.

Solución

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$(5x^{2a-3} + y^{4m})(5x^{2a-3} - y^{4m}) = (5x^{2a-3})^2 - (y^{4m})^2 = 25x^{4a-6} - y^{8m}$$

Productos donde se aplican binomios conjugados

EJEMPLOS

Ejemplos

1 El resultado de $(m + n - p)\ (m + n + p)$ es:

Solución

Los elementos de ambos factores se agrupan de la siguiente manera:

$$(m + n - p)(m + n + p) = [(m + n) - p]\ [(m + n) + p]$$

Se aplica la fórmula para los binomios conjugados:

$$= (m + n)^2 - p^2$$

Se desarrolla el binomio y, finalmente, el resultado es:

$$= m^2 + 2mn + n^2 - p^2$$

2 Desarrolla $(x + y - 3)\ (x - y + 3)$.

Solución

El producto se expresa de la siguiente manera y se procede a aplicar el producto de binomios conjugados:

$$\begin{aligned}(x + y - 3)(x - y + 3) &= [x + (y - 3)][x - (y - 3)]\\ &= (x)^2 - (y - 3)^2\\ &= x^2 - y^2 + 6y - 9\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es: $x^2 - y^2 + 6y - 9$

3 ¿Cuál es el resultado de $(2x - 3y - z + 5)(2x - 3y + z - 5)$?

Solución

Se agrupan los términos y se aplica la fórmula para binomios conjugados:

$$(2x - 3y - z + 5)(2x - 3y + z - 5) = [(2x - 3y) - (z - 5)][(2x - 3y) + (z - 5)]$$
$$= (2x - 3y)^2 - (z - 5)^2$$

Se desarrollan los binomios, se eliminan los paréntesis y se ordenan los términos:

$$= (4x^2 - 12xy + 9y^2) - (z^2 - 10z + 25)$$
$$= 4x^2 - 12xy + 9y^2 - z^2 + 10z - 25$$
$$= 4x^2 + 9y^2 - z^2 - 12xy + 10z - 25$$

Finalmente, el resultado es: $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 12xy + 10z - 25$

EJERCICIO 35

Desarrolla los siguientes productos:

1. $(x + 3)(x - 3)$
2. $(a - 1)(a + 1)$
3. $(b + 2)(b - 2)$
4. $(k - 8)(k + 8)$
5. $(5 - y)(5 + y)$
6. $(9 - a)(9 + a)$
7. $(m - n)(m + n)$
8. $(xy - z)(xy + z)$
9. $(3x + 5y)(3x - 5y)$
10. $(4m - 9n)(4m + 9n)$
11. $(2b - 3c)(3c + 2b)$
12. $(6x^5 + 1)(6x^5 - 1)$
13. $(3m^3 - 8)(3m^3 + 8)$
14. $(5x^4y + 4z)(-4z + 5x^4y)$
15. $(9ab^4 - c^7)(9ab^4 + c^7)$
16. $(7a^4b^3 - cd^5)(7a^4b^3 + cd^5)$
17. $\left(\frac{3}{5}m + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}m - \frac{1}{2}\right)$
18. $\left(\frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{2}\right)$
19. $\left(\frac{1}{3}xy - z^6\right)\left(\frac{1}{3}xy + z^6\right)$
20. $\left(3x^2 - \frac{1}{10}\right)\left(3x^2 + \frac{1}{10}\right)$
21. $(3a^{x-4} + b^{3x})(3a^{x-4} - b^{3x})$
22. $(8y^{2a-3} - 4x^{4a})(4x^{4a} + 8y^{2a-3})$
23. $(a + b - c)(a + b + c)$
24. $(a - b + c)(a + b - c)$
25. $(m + n + p)(m - n - p)$
26. $(x + y - 3)(x + y + 3)$
27. $(4x + 3y - z)(4x - 3y + z)$
28. $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2 + xy)$
29. $(m^4 - m^2 - m)(m^4 + m^2 + m)$
30. $(2x + 5y - 3z)(2x + 5y + 3z)$
31. $(x + 2y - 1)(x + 2y + 1)$
32. $\left(\frac{1}{2}m - \frac{2}{3}n - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n - \frac{1}{4}\right)$

33. $\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{2}{7}y^2\right)\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{2}{7}y^2\right)$

34. $\left(\frac{1}{3}x^{m+1}-\frac{1}{6}x^m+\frac{1}{2}x^{m-1}\right)\left(\frac{1}{3}x^{m+1}+\frac{1}{6}x^m-\frac{1}{2}x^{m-1}\right)$

35. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$

36. $(x+y+z-1)\ (x-y+z+1)$

37. $(m-2n+3p-5)\ (m+2n-3p-5)$

38. $(x-y+z-4)\ (x-y-z+4)$

39. $(2x+3y+4z-7)\ (2x+3y-4z+7)$

40. $(x-y-3z-5)\ (x-y+3z+5)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Binomios con término común

Son de la forma $(x+a)\ (x+b)$, su resultado es un trinomio cuyo desarrollo es el cuadrado del término común, más la suma de los términos no comunes por el término común, más el producto de los no comunes.

$$\boldsymbol{(x+a)\ (x+b)=x^2+(a+b)\ x+ab}$$

Demostración
Se realiza el producto de los binomios:

$$(x+a)\ (x+b)=x^2+ax+bx+ab$$

Se agrupan los términos semejantes y se obtiene la fórmula:

$$(x+a)\ (x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $(x-6)\ (x+4)$.

Solución

Se desarrolla el procedimiento descrito:

- El cuadrado del término común: $(x)^2=x^2$
- La suma de los términos no comunes, multiplicada por el término común: $(-6+4)(x)=-2x$
- El producto de los términos no comunes: $(-6)(4)=-24$

Se suman los términos anteriores y se obtiene como resultado:

$$(x-6)(x+4)=x^2-2x-24$$

2 Efectúa $(m-3)\ (m-5)$.

Solución

Al aplicar la fórmula, se obtiene:

$$(m-3)(m-5)=m^2+(-3-5)\ m+(-3)\ (-5)=m^2-8m+15$$

3 Resuelve $(5x-4)\ (5x-2)$.

Solución

$$\begin{aligned}(5x-4)(5x-2)&=(5x)^2+(-4-2)\ (5x)+(-4)\ (-2)\\&=25x^2+(-6)\ (5x)+8\\&=25x^2-30x+8\end{aligned}$$

4 Efectúa la siguiente operación: $(7-x)(7+3x)$.

Solución

El término común es 7, con la aplicación de la fórmula se obtiene:

$$(7-x)(7+3x) = (7)^2+(-x+3x)(7)+(-x)(3x) = 49+14x-3x^2$$

5 ¿Cuál es el resultado de $(n^4+10)(n^4-8)$?

Solución

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$(n^4+10)(n^4-8) = (n^4)^2+(10-8)n^4+(10)(-8) = n^8+2n^4-80$$

6 Efectúa $\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)$.

Solución

Se aplica la fórmula y se obtiene:

$$\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}x\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{9}x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{8}$$

7 Desarrolla $(x+y-3)(x+y+7)$.

Solución

Se agrupan los términos en común:

$$(x+y-3)(x+y+7) = [(x+y)-3]\,[(x+y)+7]$$

Se aplica el desarrollo para el producto de binomios con término común:

$$\begin{aligned}(x+y-3)(x+y+7) &= [(x+y)-3]\,[(x+y)+7]\\ &= (x+y)^2+(-3+7)(x+y)+(-3)(7)\\ &= (x+y)^2+(4)(x+y)+(-21)\\ &= x^2+2xy+y^2+4x+4y-21\end{aligned}$$

8 Desarrolla $(2m+3n-4)(2m-5n+2)$.

Solución

Se expresa el producto de la siguiente manera:

$$(2m+3n-4)(2m-5n+2) = [(2m)+(3n-4)]\,[(2m)+(-5n+2)]$$

Al desarrollar el producto de binomios con término común, se obtiene:

$$\begin{aligned}&= (2m)^2+(3n-4-5n+2)(2m)+(3n-4)(-5n+2)\\ &= 4m^2+(-2n-2)(2m)+(-15n^2+6n+20n-8)\\ &= 4m^2+(-4mn-4m)+(-15n^2+26n-8)\\ &= 4m^2-4mn-4m-15n^2+26n-8\\ &= 4m^2-15n^2-4mn-4m+26n-8\end{aligned}$$

EJERCICIO 36

Resuelve los siguientes productos:

1. $(x-8)(x+5)$
2. $(m+7)(m-4)$
3. $(x-10)(x-2)$
4. $(x-6)(x-5)$
5. $(x+4)(x+6)$
6. $(n-3)(n+4)$
7. $(x-1)(x-8)$
8. $(a+3)(a-9)$
9. $(x-5)(x+2)$
10. $(m-3)(m+8)$
11. $(2x-6)(2x+4)$
12. $(3m+6)(3m-4)$
13. $(6x-4)(6x+3)$
14. $(4x-5)(4x-2)$
15. $(1-3x)(2-3x)$
16. $(4+5x)(6+5x)$
17. $(2-7x)(2+6x)$
18. $(5+2x)(5-9x)$
19. $(x^2-10)(x^2+6)$
20. $(m^3-4)(m^3-8)$
21. $(x^4+6)(x^4-12)$
22. $(x^5-1)(x^5+2)$
23. $(a^3-5)(a^3-2)$
24. $(x^{2m-1}+7)(x^{2m-1}-5)$
25. $(a^2x^3+b^4)(a^2x^3+2b^4)$
26. $(3x^m+4y^n)(3x^m-7y^n)$
27. $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)$
28. $\left(\frac{1}{3}m+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}m-\frac{1}{2}\right)$
29. $\left(\frac{3}{4}y+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{4}y-\frac{5}{8}\right)$
30. $\left(-xy+\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-xy\right)$
31. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{7}y\right)\left(\frac{3}{7}y-\frac{4}{5}x\right)$
32. $\left(\frac{6}{5}x^2-\frac{1}{4}y^2\right)\left(\frac{6}{5}x^2+\frac{1}{3}y^2\right)$
33. $(a+b+3)(a+b+4)$
34. $(a-2b+1)(a-2b+5)$
35. $(x-y+3z)(x-y-7z)$
36. $(2x+y+2)(2x+y-1)$
37. $(m^2+n^2-5)(m^2+n^2+9)$
38. $(a+b-c)(a-b-3c)$
39. $(x+3y-4z)(x-2y+z)$
40. $(a+5b+c)(a-5b+c)$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Cubo de un binomio

Es de la forma $(a+b)^3$, su desarrollo es un polinomio de cuatro términos al que se llama cubo perfecto y su desarrollo es el cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

$$\mathbf{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Demostración

La expresión $(a+b)^3$ es equivalente al producto $(a+b)^2(a+b)$, entonces:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $(m+5)^3$.

Solución

Se obtiene cada uno de los términos que conforman al cubo perfecto:

- El cubo del primer término: $(m)^3 = m^3$
- El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3(m)^2(5) = 15m^2$
- El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(m)(5)^2 = 3(m)(25) = 75m$
- El cubo del segundo: $(5)^3 = 125$

Estos resultados se suman y se obtiene:

$$(m+5)^3 = m^3 + 15m^2 + 75m + 125$$

2 Desarrolla el siguiente binomio $(x-4)^3$:

Solución

El binomio se expresa de la siguiente manera: $(x-4)^3 = (x+(-4))^3$, se obtiene cada uno de los términos del cubo perfecto:

- El cubo del primer término: $(x)^3 = x^3$
- El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3(x)^2(-4) = -12x^2$
- El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(x)(-4)^2 = 3(x)(16) = 48x$
- El cubo del segundo término: $(-4)^3 = -64$

Finalmente, el desarrollo es:

$$(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

3 Desarrolla $(-2m-3n)^3$.

Solución

El binomio se representa como: $(-2m-3n)^3 = [(-2m)+(-3n)]^3$, se aplica la regla general:

$$\begin{aligned}(-2m-3n)^3 &= (-2m)^3 + 3(-2m)^2(-3n) + 3(-2m)(-3n)^2 + (-3n)^3\\ &= (-8m^3) + 3(4m^2)(-3n) + 3(-2m)(9n^2) + (-27n^3)\\ &= -8m^3 - 36m^2n - 54mn^2 - 27n^3\end{aligned}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

El desarrollo del cubo de la diferencia de dos cantidades se obtiene con la fórmula:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Al utilizar la fórmula los términos se sustituyen con signo positivo.

4 ¿Cuál es el resultado de $(3x^4 - 2y^3)^3$?

Solución

Se aplica la fórmula y se determina que:

$$\begin{aligned}(3x^4 - 2y^3)^3 &= (3x^4)^3 - 3(3x^4)^2(2y^3) + 3(3x^4)(2y^3)^2 - (2y^3)^3\\ &= 27x^{12} - 3(9x^8)(2y^3) + 3(3x^4)(4y^6) - 8y^9\\ &= 27x^{12} - 54x^8y^3 + 36x^4y^6 - 8y^9\end{aligned}$$

EJERCICIO 37

Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

1. $(x - 1)^3$
2. $(m + 6)^3$
3. $(x - 2)^3$
4. $(a + 10)^3$
5. $(n - 7)^3$
6. $(x + 3)^3$
7. $(1 - x)^3$
8. $(10 - m)^3$
9. $(2x + 1)^3$
10. $(3a - 4)^3$
11. $(2x + 3)^3$
12. $(1 - 4m)^3$
13. $(3x - 4y)^3$
14. $(5m^2 + 2n^5)^3$
15. $(3x^3y - 2z^4)^3$
16. $(4x^2 + 2xy)^3$
17. $(3m^4 - 4m^3n)^3$
18. $\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$
19. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$
20. $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right)^3$
21. $\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{3}y\right)^3$
22. $\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b\right)^3$
23. $\left(\frac{1}{3}x^4 + y\right)^3$
24. $\left(2x^{2a-3} - 3y^{4a+1}\right)^3$



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicaciones que se resuelven con la aplicación de productos notables

Se utiliza para resolver una multiplicación de polinomios, siempre que las características de los factores permitan aplicar las reglas de los productos notables. Se agrupan las expresiones y se desarrolla el producto notable que corresponda a las características de los mismos; con los factores resultantes se aplica el mismo procedimiento hasta obtener el resultado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla el siguiente producto: $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 3)$.

Solución

Se eligen los factores $(x + 2)(x - 2)$, los que se resuelven como un producto de binomios conjugados:

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$$

Entonces el producto inicial se representa como:

$$(x + 2)(x - 2)(x^2 + 3) = (x^2 - 4)(x^2 + 3)$$

Por último, se aplica el producto de binomios con término común:

$$\begin{aligned}(x^2 - 4)(x^2 + 3) &= (x^2)^2 + (-4 + 3)(x^2) + (-4)(3)\\ &= x^4 - x^2 - 12\end{aligned}$$

Por tanto: $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 3) = x^4 - x^2 - 12$

2 Desarrolla el siguiente producto: $(x + 1)\ (x + 2)\ (x - 1)\ (x - 2)$.

Solución

De acuerdo con la elección de los factores es como se procede a aplicar el producto notable, en este caso reagruparemos los factores de la siguiente manera:

$$(x + 1)\ (x - 1)\ (x + 2)\ (x - 2)$$

Al desarrollar mediante binomios conjugados, se obtiene:

$$(x + 1)\ (x - 1) = x^2 - 1 \qquad (x + 2)\ (x - 2) = x^2 - 4$$

La expresión se transforma en:

$$(x + 1)\ (x - 1)\ (x + 2)\ (x - 2) = (x^2 - 1)\ (x^2 - 4)$$

Por último se aplican binomios con término común:

$$\begin{aligned}&= (x^2)^2 + (-1 - 4)x^2 + (-1)(-4)\\ &= x^4 - 5x^2 + 4\end{aligned}$$

Por tanto: $(x + 1)\ (x + 2)\ (x - 1)\ (x - 2) = x^4 - 5x^2 + 4$

3 Resuelve el siguiente producto: $(x + 3)^2(x - 3)^2$.

Solución

Se desarrollan los cuadrados de los binomios:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9;\ \ (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Luego:

$$(x + 3)^2(x - 3)^2 = (x^2 + 6x + 9)(x^2 - 6x + 9) = (x^2 + 9 + 6x)\ (x^2 + 9 - 6x)$$

Al aplicar binomios conjugados se determina que:

$$\begin{aligned}(x^2 + 9 + 6x)(x^2 + 9 - 6x) = [(x^2 + 9)^2 - (6x)^2] &= (x^2)^2 + 2(x^2)\ (9) + (9)^2 - 36x^2\\ &= x^4 + 18x^2 + 81 - 36x^2\\ &= x^4 - 18x^2 + 81\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es: $x^4 - 18x^2 + 81$

EJERCICIO 38

Realiza las siguientes multiplicaciones aplicando productos notables:

1. $(x-1)(x+1)(x^2+2)$
2. $(m+8)(m-8)(m+1)\,(m-1)$
3. $(3x-5)(3x+2)(9x^2-9x-10)$
4. $(5x-6)^2\,(5x+6)^2$
5. $(m+2)^3\,(m-2)^3$
6. $(-x-6)^2\,(x^2-12x+36)$
7. $(n^2-1)(n^2+7)(n^4-6n^2+7)$
8. $(x^2+y)^2\,(x^2-y)^2\,(x^4+y^2)^2$
9. $(2m+6)(2m-8)(4m^2+3m+1)$
10. $(9-6x^3)(6x^3+9)(81+36x^6)$
11. $(x-4)(x+5)(x+4)(x-5)$
12. $\left(\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{5}y^5\right)^2\left(\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{5}y^5\right)^2$
13. $[(2x-y)(2x+y)(4x^2+y^2)]^2$
14. $(m^2-m-1)(m^2+m+1)$
15. $(x-y)\,(x^2+y^2)\,(x+y)$
16. $(m-2)(m^2-4)^2\,(m+2)$
17. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4-y^4)$
18. $(x+1)(x-3)(x-1)(x+3)$
19. $(m^4+5)(m-2)(m^2+4)(m+2)$
20. $[(n+2)(n-2)(n^2+4)]^3$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 15
Factorización

Reseña HISTÓRICA



Pierre de Fermat

Matemático francés quien nació en Beaumont de Lomagne y falleció en Toulouse. Fermat participó con Pascal en la creación de la teoría matemática de la probabilidad; Descartes y Fermat inventaron la geometría analítica, cada uno por su lado. Si todas estas aportaciones de primera categoría no son suficientes para ponerlo a la cabeza de sus contemporáneos en la matemática pura, podemos preguntarnos: ¿quién hizo más? Fermat era creador innato. Era también, en el estricto sentido de la palabra, en lo que se refiere a su ciencia de la matemática, un aficionado. Sin duda es uno de los más grandes aficionados en la historia de la ciencia, y quizá "sea el primero". La vida de Fermat fue tranquila y laboriosa, pues tuvo una extraordinaria suerte.

Pierre de Fermat
(1601-1665 d.C.)

Definición

Factorizar es expresar una suma o diferencia de términos como el producto indicado de sus factores; éstos se presentan en la forma más simple.

Factor común

Es la expresión común que tienen todos los términos de una expresión algebraica.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $x^6 - x^5 + x^2$.

Solución

Para encontrar el factor común se toma la letra que se repite y de menor exponente $\left(x^2\right)$, después cada uno de los términos de la expresión algebraica se divide entre el factor común:

$$\frac{x^6}{x^2} = x^4 \qquad -\frac{x^5}{x^2} = -x^3 \qquad \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Los resultados se expresan de la siguiente manera:

$$x^6 - x^5 + x^2 = x^2\left(x^4 - x^3 + 1\right)$$

2 Factoriza: $16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10}$.

Solución

Se busca el factor común de los coeficientes, que es el máximo común divisor de ellos y también se busca el factor común de las literales:

MCD (16, 12, 20) = 4 Factor común literal $= a^3b^2$

Se realizan las divisiones término a término y el resultado de la factorización es:

$$16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10} = 4a^3b^2\left(4a^3b^5c - 3a^2c^3 + 5b^8\right)$$

3 Obtén la factorización de la expresión: $18x^2 - 12x + 54$.

Solución

El máximo común divisor de los coeficientes es 6 y no existe un factor común literal, por tanto, la expresión tiene sólo un factor común numérico y se expresa como:

$$18x^2 - 12x + 54 = 6\left(3x^2 - 2x + 9\right)$$

4 Factoriza: $(2a-3b)^2(5a-7b)^3 - (2a-3b)^3(5a-7b)^2$.

Solución

En esta expresión el factor común está compuesto por binomios, por consiguiente, se toma de cada uno de ellos el de menor exponente y se realiza la factorización de la siguiente manera:

$$(2a-3b)^2(5a-7b)^3 - (2a-3b)^3(5a-7b)^2 = (2a-3b)^2(5a-7b)^2\left[(5a-7b)-(2a-3b)\right]$$

Se reducen los términos semejantes del último factor:

$$=(2a-3b)^2(5a-7b)^2[5a-7b-2a+3b]$$
$$=(2a-3b)^2(5a-7b)^2[3a-4b]$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $(2a-3b)^2(5a-7b)^2[3a-4b]$

EJERCICIO 39

Factoriza las siguientes expresiones:

1. a^2+a
2. $a^3b^2-2a^3b$
3. $a^4+a^3-a^2$
4. $18x^5+30x^4$
5. $48x^2-12x^3-24x^4$
6. $25b^2+35b^4-45b^5$
7. $11ax-121a^2x+33a^3$
8. $9a^5b-12a^2b^3+15ab^2-18a^3b^4$
9. $9x^2+6x+3$
10. $4x^4-8x^3+12x^2$
11. $6x^2-6xy-6x$
12. $14x^2y^2-28x^3+56x^4$
13. $34ax^2+51a^2y-68ay^2$
14. $55m^2n^3x+110m^2n^3x^2-220m^2y^3$
15. $25x^7-10x^5+15x^3-5x^2$
16. $9a^2-12ab+15a^3b^2-24ab^3$
17. $12m^2n+24m^3n^2-36m^4n+48m^5n^4$
18. $3a^2b+6a^3b^2-5a^4b^3+8a^5b^4+4a^6b^5$
19. $16x^3y^2-8x^4y-24x^2y-40x^2y^3$
20. $100a^2b^3c-150ab^2c^2+50ab^3c^3-200abc^2$
21. $93a^3x^2y-62a^2x^3y^2-124a^2x$
22. $6x(3x-1)^2+2x^2(1-3x)^2$
23. $9(x+1)-3(x+1)^2$
24. $x^2(x+2)-x(x+2)$
25. $4x^2(2x-5)^2+8x^2(2x-5)$
26. $(2x-1)(x+4)-(2x-1)(3x+1)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Factor común por agrupación de términos

Se agrupan los términos que tengan algún factor en común, de tal modo que la expresión restante pueda factorizarse como se muestra en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $am+bm+a^2+ab$.

Solución

Se agrupan los términos y de los primeros se factoriza "m" y de los segundos "a".

$$am+bm+a^2+ab=(am+bm)+(a^2+ab)=m(a+b)+a(a+b)$$

La última expresión se vuelve a factorizar tomando como factor común el binomio $a+b$ y se obtiene como resultado: $=(a+b)(m+a)$

2 ¿Cuál es el resultado de factorizar $6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab$?

Solución

Se agrupan los términos y se buscan los respectivos factores comunes de cada uno para poder factorizarlos y obtener como resultado:

$$6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab = (6ax + 3a^2) + (-4bx - 2ab) = 3a(2x + a) - 2b(2x + a)$$
$$= (2x + a)(3a - 2b)$$

3 Factoriza: $6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 - b$.

Solución

Se repiten los mismos pasos que en los ejemplos anteriores y se obtiene:

$$6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 - b = (6a^2x + 4ab + 2a) + (-3abx - 2b^2 - b)$$
$$= 2a(3ax + 2b + 1) - b(3ax + 2b + 1)$$
$$= (3ax + 2b + 1)(2a - b)$$

EJERCICIO **40**

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $m^2 + mn + mx + nx$
2. $3x^3 - 1 - x^2 + 3x$
3. $ax - bx + ay - by$
4. $2y^3 - 6ay^2 - y + 3a$
5. $am - 2bm - 3an + 6bn$
6. $4a^2x - 5a^2y + 15by - 12bx$
7. $m^2p^2 - 3np^2 + m^2z^2 - 3nz^2$
8. $5m^2n + 5mp^2 + n^2p^2 + mn^3$
9. $3a - 2b - 2by^4 + 3ay^4$
10. $2mx^4 + 3nx^4 + 10m + 15n$
11. $bm^2 + by^2 - cm^2 - cy^2$
12. $x^3 - 15 - 5x + 3x^2$
13. $3bz - by - 9mz + 3my$
14. $a^3 + a^2 + a + 1$
15. $1 + 2a - 3a^2 - 6a^3$
16. $3x^3 - 7x^2 + 3x - 7$
17. $4a - 1 - 4ab + b$
18. $18m^3 + 12m^2 - 15m - 10$
19. $x^2yz - xz^2m + xy^2m - yzm^2$
20. $p^3t^3 + mn^2p^2t + m^2npt^2 + m^3n^3$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Diferencia de cuadrados

La diferencia de cuadrados es de la forma $a^2 - b^2$ y su factorización es:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Lo que da como resultado el producto de binomios conjugados.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: $x^2 - 9$.

Solución

Se extrae la raíz cuadrada del primer y segundo términos; los resultados se acomodan como se indica en la fórmula.

$$\sqrt{x^2} = x \quad ; \quad \sqrt{9} = 3$$

Finalmente, la factorización es: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

2 Factoriza: $\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25}$.

Solución

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$$\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25} = \left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)$$

3 ¿Cuál es el resultado de factorizar $x^{2a-4} - y^{6b}$?

Solución

Se expresan los exponentes de la siguiente manera:

$$x^{2a-4} - y^{6b} = x^{2(a-2)} - y^{2(3b)}$$

Se extraen las raíces cuadradas de ambos términos:

$$\sqrt{x^{2(a-2)}} = x^{a-2} \qquad \sqrt{y^{2(3b)}} = y^{3b}$$

Finalmente, se obtiene:

$$x^{2a-4} - y^{6b} = \left(x^{a-2} + y^{3b}\right)\left(x^{a-2} - y^{3b}\right)$$

4 Factoriza la expresión: $(2x+3)^2 - (x-1)^2$.

Solución

Se extrae la raíz cuadrada de cada uno de los términos:

$$\sqrt{(2x+3)^2} = 2x+3 \qquad \sqrt{(x-1)^2} = x-1$$

Se sustituyen las raíces obtenidas en la fórmula:

$$(2x+3)^2 - (x-1)^2 = [(2x+3)+(x-1)][(2x+3)-(x-1)]$$

Se reducen los términos semejantes de cada uno de los factores y se obtiene como resultado:

$$= [2x+3+x-1][2x+3-x+1]$$
$$= [3x+2][x+4]$$

EJERCICIO 41

Factoriza las siguientes expresiones:

1. x^2-1
2. x^2-49
3. $81-x^2$
4. $16x^2-9$
5. a^4-b^4
6. x^4-64
7. $100-16x^2$
8. $36x^2-1$
9. $4-25x^2$
10. $4a^4-9b^2c^2$
11. x^6-36
12. $16a^4b^6-c^6$
13. $x^2-\frac{1}{4}$
14. $x^2-\frac{4}{81}$
15. $x^2-\frac{16}{49}$
16. $x^4-\frac{1}{16}$
17. $49x^2-\frac{16}{25}$
18. $x^{6a}-y^{4b}$
19. $a^{2x+6}-9b^{6y}$
20. $m^{4a+8}-25$
21. $1-x^{2a}$
22. $-n^{8x+2y}+m^{6x-4y}$
23. $16x^{6a}-49y^{2b}$
24. $(x-1)^2-(y-3)^2$
25. $(2x+1)^2-(y+5)^2$
26. $(x-1)^2-16y^2$
27. $4(3x-2)^2-9(x-1)^2$
28. $-(x+2y)^2+16(x+y)^2$
29. $25(4x-3)^2-9(2x+1)^2$
30. $49x^4-4(x^2-3x)^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Trinomio cuadrado perfecto

Se conoce así a toda expresión de la forma:

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$

Pasos para factorizar un trinomio cuadrado perfecto

1. Para factorizar esta expresión, se debe verificar que los términos se encuentren ordenados con respecto a los exponentes de mayor a menor o viceversa.
2. Se extraen las raíces cuadradas de los términos extremos (primer y último términos):

$$\sqrt{a^2} = a \qquad \sqrt{b^2} = b$$

3. Para comprobar que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto, se realiza el doble producto de las raíces:

$$\text{Comprobación} = 2ab$$

4. Si el resultado del producto es igual al segundo término del trinomio, entonces éste es cuadrado perfecto y su factorización es igual al cuadrado de una suma o diferencia de las raíces cuadradas de los términos extremos.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: x^2+6x+9.

Solución

Se obtienen las raíces cuadradas y se comprueba que el trinomio es cuadrado perfecto:

$$\sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \text{Comprobación} = 2(x)(3) = 6x$$

Al tomar el signo del segundo término, la factorización es:

$$x^2+6x+9 = (x+3)^2$$

2 Factoriza: $4x^2+9y^2-12xy$.

Solución

Se ordenan los términos de la siguiente manera:

$$4x^2+9y^2-12xy=4x^2-12xy+9y^2$$

Se extraen las raíces de los términos extremos y se verifica que el trinomio es cuadrado perfecto:

$$\sqrt{4x^2}=2x \qquad \sqrt{9y^2}=3y \qquad \text{Comprobación } =2(2x)(3y)=12xy$$

Finalmente, el resultado de la factorización es:

$$4x^2+9y^2-12xy=4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2$$

3 Factoriza la siguiente expresión: $(m+n)^2+(m+n)+\frac{1}{4}$.

Solución

Se obtienen las raíces de los extremos y se comprueba el doble producto:

$$\sqrt{(m+n)^2}=m+n \qquad \sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \qquad \text{Comprobación } =2(m+n)\left(\frac{1}{2}\right)=m+n$$

Por tanto, la factorización de la expresión propuesta es:

$$(m+n)^2+(m+n)+\frac{1}{4}=\left((m+n)+\frac{1}{2}\right)^2=\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2$$

4 Factoriza la expresión: $3a-2\sqrt{15ab}+5b$.

Solución

Las raíces de los extremos y la comprobación de que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto es:

$$\sqrt{3a} \quad \text{y} \quad \sqrt{5b} \qquad \text{Comprobación } =2\left(\sqrt{3a}\right)\left(\sqrt{5b}\right)=2\sqrt{(3a)(5b)}=2\sqrt{15ab}$$

Por tanto:

$$3a-2\sqrt{15ab}+5b=\left(\sqrt{3a}-\sqrt{5b}\right)^2$$

5 Factoriza $x^{\frac{1}{4}}+4x^{\frac{1}{8}}+4$.

Solución

Se obtienen las raíces de los extremos y se comprueba:

$$\sqrt{x^{\frac{1}{4}}}=x^{\frac{1}{(4)(2)}}=x^{\frac{1}{8}} \qquad \sqrt{4}=2 \qquad \text{Comprobación } =2\left(x^{\frac{1}{8}}\right)(2)=4x^{\frac{1}{8}}$$

Por consiguiente, el trinomio es cuadrado perfecto y su factorización es:

$$x^{\frac{1}{4}}+4x^{\frac{1}{8}}+4=\left(x^{\frac{1}{8}}+2\right)^2$$

EJERCICIO 42

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $a^2 + 8a + 16$
2. $m^2 - 10m + 25$
3. $n^2 - 8n + 16$
4. $x^2 - 6x + 9$
5. $x^2 + 12x + 36$
6. $9a^2 - 30a + 25$
7. $36 + 121c^2 - 132c$
8. $16a^2 + 24ab + 9b^2$
9. $4a^2 - 20ab + 25b^2$
10. $9a^2 + 6ab + b^2$
11. $4a^2 - 12ab + 9b^2$
12. $a^2 - 24x^2a^3 + 144x^4a^4$
13. $100a^4 - 60a^2b + 9b^2$
14. $a^8 + 36b^2c^2 + 12a^4bc$
15. $121 + 198a^6 + 81a^{12}$
16. $49x^6 - 70ax^3y^2 + 25a^2y^4$
17. $400a^{10} + 40a^5 + 1$
18. $x^8 + 18x^4 + 81$
19. $\frac{y^2}{4} - yz + z^2$
20. $1 + \frac{2}{3}p + \frac{p^2}{9}$
21. $x^4 - x^2y^2 + \frac{y^4}{4}$
22. $\frac{1}{25} + \frac{25}{36}b^4 - \frac{b^2}{3}$
23. $16m^6 - 2m^3n^2 + \frac{n^4}{16}$
24. $9(a + x)^2 - 12(a + x) + 4$
25. $4(1 + m)^2 - 4(1 + m)(n - 1) + (n - 1)^2$
26. $9(a - b)^2 + 12(a - b)(a + b) + 4(a + b)^2$
27. $(m + n)^2 - 2(m + n)(m - n) + (m - n)^2$
28. $4a^2 - 4a(b - a) + (b - a)^2$
29. $(m + a)^2 - 2(m + a)(a + b) + (a + b)^2$
30. $x + 2\sqrt{2xy} + 2y$
31. $ax + 4\sqrt{ax} + 4$
32. $a^3 - 10a^{\frac{3}{2}} + 25$
33. $x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 9$
34. $16x^{\frac{1}{2}} - 8x^{\frac{1}{4}} + 1$
35. $m^{\frac{2}{3}} + 4m^{\frac{1}{3}} + 4$
36. $\sqrt[3]{m^2} - 6\sqrt[3]{m} + 9$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Esta expresión resulta del producto de binomios con término común. Para factorizarla se realizan los pasos aplicados en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: $x^2 + 11x + 24$.

Solución

Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y se coloca el resultado en ambos factores:

$$x^2 + 11x + 24 = (x \quad)(x \quad)$$

Se coloca el signo del segundo término $(+11x)$ en el primer factor y se multiplica el signo del segundo término por el del tercer término $(+)(+) = +$ para obtener el signo del segundo factor:

$$x^2 + 11x + 24 = (x + \quad)(x + \quad)$$

Al ser los signos de los factores iguales, se buscan dos cantidades cuyo producto sea igual al tercer término (24) y cuya suma sea igual a 11; estos números son 8 y 3, que se colocan en el primer factor, el mayor, y en el segundo factor, el menor:

$$x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)$$

Finalmente, la factorización es: $(x + 8)(x + 3)$

2 Factoriza la expresión: $m^2 - 13m + 30$.

Solución

La raíz cuadrada del término cuadrático es "m"; el primer factor va acompañado del signo del segundo término $(-13m)$ y el segundo factor va con el signo que resulta del producto de los signos del segundo y tercer términos $(-)(+) = -$

$$m^2 - 13m + 30 = (m - \quad)(m - \quad)$$

Se buscan dos cantidades que multiplicadas den 30 y sumadas 13, estas cantidades son 10 y 3, se acomodan de la siguiente forma y el resultado de la factorización es:

$$m^2 - 13m + 30 = (m - 10)(m - 3)$$

Cuando los signos de los factores son iguales (positivos o negativos), los números buscados se suman (ejemplos 1 y 2), pero si los signos de los factores son diferentes, entonces los números buscados se restan (ejemplos siguientes).

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $x^2 - 18 - 7x$.

Solución

Se ordenan los términos en forma descendente con respecto a los exponentes y se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático:

$$x^2 - 7x - 18 = (x \quad)(x \quad)$$

En el primer factor se coloca el signo del término lineal $(-7x)$ y en el segundo se coloca el signo que resulta de multiplicar los signos del término lineal $(-7x)$ y el independiente (-18)

$$x^2 - 7x - 18 = (x - \quad)(x + \quad)$$

Se buscan dos números cuyo producto sea igual a 18 y cuya resta sea 7. En este caso los números que cumplen esta condición son 9 y 2; es importante señalar que el número mayor va en el primer factor y el menor en el segundo.

$$x^2 - 7x - 18 = (x - 9)(x + 2)$$

2 Factoriza la expresión: $x^4 - x^2 - 6$.

Solución

Se extrae la raíz cuadrada del primer término, se escriben los signos y se buscan dos números que al multiplicarse den 6 y al restarse 1 para que la expresión factorizada sea:

$$x^4 - x^2 - 6 = (x^2 - 3)(x^2 + 2)$$

3 Factoriza la expresión: $x^2 + xy - 20y^2$.

Solución

Después de extraer la raíz cuadrada, acomodar los signos y buscar los números, la factorización es:

$$x^2 + xy - 20y^2 = (x + 5y)(x - 4y)$$

4 Factoriza la expresión: $21 - 4x - x^2$.

Solución

Se ordena el trinomio y se factoriza el signo del término cuadrático:

$$21 - 4x - x^2 = -x^2 - 4x + 21 = -(x^2 + 4x - 21)$$

Al factorizar la última expresión:

$$-(x^2 + 4x - 21) = -(x + 7)(x - 3)$$

Se multiplica el segundo factor por el signo negativo y se ordena para que el resultado sea:

$$-(x + 7)(x - 3) = (x + 7)(-x + 3) = (x + 7)(3 - x)$$

5 Factoriza la expresión: $5 + 4a^{3n} - a^{6n}$.

Solución

Se ordenan los términos y se factoriza el signo negativo:

$$5 + 4a^{3n} - a^{6n} = -a^{6n} + 4a^{3n} + 5 = -(a^{6n} - 4a^{3n} - 5)$$

La expresión encerrada en el paréntesis se factoriza al igual que las anteriores:

$$-(a^{6n} - 4a^{3n} - 5) = -(a^{3n} - 5)(a^{3n} + 1)$$

Se multiplica el signo por los términos del primer factor y el resultado de la factorización es:

$$-\left(a^{3n}-5\right)\left(a^{3n}+1\right)=\left(-a^{3n}+5\right)\left(a^{3n}+1\right)=\left(5-a^{3n}\right)\left(a^{3n}+1\right)$$

6 Factoriza: $(2x+3)^2-3(2x+3)-28$.

Solución

Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y se realizan los procedimientos descritos en los ejemplos anteriores para obtener como resultado:

$$(2x+3)^2-3(2x+3)-28=((2x+3)-7)((2x+3)+4)$$
$$=(2x+3-7)(2x+3+4)=(2x-4)(2x+7)$$
$$=2(x-2)(2x+7)$$

EJERCICIO 43

Factoriza las siguientes expresiones:

1. x^2+3x+2
2. $m^2-11m+30$
3. $n^2-7n+12$
4. $y^2-15y+56$
5. x^2+7x+6
6. $x^2+7x+12$
7. $a^2+10a+24$
8. $b^2-7b+10$
9. $m^2-9m+20$
10. y^2+4y+3
11. x^2-5x+4
12. n^2+6n+8
13. $a^2-16a-36$
14. y^2+y-30
15. $x^2-18-7x$
16. $x^2-18xy+80y^2$
17. $a^2-5ab-50b^2$
18. $m^2-7mn-30n^2$
19. $x^2+xy-56y^2$
20. m^4+3m^2-4
21. y^4-6y^2+8
22. n^4-20n^2+64
23. a^4-37a^2+36
24. x^4-x^2-90
25. $a^2b^2+ab-12$
26. $(5y)^2+13(5y)+42$
27. y^6-5y^3-14
28. $m^2-4mn-21n^2$
29. $5+4b-b^2$
30. $z^{10}+z^5-20$
31. $y^4+7xy^2-60x^2$
32. $(a-b)^2+5(a-b)-24$
33. $x^4y^4-2x^2y^2-99$
34. $m^4n^4+m^2n^2-132$
35. $n^2-34n+288$
36. $y^2+3y-550$
37. $c^2-22c-968$
38. $a^2+33a+252$
39. $x^2+44x+363$
40. $t^2-99t+2\,430$
41. $24-5x-x^2$
42. $12+x-x^2$
43. $40-3x-x^2$
44. $42-x^2+x$
45. $16+6(3x)-(3x)^2$
46. $9-8(2x)-(2x)^2$
47. $77-4(8x)-(8x)^2$
48. $143+2(5x)-(5x)^2$
49. $x^{2a}-13x^a+36$
50. $b^{4x}+b^{2x}-72$
51. $y^{6a}+65y^{3a}+64$
52. $2-x^{4a}-x^{8a}$
53. $45+4x^{a+2}-x^{2(a+2)}$
54. $(x+1)^2-12(x+1)+32$
55. $(2x-7)^2-3(2x-7)-88$
56. $(5x+y)^2+(5x+y)-42$
57. $(6a+5)^2-15(6a+5)+50$
58. $22-9(x+3y)-(x+3y)^2$
59. $24+5(1-4x)-(1-4x)^2$
60. $10y^2-3y(x-2y)-(x-2y)^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: $6x^2 - 7x - 3$.

Solución

Se ordenan los términos según la forma $ax^2 + bx + c$, se multiplica y se divide por el coeficiente del término cuadrático, en el caso del segundo término sólo se deja indicada la multiplicación.

$$\frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6} = \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6}$$

La expresión del numerador se factoriza como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

$$\frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}$$

Se obtiene el factor común de cada binomio y se simplifica la fracción:

$$\frac{3(2x - 3)2(3x + 1)}{6} = \frac{6(2x - 3)(3x + 1)}{6} = (2x - 3)(3x + 1)$$

Finalmente, la factorización de $6x^2 - 7x - 3$ es $(2x - 3)(3x + 1)$

2 Factoriza: $3x^2 - 5x - 2$.

Solución

Se multiplica y divide la expresión por 3, para que se transforme el numerador en una expresión de la forma: $x^2 + bx + c$

$$3x^2 - 5x - 2 = \frac{3(3x^2 - 5x - 2)}{3} = \frac{9x^2 - 5(3x) - 6}{3} = \frac{(3x)^2 - 5(3x) - 6}{3}$$

Se factoriza la expresión y se simplifica para obtener como resultado de la factorización:

$$= \frac{(3x - 6)(3x + 1)}{3} = \frac{3(x - 2)(3x + 1)}{3} = (x - 2)(3x + 1)$$

Por consiguiente: $3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$

3 Factoriza la siguiente expresión: $6a^2x^2 + 5ax - 21$.

Solución

Se aplican los pasos descritos en los ejemplos anteriores y se obtiene:

$$6a^2x^2 + 5ax - 21 = \frac{6(6a^2x^2 + 5ax - 21)}{6} = \frac{36a^2x^2 + 5(6ax) - 126}{6} = \frac{(6ax)^2 + 5(6ax) - 126}{6}$$

$$= \frac{(6ax + 14)(6ax - 9)}{6} = \frac{2(3ax + 7)3(2ax - 3)}{6} = \frac{6(3ax + 7)(2ax - 3)}{6} = (3ax + 7)(2ax - 3)$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $6a^2x^2 + 5ax - 21 = (3ax + 7)(2ax - 3)$

4 Factoriza la siguiente expresión: $5 + 11x - 12x^2$.

Solución

Se ordenan los términos y se factoriza el signo negativo:

$$5 + 11x - 12x^2 = -12x^2 + 11x + 5 = -(12x^2 - 11x - 5)$$

Se realiza la factorización y se obtiene:

$$=-\frac{12\left(12x^2-11x-5\right)}{12}=-\frac{144x^2-11(12x)-60}{12}=-\frac{(12x)^2-11(12x)-60}{12}$$

$$=-\frac{(12x-15)(12x+4)}{12}=-\frac{3(4x-5)4(3x+1)}{12}=-\frac{12(4x-5)(3x+1)}{12}=-(4x-5)(3x+1)$$

Se multiplica el signo por el primer factor y se ordenan los términos:

$$-(4x-5)(3x+1)=(-4x+5)(3x+1)=(5-4x)(3x+1)$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $(5-4x)(3x+1)$

Por agrupación de términos

EJEMPLOS

1 Factoriza el trinomio: $6x^2+13x+5$.

Solución

Se multiplica el coeficiente del primer término por el término independiente: $(6)(5)=30$

Se buscan dos números que multiplicados den 30 y sumados 13, en este caso los números son 10 y 3, por tanto, el segundo término del trinomio se expresa como: $13x=10x+3x$ y se procede a factorizar agrupando términos:

$$6x^2+13x+5=6x^2+10x+3x+5=2x(3x+5)+1(3x+5)=(3x+5)(2x+1)$$

Finalmente, la factorización es: $6x^2+13x+5=(3x+5)(2x+1)$

2 Factoriza: $8x^4-19x^2+6$.

Solución

Se multiplican los coeficientes de los extremos de la expresión: $(8)(6)=48$

Los números que multiplicados dan 48 y sumados -19 son -16 y -3, por consiguiente, se expresa como: $-19x^2=-16x^2-3x^2$ y se procede a factorizar:

$$8x^4-19x^2+6=8x^4-16x^2-3x^2+6=\left(8x^4-16x^2\right)+\left(-3x^2+6\right)$$
$$=8x^2\left(x^2-2\right)-3\left(x^2-2\right)=\left(x^2-2\right)\left(8x^2-3\right)$$

Finalmente: $8x^4-19x^2+6=\left(x^2-2\right)\left(8x^2-3\right)$

3 Factoriza la expresión: $15x^2-2xy-8y^2$.

Solución

Se multiplican los coeficientes de los extremos del trinomio: $(15)(-8)=-120$

Se descompone -120 en dos factores, de tal manera que restados den como resultado el coeficiente del término central -2, estos números son: -12 y 10

La expresión se descompone de la siguiente manera:

$$15x^2-2xy-8y^2=15x^2-12xy+10xy-8y^2=3x(5x-4y)+2y(5x-4y)$$
$$=(5x-4y)(3x+2y)$$

Se concluye que: $15x^2-2xy-8y^2=(5x-4y)(3x+2y)$

EJERCICIO 44

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $5m^2 + 13m - 6$
2. $3a^2 - 5a - 2$
3. $6y^2 + 7y + 2$
4. $2x^2 + 3x - 2$
5. $4n^2 + 15n + 9$
6. $20x^2 + x - 1$
7. $7a^2 - 44a - 35$
8. $2y^2 + 5y + 2$
9. $20x^2 + 13x + 2$
10. $15m^2 - 8m - 12$
11. $44z + 20z^2 - 15$
12. $2b^2 + 29b + 90$
13. $6y^4 + 5y^2 - 6$
14. $14m^4 - 45m^2 - 14$
15. $6a^2b^2 + 5ab - 25$
16. $15y^2 - by - 2b^2$
17. $6n^2 - 13mn - 15m^2$
18. $30 + 13x - 3x^2$
19. $15 + 2b^2 - 8b^4$
20. $30x^2 + 17xy - 21y^2$
21. $10a^8 + 29a^4 + 10$
22. $6a^2 - 43ab - 15b^2$
23. $6 - 5x^2 - 6x^4$
24. $30x^{10} - 91x^5 - 30$
25. $6m^2 - 11mn + 4n^2$
26. $6a^2x^2 - 11axy - 35y^2$
27. $24a^2 + 5ab - 14b^2$
28. $4x^2y^2 + 3xy - 10$
29. $5a^4b^2 - 13a^2bc - 6c^2$
30. $2m^2 + 9mn - 110n^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Casos especiales

Estos trinomios también son de la forma $ax^2 + bx + c$; sin embargo, algunos coeficientes son fraccionarios o tienen raíz cuadrada.

EJEMPLOS

1 Factoriza la expresión: $2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12}$.

Solución

En este caso se incluyen fracciones, entonces los extremos deben expresarse como una fracción que contenga el mismo denominador, por tanto:

$$2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{2(12)}{12}p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{24}{12}p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12}$$

Se multiplican los coeficientes numeradores de los extremos del trinomio: (24)(1) = 24

Se buscan dos números que multiplicados den 24 y sumados 11, en este caso los números son 3 y 8, por tanto el trinomio se expresa como:

$$2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{24}{12}p^2 + \frac{3}{12}p + \frac{8}{12}p + \frac{1}{12} = 2p^2 + \frac{1}{4}p + \frac{2}{3}p + \frac{1}{12}$$

Se procede a realizar la factorización del polinomio resultante:

$$2p^2 + \frac{1}{4}p + \frac{2}{3}p + \frac{1}{12} = p\left(2p + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(2p + \frac{1}{4}\right) = \left(2p + \frac{1}{4}\right)\left(p + \frac{1}{3}\right)$$

Entonces, se concluye que: $2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \left(2p + \frac{1}{4}\right)\left(p + \frac{1}{3}\right)$

2 Factoriza la expresión: $6x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3}{10}$.

Solución

Se convierten los coeficientes del trinomio en una fracción con denominador común:

$$6x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3}{10} = \frac{6(20)}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3(2)}{10(2)} = \frac{120}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{6}{20}$$

Se multiplican los numeradores de los extremos: (120)(6) = 720, entonces se buscan dos números que multiplicados den 720 y restados 29, los cuales son: 45 y 16, por tanto, la expresión se representa como:

$$\frac{120}{20}x^2-\frac{29}{20}x-\frac{6}{20}=\frac{120}{20}x^2-\frac{45}{20}x+\frac{16}{20}x-\frac{6}{20}=6x^2-\frac{9}{4}x+\frac{4}{5}x-\frac{6}{20}=$$

Al factorizar se obtiene como resultado:

$$6x^2-\frac{9}{4}x+\frac{4}{5}x-\frac{6}{20}=3x\left(2x-\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{5}\left(2x-\frac{3}{4}\right)=\left(2x-\frac{3}{4}\right)\left(3x+\frac{2}{5}\right)$$

3 Factoriza la expresión $3x+2\sqrt{x}-8$.

Solución

Se multiplican los coeficientes de los extremos: (3)(8) = 24

Se buscan dos números que al multiplicarse den 24 y restados 2, en este caso los números son 6 y 4, entonces:

$$3x+2\sqrt{x}-8=3x+6\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8$$

Se expresa $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$ y se realiza la factorización:

$$3x+6\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8=3\left(\sqrt{x}\right)^2+6\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8=3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)-4\left(\sqrt{x}+2\right)$$
$$=\left(\sqrt{x}+2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)$$

Por consiguiente, el resultado de la factorización es: $\left(\sqrt{x}+2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)$

EJERCICIO 45

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $3x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{8}$
2. $2x^2+\frac{7}{15}x-\frac{2}{15}$
3. $6x^2+\frac{15}{4}x+\frac{3}{8}$
4. $5m^2+\frac{23}{6}m+\frac{1}{3}$
5. $4m^2+\frac{17}{15}m-\frac{1}{15}$
6. $\frac{1}{6}a^2+\frac{17}{72}a+\frac{1}{12}$
7. $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{12}xy-\frac{1}{8}y^2$
8. $\frac{3}{25}x^2-\frac{3}{20}x-\frac{1}{12}$
9. $\frac{1}{24}x^2-\frac{13}{72}xy+\frac{1}{6}y^2$
10. $2x+13\sqrt{x}+15$
11. $12x-5\sqrt{x}-2$
12. $15x-23\sqrt{x}-28$
13. $2x-5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-3y$
14. $6x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-40$
15. $3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}-2$
16. $5(x+y)-6\sqrt{x+y}-8$
17. $12x^{\frac{4}{3}}-17x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}-40y$
18. $8x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-15y^{\frac{4}{3}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma o diferencia de cubos

Dadas las expresiones de la forma: a^3+b^3 y a^3-b^3, para factorizarlas es necesario extraer la raíz cúbica del primer y segundo términos, para después sustituir los resultados en las respectivas fórmulas.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $27x^3+8$.

Solución

Se extrae la raíz cúbica de ambos términos:

$$\sqrt[3]{27x^3}=3x \qquad \sqrt[3]{8}=2$$

Se sustituye en su fórmula respectiva, se desarrollan los exponentes y se obtiene:

$$27x^3+8=(3x+2)\left((3x)^2-(3x)(2)+(2)^2\right)$$
$$=(3x+2)(9x^2-6x+4)$$

2 Factoriza: m^6-216.

Solución

Se extraen las raíces cúbicas de los términos y se sustituyen en la fórmula para obtener:

$$m^6-216=(m^2-6)\left((m^2)^2+(m^2)(6)+(6)^2\right)$$
$$=(m^2-6)(m^4+6m^2+36)$$

3 Factoriza: $x^{15}+64y^3$.

Solución

Se realiza el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores para obtener:

$$x^{15}+64y^3=(x^5+4y)\left((x^5)^2-(x^5)(4y)+(4y)^2\right)$$
$$=(x^5+4y)(x^{10}-4x^5y+16y^2)$$

4 Factoriza la siguiente expresión: $(x+y)^3+(x-y)^3$.

Solución

Se obtienen las raíces cúbicas de los elementos y se sustituyen en la respectiva fórmula:

$$\sqrt[3]{(x+y)^3}=x+y \qquad \sqrt[3]{(x-y)^3}=x-y$$

Al aplicar la factorización de la suma de cubos, desarrollar y simplificar se obtiene:

$$(x+y)^3+(x-y)^3=\left((x+y)+(x-y)\right)\left((x+y)^2-(x+y)(x-y)+(x-y)^2\right)$$
$$=(x+y+x-y)(x^2+2xy+y^2-x^2+y^2+x^2-2xy+y^2)$$
$$=2x(x^2+3y^2)$$

5 Factoriza la siguiente expresión: $x - y$.

Solución

Se obtienen las raíces cúbicas de los elementos:

$$\sqrt[3]{x} \text{ y } \sqrt[3]{y}$$

Se aplica la factorización para una diferencia de cubos y el resultado es:

$$x - y = \left[\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right]\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{y}\right) + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right]$$
$$= \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)$$

6 Factoriza la expresión: $8a^{\frac{3}{2}} + 27b^{\frac{6}{5}}$.

Solución

Las raíces cúbicas son:

$$\sqrt[3]{8a^{\frac{3}{2}}} = 2a^{\frac{3}{(2)(3)}} = 2a^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{27b^{\frac{6}{5}}} = 3b^{\frac{6}{(5)(3)}} = 3b^{\frac{2}{5}}$$

Se sustituyen las raíces en la fórmula y la factorización es:

$$8a^{\frac{3}{2}} + 27b^{\frac{6}{5}} = \left[2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{2}{5}}\right]\left[\left(2a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(2a^{\frac{1}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{5}}\right) + \left(3b^{\frac{2}{5}}\right)^2\right]$$
$$= \left[2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{2}{5}}\right]\left[4a - 6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}} + 9b^{\frac{4}{5}}\right]$$

EJERCICIO 46

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $8x^3 - 1$
2. $x^3 + 27$
3. $8x^3 + y^3$
4. $27a^3 - b^3$
5. $8a^3 + 27b^6$
6. $64a^3 - 729$
7. $512 - 27a^9$
8. $x^6 - 8y^{12}$
9. $1 - 216m^3$
10. $a^3 - 125$
11. $27m^3 + 64n^9$
12. $343x^3 - 512y^6$
13. $a^6 + 125b^{12}$
14. $8x^6 + 729$
15. $27m^6 + 343n^9$
16. $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$
17. $a^{\frac{3}{4}} - 8b^{\frac{3}{4}}$
18. $x^{\frac{3}{2}} + 125y^{\frac{9}{2}}$
19. $x^{3a+3} - y^{6a}$
20. $(x+2y)^3 - (2x-y)^3$
21. $(x-y)^3 + 8y^3$
22. $27m^3 - (3m+2n)^3$
23. $(a+b)^3 - (2a+3b)^3$
24. $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma o diferencia de potencias impares iguales

Dadas las expresiones de la forma a^n+b^n o a^n-b^n siendo n un número impar, su factorización es de la siguiente forma:

$$a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$
$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: x^7+y^7.

Solución

Se extrae la raíz séptima de ambos términos:

$$\sqrt[7]{x^7}=x \qquad \sqrt[7]{y^7}=y$$

Se sustituye en su fórmula y se obtiene como resultado:

$$x^7+y^7=(x+y)\left(x^{7-1}-x^{7-2}y+x^{7-3}y^2-x^{7-4}y^3+x^{7-5}y^4-x^{7-6}y^5+y^6\right)$$
$$=(x+y)\left(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6\right)$$

2 Factoriza: x^5-32.

Solución

Se descompone 32 en sus factores primos y se aplica la fórmula:

$$x^5-32=x^5-2^5=(x-2)\left(x^{5-1}+x^{5-2}(2)+x^{5-3}(2)^2+x^{5-4}(2)^3+(2)^4\right)$$
$$=(x-2)\left(x^4+2x^3+4x^2+8x+16\right)$$

Finalmente, se tiene que: $x^5-32=(x-2)\left(x^4+2x^3+4x^2+8x+16\right)$

EJERCICIO 47

Factoriza las siguientes expresiones:

1. x^3+64y^3
2. a^7-128
3. $243-32x^5$
4. x^7+1
5. m^5-n^5
6. $x^7-a^7b^7$
7. $1-a^5$
8. x^5y^5+3125
9. x^9-1
10. x^9+512


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Factorización que combina un trinomio cuadrado perfecto y una diferencia de cuadrados

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $x^2 - 2xy + y^2 - a^2$.

Solución

La expresión $x^2 - 2xy + y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y su factorización es:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Por tanto:

$$x^2 - 2xy + y^2 - a^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - a^2 = (x - y)^2 - a^2$$

Al factorizar la diferencia de cuadrados se obtiene finalmente:

$$= (x - y)^2 - a^2 = (x - y + a)(x - y - a)$$

2 Factoriza la siguiente expresión: $16a^2 - m^2 - 8mn - 16n^2$.

Solución

Se agrupan los términos de la siguiente manera y se factoriza el signo negativo:

$$16a^2 - m^2 - 8mn - 16n^2 = 16a^2 + (-m^2 - 8mn - 16n^2)$$
$$= 16a^2 - (m^2 + 8mn + 16n^2)$$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$= 16a^2 - (m + 4n)^2$$

Se factoriza la diferencia de cuadrados y se obtiene finalmente:

$$= [4a + (m + 4n)][4a - (m + 4n)]$$
$$= (4a + m + 4n)(4a - m - 4n)$$

3 Factoriza: $a^2 - 2ab + b^2 - 25m^{10} + 40m^5n^3 - 16n^6$.

Solución

Se agrupan los términos que forman trinomios cuadrados perfectos y posteriormente se factoriza la diferencia de cuadrados para que finalmente el resultado sea:

$$a^2 - 2ab + b^2 - 25m^{10} + 40m^5n^3 - 16n^6 = (a^2 - 2ab + b^2) - (25m^{10} - 40m^5n^3 + 16n^6)$$
$$= (a - b)^2 - (5m^5 - 4n^3)^2$$
$$= [(a - b) + (5m^5 - 4n^3)][(a - b) - (5m^5 - 4n^3)]$$
$$= (a - b + 5m^5 - 4n^3)(a - b - 5m^5 + 4n^3)$$

EJERCICIO **48**

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $m^2 + 2m + 1 - 4n^2$
2. $y^2 - 6y + 9 - z^2$
3. $x^2 - y^2 + 10y - 25$
4. $m^4 - n^6 - 6n^3 - 9$
5. $49m^4 - 25m^2 - 9n^2 + 30mn$
6. $m^2 - 6x - 9 - x^2 + 2am + a^2$
7. $1 - a^2 - 9n^2 - 6an$
8. $m^2 - n^2 + 4 + 4m - 1 - 2n$
9. $2by - y^2 + 1 - b^2$
10. $25p^2 - 2m - m^2 - 1$
11. $m^2 - 16 - n^2 + 36 + 12m - 8n$
12. $x^2 + 2xy + y^2 - 16a^2 - 24ab^5 - 9b^{10}$
13. $100 - 60y + 9y^2 - m^2 + 2amp - a^2p^2$
14. $25b^2 + 10ab - 9n^2 + a^2 - 6mn - m^2$
15. $4m^2 - 9a^2 + 49n^2 - 30ab - 25b^2 - 28mn$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Factorización para completar el trinomio cuadrado perfecto

➲ **Caso I trinomio de la forma $x^2 + bx + c$**

Ejemplo

Factoriza la expresión: $x^2 - 3x - 10$.

Solución

Se toma el coeficiente del término lineal y se divide entre 2 y el resultado se eleva al cuadrado.

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Se suma y se resta $\frac{9}{4}$ al trinomio, se agrupan los términos y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto que resulta:

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 10 = \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - 10 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Se factoriza la diferencia de cuadrados y se reducen términos semejantes:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = \left(x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right) = (x+2)(x-5)$$

Finalmente, la factorización queda como: $x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$

➲ **Caso II trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$**

Ejemplo

Factoriza: $2x^2 + 5x + 2$.

Solución

Se factoriza el coeficiente del término cuadrático y se completa el trinomio para la expresión encerrada en el paréntesis:

$$2x^2 + 5x + 2 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right) = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2 + 1\right)$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1\right) = 2\left(\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{16} + 1\right) = 2\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2)$$

Se multiplican por 2 los términos del primer factor y se obtiene como resultado:

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2) = (2x+1)(x+2)$$

➲ **Caso III por adición y sustracción**

Ejemplo

Factoriza la expresión: $4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4$.

Solución

El trinomio no es cuadrado perfecto, debido a que el doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer términos, es:

$$2(2m^2)(3n^2) = 12m^2n^2$$

Ya que el segundo término es $3m^2n^2$, se le suma $9m^2n^2$ y se obtiene el término que se necesita para que el trinomio sea cuadrado perfecto, por consiguiente, se resta también $9m^2n^2$ para no alterar la expresión.

$$\begin{aligned} 4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4 &= 4m^4 + 3m^2n^2 + 9m^2n^2 + 9n^4 - 9m^2n^2 \\ &= (4m^4 + 12m^2n^2 + 9n^4) - 9m^2n^2 \\ &= (2m^2 + 3n^2)^2 - 9m^2n^2 \\ &= (2m^2 + 3n^2 + 3mn)(2m^2 + 3n^2 - 3mn) \end{aligned}$$

Finalmente: $4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4 = (2m^2 + 3n^2 + 3mn)(2m^2 + 3n^2 - 3mn)$

EJERCICIO **49**

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $x^2 - 3x + 2$
2. $x^2 - x - 20$
3. $m^2 - 7m + 10$
4. $x^2 - 2x - 48$
5. $a^2 - 6a - 40$
6. $n^2 + 3n - 54$
7. $3x^2 + 10x + 8$
8. $6m^2 + 7m + 2$
9. $3a^2 - a - 4$
10. $6x^2 - x - 12$
11. $n^4 + n^2 + 1$
12. $a^4 - 6a^2 + 1$
13. $m^8 + 4m^4n^4 + 16n^8$
14. $x^4 - 45x^2 + 100$
15. $64a^4 + 76a^2 + 49$
16. $121 + 21a^2b^2 + a^4b^4$
17. $36m^4 - 109m^2n^2 + 49n^4$
18. $x^4 + x^2y^2 + y^4$
19. $a^4 - 7a^2b^2 + 9b^4$
20. $4m^8 - 53m^4n^4 + 49n^8$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Expresiones algebraicas donde se utilizan dos o más casos

Existen polinomios que se deben factorizar dos o más veces con diferentes métodos; a continuación se ejemplifican algunos de estos polinomios:

EJEMPLOS

1 Factoriza la expresión: $2x^3 + 6x^2 - 8x$.

Solución

Se obtiene el factor común:

$$2x^3 + 6x^2 - 8x = 2x(x^2 + 3x - 4)$$

Se factoriza el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y se obtiene:

$$= 2x(x + 4)(x - 1)$$

2 Factoriza: $3m^4 - 243$.

Solución

Se factoriza 3 que es el factor común:

$$3m^4 - 243 = 3(m^4 - 81)$$

El binomio se factoriza con una diferencia de cuadrados:

$$= 3(m^2 - 9)(m^2 + 9)$$

La expresión $m^2 - 9$ se factoriza empleando nuevamente la diferencia de cuadrados y se obtiene finalmente:

$$= 3(m - 3)(m + 3)(m^2 + 9)$$

EJERCICIO 50

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $x^3 - 3x^2 - 28x$
2. $3a^2 - 3a - 6$
3. $3m^3 - 3m$
4. $y^4 - 3y^2 - 4$
5. $m^3 - m^2 - m + 1$
6. $6ax^2 - ax - 2a$
7. $x^4 - x^3 + x^2 - x$
8. $8ax^2 - 2a$
9. $a^5 + a^3 - 2a$
10. $64 - m^6$
11. $x^4 - 25x^2 + 144$
12. $a^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - b^5$
13. $a^9 - ab^8$
14. $a(x^3 + 1) + 3ax(x + 1)$
15. $a^6 - 25a^3 - 54$
16. $a^4 - a^3 + a - 1$
17. $4m^2y^3 - 4m^2$
18. $3mnp^2 + 3mnp - 18mn$
19. $256 - a^4$
20. $a^8 - b^8$
21. $8x^4 + 6x^2 - 2$
22. $5mxy^3 + 10my^2 - 5mxy - 10m$
23. $a^6 - 729$
24. $x^7 - xy^6$
25. $a^2(a^2 - b^2) - (2a - 1)(a^2 - b^2)$
26. $4a^5 + 4a^3 + 4a$
27. $m^3 - 4m - m^2 + 4$
28. $y^5 - 40y^3 + 144y$
29. $m^5 - m$
30. $6m^2y - 9m^3 - my^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Descomposición en factores de un polinomio por división sintética

Dado el polinomio $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, su factorización es de la forma $(x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se obtienen del cociente:

$$\text{Posibles factores del polinomio} = \frac{\text{factores de } a_n}{\text{factores de } a_0}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Descompón por evaluación: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

Solución

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de x^3

Divisores de $12 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ Divisores de $1 = \{\pm 1\}$

Se dividen los divisores del término independiente entre los divisores del coeficiente de x^3

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

Éstos son los posibles valores para los cuales el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio y, con los valores anteriores, se efectúan las operaciones indicadas, si la última operación es cero, entonces, se resta a la literal para obtener un factor, este procedimiento se repite las veces que sea necesario como se ilustra a continuación:

1	-3	-4	12	2 → Primer factor $(x - 2)$
	$(2)(1) = 2$	$(2)(-1) = -2$	$(2)(-6) -12$	
1	-1	-6	0	-2 → Segundo factor $(x - (-2)) = (x + 2)$
	$(-2)(1) = -2$	$(-2)(-3) = 6$		
1	-3	0		3 → Tercer factor $(x - 3)$
	$(3)(1) = 3$			
1	0			

Los x_1, x_2, x_3... son los valores para los que el residuo de la división sintética es cero, y el número de factores es el número de valores que la cumplen.

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio propuesto es:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)$$

2 Factoriza el polinomio: $6x^3 + x^2 - 31x + 10$.

Solución

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de x^3

Divisores de 10 = { ± 1, ± 2, ± 5, ± 10} Divisores de 6 = { ± 1, ± 2, ± 3, ± 6}

Posibles factores del polinomio: $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{6}, \pm\frac{10}{3}\right\}$

Éstos son los posibles valores para los que el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio y, con los valores anteriores, se efectúan las operaciones siguientes:

6	1	–31	10	2	→ Primer factor $(x - 2)$
	12	26	–10		
6	13	–5	0	$\frac{1}{3}$	→ Segundo factor $\left(x - \frac{1}{3}\right)$
	2	5			
6	15	0		$-\frac{5}{2}$	→ Tercer factor $\left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) = \left(x + \frac{5}{2}\right)$
	–15				
6	0				

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio es:

$$6x^3 + x^2 - 31x + 10 = 6(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = (x-2)(2x+5)(3x-1)$$

3 Factoriza el polinomio: $m^4 - 18m^2 + 81$.

Solución

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de m^4

Divisores de 81 = { ± 1, ± 3, ± 9, ± 27, ± 81} Divisores de 1 = { ± 1}

Posibles factores del polinomio: { ± 1, ± 3, ± 9, ± 27, ± 81}

Éstos son los posibles valores para los que el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio, se consideran los ceros de los términos cúbico y lineal y se efectúan las operaciones siguientes:

1	0	–18	0	81	3	→ Primer factor $(m - 3)$
	3	9	–27	–81		
1	3	–9	–27	0	3	→ Segundo factor $(m - 3)$
	3	18	27			
1	6	9	0		–3	→ Tercer factor $(m - (-3)) = (m + 3)$
	–3	–9				
1	3	0			–3	→ Cuarto factor $(m - (-3)) = (m + 3)$
	–3					
1	0					

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio es:

$$m^4 - 18m^2 + 81 = (m-3)(m-3)(m+3)(m+3) = (m-3)^2(m+3)^2$$

4 Factoriza el polinomio: $4y^4 - 9y^2 - 6y - 1$.

Solución

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de y^4.

Divisores de 1 = { ± 1}   Divisores de 4 = { ± 1, ± 2, ± 4}

Posibles factores del polinomio: $\left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}\right\}$

Éstos son los posibles valores para los que el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio, se considera al cero del término cúbico y se efectúan las operaciones siguientes:

4	0	−9	−6	−1	−1	→ Primer factor $(y + 1)$
	−4	4	5	1		
4	−4	−5	−1	0	$-\frac{1}{2}$	→ Segundo factor $\left(y+\frac{1}{2}\right)$
	−2	3	1			
4	−6	−2	0			→ Tercer factor $(4y^2 - 6y - 2)$

La expresión $4y^2 - 6y - 2$ únicamente se puede factorizar de la siguiente manera:

$$4y^2 - 6y - 2 = 2(2y^2 - 3y - 1)$$

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio es:

$$4y^4 - 9y^2 - 6y - 1 = (y+1)\left(y+\frac{1}{2}\right)2\left(2y^2 - 3y - 1\right) = (y + 1)(2y + 1)(2y^2 - 3y - 1)$$

EJERCICIO 51

Factoriza las siguientes expresiones:

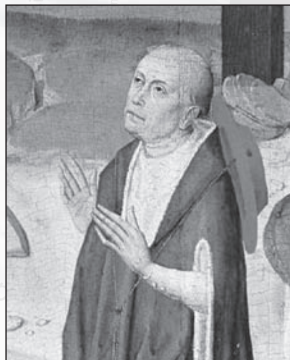
1. $b^3 - b^2 - b + 1$
2. $w^3 + 2w^2 - w - 2$
3. $x^3 - 4x^2 + x + 6$
4. $x^3 + x^2 - 14x - 24$
5. $4x^3 - 7x + 3$
6. $m^3 + 2m^2 + m + 2$
7. $6y^3 + y^2 - 11y - 6$
8. $a^4 - 10a^2 + 9$
9. $3x^3 + 4x^2 - 59x - 20$
10. $m^4 + 6m^3 + 3m + 140$
11. $n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 4n + 4$
12. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$
13. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$
14. $x^5 - 4x^4 + 10x^2 - x - 6$
15. $a^5 - 30a^3 - 25a^2 - 36a - 180$
16. $2x^5 - 5x^4 - 12x^3 + 23x^2 + 16x - 12$
17. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 32x - 24$
18. $6x^5 + 7x^4 - 47x^3 - 13x^2 + 77x - 30$
19. $n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36$
20. $2x^6 - 3x^5 - 35x^4 - 2x^2 + 3x + 35$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 16

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Reseña HISTÓRICA



Nicolás de Cusa (1401-1464)

Cardenal alemán nacido en Cusa y fallecido en Lodi (Italia). Más filósofo que matemático, a él se debe la crítica a los conceptos de la noción de infinito: "...para alcanzar el maximum y el minimum hay que trascender la serie indefinida de lo grande y lo pequeño, y entonces se descubre que el maximum y el minimum coinciden en la idea de infinito...".

Nicolás de Cusa vio que uno de los puntos débiles del pensamiento escolástico de la época, en lo que se refiere a la ciencia, había sido su incapacidad para medir, mientras que él pensaba que el conocimiento debería sustentarse en la medida. Sus teorías filosóficas neoplatónicas sobre la concordancia de los contrarios, le condujo a pensar que los máximos y los mínimos están siempre en relación.

Nicolás de Cusa (1401-1464)

Máximo común divisor (MCD)

El máximo común divisor de dos o más expresiones algebraicas es el término o polinomio que divide exactamente a todas y cada una de las expresiones dadas.

Regla para obtener el MCD:

- Se obtiene el máximo común divisor de los coeficientes.
- Se toman los factores (monomio o polinomio) de menor exponente que tengan en común y se multiplican por el máximo común divisor de los coeficientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el máximo común divisor de: $15x^2y^2z$, $24xy^2z$, $36y^4z^2$.

Solución

Se obtiene el MCD de 15, 24 y 36

15	24	36	3
5	8	12	

MCD = 3

Se toman los factores que tengan en común y se escogen los de menor exponente, en este caso: y^2, z
Finalmente, el máximo común divisor: $3y^2z$

2 Obtén el MCD de los siguientes polinomios:

$$4m^2 + 8m - 12,\ 2m^2 - 6m + 4,\ 6m^2 + 18m - 24$$

Solución

Se factorizan los polinomios:

$$4(m^2 + 2m - 3) = 4(m + 3)(m - 1)$$
$$2(m^2 - 3m + 2) = 2(m - 2)(m - 1)$$
$$6(m^2 + 3m - 4) = 6(m + 4)(m - 1)$$

Se obtiene el MCD de 4, 2 y 6

4	2	6	2
2	1	3	

El MCD de los coeficientes 2, 4 y 6 es 2.
El MCD de los factores es $m - 1$
Por tanto, el MCD de los polinomios es: $2(m - 1)$

Mínimo común múltiplo (mcm)

El mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es el término algebraico que se divide por todas y cada una de las expresiones dadas.

Regla para obtener el mínimo común múltiplo:

- Se obtiene el mcm de los coeficientes.
- Se toman los factores que no se repiten y, de los que se repiten, el de mayor exponente, y se multiplican por el mínimo común múltiplo de los coeficientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el mcm de las siguientes expresiones $15x^2y^2z$, $24xy^2z$, $36y^4z^2$.

Solución

Se encuentra el mcm de 15, 24, 36

15	24	36	2
15	12	18	2
15	6	9	2
15	3	9	3
5	1	3	3
5	1	1	5
1	1	1	

$\text{mcm} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$

El mcm de los coeficiente 15, 24 y 36 es 360

Se toman todos los factores y se escogen los de mayor exponente en el caso de aquellos que sean comunes y, los que no, se escriben igual.

$$x^2y^4z^2$$

Finalmente, el mcm es $360x^2y^4z^2$

2 Encuentra el mcm de $4m^2 + 8m - 12$, $2m^2 - 6m + 4$, $6m^2 + 18m - 24$.

Solución

Se factorizan los polinomios y se escogen los factores:

$$4m^2 + 8m - 12 = 4(m^2 + 2m - 3) = 4(m + 3)(m - 1)$$
$$2m^2 - 6m + 4 = 2(m^2 - 3m + 2) = 2(m - 2)(m - 1)$$
$$6m^2 + 18m - 24 = 6(m^2 + 3m - 4) = 6(m + 4)(m - 1)$$

Se obtiene el mcm de los coeficientes de 4, 2 y 6

4	2	6	2
2	1	3	2
1	1	3	3
1	1	1	

$\text{mcm} = 2^2 \times 3 = 12$

El mcm de 4, 2 y 6 es 12

El mcm de los factores es: $(m + 3)(m - 2)(m + 4)(m - 1)$

Por consiguiente, el mcm es: $12(m + 3)(m - 1)(m - 2)(m + 4)$

EJERCICIO **52**

Determina el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de las siguientes expresiones:

1. $35x^2y^3z^4$; $42x^2y^4z^4$; $70x^2y^5z^2$
2. $72m^3y^4$; $96m^2y^2$; $120m^4y^5$
3. $4x^2y$; $8x^3y^2$, $2x^2yz$; $10xy^3z^2$
4. $39a^2bc$, $52ab^2c$; $78abc^2$

5. $60m^2n^x$; $75m^4n^{x+2}$; $105mn^{x+1}$
6. $22x^ay^b$; $33x^{a+2}y^{b+1}$; $44x^{a+1}y^{b+2}$
7. $18a^2(x-1)^3$; $24a^4(x-1)^2$; $30a^5(x-1)^4$
8. $27(a-b)(x+y)^2$; $45(a-b)^2(x+y)$
9. $24(2x+1)^2(x-7)$; $30(x+8)(x-7)$; $36(2x+1)(x+8)^2$
10. $38(a^3+a^3b)$; $57a(1+b)^2$; $76a^4(1+b)^3$
11. $xy+y$; x^2+x
12. m^3-1; m^2-1
13. m^2+mn; $mn+n^2$; m^3+m^2n
14. x^2-y^2; $x^2-2xy+y^2$
15. $3x^2-6x$; x^3-4x; x^2y-2xy; x^2-x-2
16. $3a^2-a$; $27a^3-1$; $9a^2-6a+1$
17. m^2-2m-8; m^2-m-12; m^3-9m^2+20m
18. $2a^3-2a^2$; $3a^2-3a$; $4a^3-4a^2$
19. $12b^2+8b+1$; $2b^2-5b-3$
20. y^3-2y^2-5y+6; $2y^3-5y^2-6y+9$; $2y^2-5y-3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simplificación de fracciones algebraicas

Una fracción algebraica contiene literales y se simplifica al factorizar al numerador y al denominador y al dividir aquellos factores que se encuentren en ambas posiciones, como a continuación se ejemplifica.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica la siguiente expresión: $\frac{8a^2+12ab}{8a^2}$.

Solución

Se factorizan tanto el numerador como el denominador.

$$\frac{8a^2+12ab}{8a^2}=\frac{(4a)(2a+3b)}{(2a)(4a)}$$

Una vez factorizados los elementos de la fracción, se observa que en ambos se encuentra la expresión $(4a)$ la cual se procede a simplificar

$$\frac{(4a)(2a+3b)}{(2a)(4a)}=\frac{2a+3b}{2a}$$

2 Simplifica la siguiente expresión: $\frac{3m}{15m-12m^2}$.

Solución

Se factorizan el numerador y el denominador, simplificando el término que se repite en ambos $(3m)$

$$\frac{3m}{15m-12m^2}=\frac{1(3m)}{(3m)(5-4m)}=\frac{1}{5-4m}$$

3 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{6x^2y-12xy^2}{x^2-4y^2}$.

Solución

Se factorizan tanto el numerador como el denominador.

$$\frac{6x^2y-12xy^2}{x^2-4y^2}=\frac{6xy(x-2y)}{(x+2y)(x-2y)}$$

Una vez factorizados los elementos de la fracción, se observa que en ambos se encuentra la expresión $(x - 2y)$ la cual se procede a simplificar

$$\frac{6xy(x-2y)}{(x+2y)(x-2y)}=\frac{6xy}{x+2y}$$

4 Simplifica $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+ax-3x-3a}$.

Solución

Se factorizan tanto numerador como denominador

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2+ax-3x-3a}=\frac{(x-3)^2}{x(x+a)-3(x+a)}=\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+a)}$$

En esta fracción el elemento que se repite en el numerador y denominador es $(x - 3)$, entonces se realiza la simplificación

$$\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+a)}=\frac{x-3}{x+a}$$

5 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{9x-x^3}{x^4-x^3-6x^2}$.

Solución

Se factorizan tanto numerador como denominador

$$\frac{9x-x^3}{x^4-x^3-6x^2}=\frac{x\left(9-x^2\right)}{x^2\left(x^2-x-6\right)}=\frac{x(3+x)(3-x)}{x^2(x-3)(x+2)}$$

Los factores que se repiten son (x) y $(x - 3)$

$$\frac{x(3+x)(3-x)}{x^2(x-3)(x+2)}=\frac{(3+x)(-1)}{x(x+2)}=-\frac{x+3}{x(x+2)}$$

6 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{12+37x+2x^2-3x^3}{20+51x-26x^2+3x^3}$.

Solución

Se factorizan tanto numerador como denominador

$$\frac{12+37x+2x^2-3x^3}{20+51x-26x^2+3x^3}=\frac{(-1)(3x+1)(x+3)(x-4)}{(x-5)(3x+1)(x-4)}$$

Los factores que se repiten en el numerador y denominador $(3x + 1)$ y $(x - 4)$, se dividen, obteniéndose la simplificación de la fracción

$$\frac{12+37x+2x^2-3x^3}{20+51x-26x^2+3x^3}=\frac{(-1)(x+3)}{(x-5)}=-\frac{x+3}{x-5}$$

EJERCICIO 53

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\frac{2a^2+2ab}{3a^2b}$
2. $\frac{6a^3b^2}{3a^2b-6ab^2}$
3. $\frac{4a^2+12a}{8a^2}$
4. $\frac{6m^3-18m^2-24m}{15m-9m^2}$
5. $\frac{m^3n-m^2n^2}{n^2-m^2}$
6. $\frac{4x^2-12x}{2x^3-2x^2-12x}$
7. $\frac{x^2-3xy-10y^2}{5y^2+4xy-x^2}$
8. $\frac{x^2+7x-78}{x^2-36}$
9. $\frac{n^2-5n+6}{n^2-2n-3}$
10. $\frac{2x^2-xy-6y^2}{3x^2-5xy-2y^2}$
11. $\frac{-x^4+3x^3y-2x^2y^2}{5x^3-4x^2y-xy^2}$
12. $\frac{3x^2+10xy+8y^2}{x^2-xy-6y^2}$
13. $\frac{ab^2m^2-2ab^2mn+ab^2n^2}{abm^2-abn^2}$
14. $\frac{8-x^3}{x^2+2x-8}$
15. $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$
16. $\frac{y^3-27x^3}{y^2-xy-6x^2}$
17. $\frac{x^3-1}{x^3-x^2-x-2}$
18. $\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x^3-3xy^2+2y^3}$
19. $\frac{3ax-bx-3ay+by}{by^2-bx^2-3ay^2+3ax^2}$
20. $\frac{a^2+ab-ad-bd}{2a^2b+2ab^2}$
21. $\frac{y^3+y^2-6y}{3ay^2+9ay+2y^2+6y}$
22. $\frac{3x^2-3xy}{yz-xz-yw+xw}$
23. $\frac{w^2+w-2}{x-wx-y+wy}$
24. $\frac{p+1-p^3-p^2}{p^3-p-2p^2+2}$
25. $\frac{2a^3-2ab^2+a^2-b^2}{2ab^2+b^2-2a^3-a^2}$
26. $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+4x^2+x-6}$
27. $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3+x^2-14x-24}$
28. $\frac{y^3-9y^2+26y-24}{y^3-5y^2-2y+24}$
29. $\frac{(y-1)(y^2-8y+16)}{(y^2-4y)(1-y^2)}$
30. $\frac{(a-2)^2(a^2+a-12)}{(2-a)(3-a)^2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta de fracciones con denominador común

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\frac{2a-a^2b}{a^2b}+\frac{3a+4a^2b}{a^2b}$.

Solución

Se simplifica cada fracción, si es posible.

$$\frac{2a-a^2b}{a^2b}=\frac{a(2-ab)}{a^2b}=\frac{2-ab}{ab};\qquad \frac{3a+4a^2b}{a^2b}=\frac{a(3+4ab)}{a^2b}=\frac{3+4ab}{ab}$$

Se suman las nuevas expresiones.

$$\frac{2-ab}{ab}+\frac{3+4ab}{ab}$$

Como los denominadores son comunes, en la fracción resultante sólo se reducen los numeradores y el denominador permanece igual.

$$\frac{2-ab}{ab}+\frac{3+4ab}{ab}=\frac{2-ab+3+4ab}{ab}=\frac{5+3ab}{ab}$$

2 Encuentra el resultado de $\frac{2m+n}{2m-n}+\frac{5m-5n}{2m-n}+\frac{n-m}{2m-n}$.

Solución

En este caso ningún sumando se puede simplificar, entonces el común denominador es $2m-n$, y sólo se reducen los numeradores.

$$\frac{2m+n}{2m-n}+\frac{5m-5n}{2m-n}+\frac{n-m}{2m-n}=\frac{2m+n+5m-5n+n-m}{2m-n}=\frac{6m-3n}{2m-n}=\frac{3(2m-n)}{2m-n}=3$$

EJERCICIO 54

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\frac{2x^2-7x}{8x^2}+\frac{6x^2+x}{8x^2}$
2. $\frac{1-a^2}{a}-\frac{7-2a^2}{a}$
3. $\frac{7n-1}{10n}+\frac{8n-4}{10n}$
4. $\frac{7m^2-6m}{4mn}+\frac{12m^2-3m}{4mn}$
5. $\frac{35n-7}{5n^2-n}-\frac{15n-3}{5n^2-n}$
6. $\frac{11y^2-14y}{6y^2}-\frac{2y^2+y}{6y^2}$
7. $\frac{12x^2-x+5}{22x}+\frac{6+x-x^2}{22x}$
8. $\frac{13x-y}{3x-2y}+\frac{5x-3y}{3x-2y}-\frac{3x+6y}{3x-2y}$
9. $\frac{6a+5b}{8a-2b}-\frac{a+6b}{8a-2b}+\frac{3a-b}{8a-2b}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta de fracciones con denominadores diferentes

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: $\frac{3x}{2y^2}+\frac{5y}{4x^2}$.

Solución

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se realizan las operaciones correspondientes.

$$\frac{3x}{2y^2}+\frac{5y}{4x^2}=\frac{3x\left(2x^2\right)+5y\left(y^2\right)}{4x^2y^2}=\frac{6x^3+5y^3}{4x^2y^2}$$

2 Realiza la siguiente operación y simplifica al máximo: $\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}$.

Solución

Se obtiene el común denominador de los denominadores "$x+h$" y "x", posteriormente se procede a realizar la diferencia de fracciones

$$\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}=\frac{x-x-h}{x(x+h)}=\frac{-h}{x(x+h)}$$

3 Efectúa $\frac{3x}{x^2-6x+9}+\frac{4}{x-3}$.

Solución

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se efectúan las operaciones:

$$\frac{3x}{(x-3)^2}+\frac{4}{x-3}=\frac{3x(1)+4(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{3x+4x-12}{(x-3)^2}=\frac{7x-12}{(x-3)^2}$$

4 Realiza la siguiente operación: $\frac{1}{(x+h)^2-1}-\frac{1}{x^2-1}$.

Solución

Se determina el común denominador, éste se divide por cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su numerador, los productos se reducen al máximo.

$$\frac{1}{(x+h)^2-1}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x^2+2xh+h^2-1}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1(x^2-1)-1(x^2+2xh+h^2-1)}{(x^2+2xh+h^2-1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^2-1-x^2-2xh-h^2+1}{(x^2+2xh+h^2-1)(x^2-1)}=\frac{-2xh-h^2}{(x^2+2xh+h^2-1)(x^2-1)}$$

5 Simplifica la siguiente operación: $\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$.

Solución

A los enteros se les coloca la unidad como denominador:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{1}$$

Luego, el común denominador es $(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, por tanto

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{1}=\frac{x^2(1)+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

se aplica la propiedad $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ y se simplifica al máximo el numerador, entonces:

$$\frac{x^2(1)+(x^2+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^2+(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

6 Simplifica la siguiente operación: $\frac{x^3}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}-(x^3-1)^{\frac{1}{3}}$.

Solución

El común denominador de esta diferencia de fracciones es $(x^3-1)^{\frac{2}{3}}$, entonces:

$$\frac{x^3}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}-(x^3-1)^{\frac{1}{3}}=\frac{x^3-(x^3-1)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^3-(x^3-1)}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^3-x^3+1}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}$$

Por tanto, la simplificación es:

$$\frac{x^3}{\left(x^3-1\right)^{\frac{2}{3}}}-\left(x^3-1\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\left(x^3-1\right)^{\frac{2}{3}}}$$

7 Efectúa y simplifica la siguiente expresión: $\frac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Solución

El común denominador es el producto de los denominadores:

$$\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se realiza la operación:

$$\frac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x\left(x^2+1\right)-x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{x^3+x-x^3+x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

En el denominador los factores están elevados al mismo exponente, se pueden multiplicar las bases, las cuales dan como resultado una diferencia de cuadrados, por tanto:

$$\frac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x}{\left(x^4-1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

8 Simplifica la siguiente operación: $\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}$.

Solución

Se obtiene el común denominador y se procede a realizar la diferencia:

$$\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}-2(x+1)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(x-2)-2(x+1)}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{x-2-2x-2}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$

Por último se simplifica el numerador, entonces:

$$\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{-x-4}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=-\frac{x+4}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$

9 Realiza y simplifica la operación $\frac{a+b}{a^2-ab-20b^2}-\frac{a+4b}{a^2-4ab-5b^2}+\frac{a+5b}{a^2+5ab+4b^2}$.

Solución

Se factorizan los denominadores:

$$a^2-ab-20b^2=(a-5b)(a+4b)$$
$$a^2-4ab-5b^2=(a-5b)(a+b)$$
$$a^2+5ab+4b^2=(a+4b)(a+b)$$

La expresión con los denominadores factorizados es:

$$\frac{a+b}{(a-5b)(a+4b)}-\frac{a+4b}{(a-5b)(a+b)}+\frac{a+5b}{(a+4b)(a+b)}$$

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores: $(a-5b)(a+4b)(a+b)$
Se resuelve la fracción:

$$=\frac{(a+b)(a+b)-(a+4b)(a+4b)+(a-5b)(a+5b)}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$
$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2-8ab-16b^2+a^2-25b^2}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$
$$=\frac{a^2-6ab-40b^2}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$

El numerador se factoriza, si es posible, para simplificar al máximo, entonces

$$=\frac{(a-10b)(a+4b)}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$
$$=\frac{a-10b}{(a-5b)(a+b)}$$

EJERCICIO 55

Efectúa y simplifica las siguientes operaciones algebraicas:

1. $\frac{x-2}{4x}+\frac{x+5}{10x}$
2. $\frac{x+1}{2x}+\frac{2x+3}{3x}$
3. $\frac{x-4}{9x^2}+\frac{x-3}{6x}$
4. $\frac{2x+5}{6x}-\frac{x+6}{4x^2}$
5. $\frac{1}{x+h+2}-\frac{1}{x+2}$
6. $\frac{x+h+1}{x+h-1}-\frac{x+1}{x-1}$
7. $\frac{2}{(x+h)^2-3}-\frac{2}{x^2-3}$
8. $\frac{(x+h)^2}{(x+h)^2+1}-\frac{x^2}{x^2+1}$
9. $\frac{6x}{x^2-9}+\frac{x}{x+3}$
10. $\frac{2}{x+1}+\frac{x+2}{x^2-1}$
11. $\frac{4x}{x^2-4}+\frac{x}{x+2}$
12. $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{x^2-1}$

13. $\frac{7x}{x^2+6x+9}+\frac{1}{x^2-9}$

14. $2x(x-2)^{\frac{1}{3}}-\frac{x^2}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}}$

15. $12x^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}-\frac{3x^5}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

16. $\frac{3x(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2+2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x(3x^2+2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}$

17. $\frac{-2x(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}{3(5-x^2)^{\frac{2}{3}}}-\frac{4x(5-x^2)^{\frac{1}{3}}}{3(x^2+2)^{\frac{1}{3}}}$

18. $\frac{(8x-3)(4x^2+3x)^{\frac{1}{3}}}{3(4x^2-3x)^{\frac{2}{3}}}-\frac{(8x+3)(4x^2-3x)^{\frac{1}{3}}}{3(4x^2+3x)^{\frac{2}{3}}}$

19. $\frac{x+1}{x^2+x-12}-\frac{12}{x^2+5x-24}$

20. $\frac{2x^2+8}{2x^2+2x-12}-\frac{5x-6-x^2}{x^2+2x-8}$

21. $\frac{4x-5}{x^2+x-12}+\frac{9}{18-3x-x^2}+\frac{2}{x^2+10x+24}$

22. $\frac{1}{2x^2+11x+15}+\frac{6x+7}{3x^2+7x-6}-\frac{19}{6x^2+11x-10}$

23. $\frac{m+n}{m^2-mn+n^2}-\frac{1}{m+n}+\frac{3m^2}{m^3+n^3}$

24. $\frac{3x+2y}{x^2+3xy-10y^2}-\frac{5x+y}{x^2+4xy-5y^2}+\frac{4x-y}{x^2-3xy+2y^2}$

25. $\frac{a-b}{3a+3b}-\frac{a-2b}{6a-6b}+\frac{a^2+2ab-6b^2}{9a^2-9b^2}$

26. $\frac{r+3s}{s+r}-\frac{3s^2}{s^2-r^2}+\frac{r}{s-r}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación de fracciones algebraicas

Regla para multiplicar fracciones:

- Descomponer en factores los elementos de las fracciones que se van a multiplicar.
- Se simplifican aquellos términos que sean comunes en el numerador y denominador de las fracciones que se van a multiplicar.
- Multiplicar todos los términos restantes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Multiplica $\frac{2x^2}{3y}\cdot\frac{6y^2}{4x}\cdot\frac{5xy}{2y}$.

Solución

Se realiza la multiplicación de fracciones y se simplifica el resultado

$$\frac{2x^2}{3y}\cdot\frac{6y^2}{4x}\cdot\frac{5xy}{2y}=\frac{60x^3y^3}{24xy^2}=\frac{5x^2y}{2}$$

2 Simplifica: $\frac{m^2+9m+18}{m-5}\cdot\frac{5m-25}{5m+15}$.

Solución

Se factoriza cada uno de los elementos

$$\frac{m^2+9m+18}{m-5}\cdot\frac{5m-25}{5m+15}=\frac{(m+6)(m+3)}{m-5}\cdot\frac{5(m-5)}{5(m+3)}$$

(*continúa*)

(*continuación*)
se procede a realizar la multiplicación y la simplificación

$$\frac{(m+6)(m+3)}{m-5}\cdot\frac{5(m-5)}{5(m+3)}=\frac{5(m+6)(m+3)(m-5)}{5(m-5)(m+3)}=m+6$$

3 Efectúa y simplifica: $\frac{a^2-5a+6}{3a-15}\cdot\frac{6a}{a^2-a-30}\cdot\frac{a^2-25}{2a-4}$.

Solución

$$\frac{(a-3)(a-2)}{3(a-5)}\cdot\frac{2\cdot 3a}{(a-6)(a+5)}\cdot\frac{(a+5)(a-5)}{2(a-2)}=\frac{(a-3)(a-2)2\cdot 3a(a+5)(a-5)}{3(a-5)(a-6)(a+5)2(a-2)}$$

$$=\frac{6a(a-3)(a-2)(a+5)(a-5)}{6(a-5)(a-6)(a+5)(a-2)}=\frac{a(a-3)}{a-6}$$

Finalmente, el resultado de la multiplicación es $\frac{a(a-3)}{a-6}=\frac{a^2-3a}{a-6}$

EJERCICIO 56

Efectúa la multiplicación de las fracciones algebraicas y simplifica:

1. $\frac{4a^2}{7x^3}\cdot\frac{14x}{5b^4}\cdot\frac{5b^2}{7a^3}$
2. $\frac{5}{x}\cdot\frac{2x}{y^2}\cdot\frac{3y}{10}$
3. $\frac{3x}{10y^2}\cdot\frac{5y^4}{14ab}\cdot\frac{7a}{6x^2}$
4. $\frac{16ab^2}{5a^2x}\cdot\frac{10x^3}{4b^3}\cdot\frac{2a^2}{3bx}$
5. $\frac{3x^2}{4b}\cdot\frac{b^2}{2y^2}\cdot\frac{2y}{3x^3}$
6. $\frac{5m+25}{14}\cdot\frac{7m+7}{10m+50}$
7. $\frac{b^2-5b+6}{3b-15}\cdot\frac{b^2-25}{2b-4}\cdot\frac{6b}{b^2-b-30}$
8. $\frac{2m^3+2mn^2}{2mx^2-2mx}\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x^3-x}{m^2x+n^2x}$
9. $\frac{14x^2-21x}{24x-16}\cdot\frac{12x-8}{42x-63}$
10. $\frac{30x^3-18x^2}{6x^3+5x^2}\cdot\frac{42x+35}{60x-36}$
11. $\frac{7x^2+42x}{3x^2-6x}\cdot\frac{15x-30}{14x^2+84x}$
12. $\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}\cdot\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x-5}$
13. $\frac{x^2-10x+24}{30+x-x^2}\cdot\frac{x^2-2x-48}{x^2-12x+32}$
14. $\frac{8x^2+10x+3}{4x^2+4x+1}\cdot\frac{6x^2+x-1}{9x^2+9x-4}$
15. $\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}\cdot\frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}$
16. $\frac{x^2+9x+18}{2x^2+9x+9}\cdot\frac{2x^2+7x+6}{4x^2+9x+2}$
17. $\frac{x^3+2x^2-3x}{4x^2+8x+3}\cdot\frac{2x^2+3x}{x^2-x}$
18. $\frac{x^3-27}{a^3-1}\cdot\frac{a^2+a+1}{x^2+3x+9}$
19. $\frac{x^2+5x+6}{4x^2+4x}\cdot\frac{8x+8}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-5x}{x+2}$
20. $\frac{2n^2+5n-3}{n^2-2n-8}\cdot\frac{n^2+4n+4}{6n^2-5n+1}\cdot\frac{3n^2+11n-4}{n^2+5n+6}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División de fracciones algebraicas

Regla para dividir fracciones:

- Primero se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, de lo que resulta el numerador de la fracción solución; el denominador de la fracción solución se obtiene al multiplicar el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda. De preferencia los productos se dejan indicados.
- Se simplifican los términos o factores que sean comunes, en el numerador y denominador, de las fracciones que se van a multiplicar.
- Se multiplican todos los términos restantes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente división: $\frac{m^2}{3n^2} \div \frac{2m}{n^3}$.

Solución

Se efectúan los productos cruzados y se simplifica la expresión

$$\frac{m^2}{3n^2} \div \frac{2m}{n^3} = \frac{(m^2)(n^3)}{3n^2(2m)} = \frac{m^2n^3}{6mn^2} = \frac{mn}{6}$$

2 Simplifica la siguiente división: $\frac{\frac{3x^2}{(x^2+1)^2}}{\frac{x}{(x^2+1)}}$.

Solución

Se realiza el producto de medios por medios y extremos por extremos, para después simplificar al máximo.

$$\frac{\frac{3x^2}{(x^2+1)^2}}{\frac{x}{(x^2+1)}} = \frac{3x^2(x^2+1)}{x(x^2+1)^2} = \frac{3x}{x^2+1}$$

3 Realiza el siguiente cociente y simplifica: $\frac{a^3-a}{2a^2+6a} \div \frac{5a^2-5a}{2a+6}$.

Solución

Se factorizan todos los elementos y se procede a efectuar la simplificación.

$$\frac{a^3-a}{2a^2+6a} \div \frac{5a^2-5a}{2a+6} = \frac{a(a-1)(a+1)}{2a(a+3)} \div \frac{5a(a-1)}{2(a+3)} = \frac{a(a-1)(a+1)(2)(a+3)}{(2a)(5a)(a-1)(a+3)} = \frac{a+1}{5a}$$

4 Simplifica la siguiente operación:

$$\frac{\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(x^2+1)}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Solución

En este caso se tiene una fracción sobre un entero, al que se le agrega la unidad como denominador, para después realizar el producto de medios y extremos, entonces:

$$\frac{\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{(x^2+1)}{1}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

5 Resuelve la siguiente división: $\frac{4x^2-y^2}{2x^2+xy-y^2} \div \frac{6x^2+7xy+2y^2}{3x^2+5xy+2y^2}$.

Solución

Se factoriza cada uno de los factores y se procede a realizar la división

$$\frac{4x^2-y^2}{2x^2+xy-y^2} \div \frac{6x^2+7xy+2y^2}{3x^2+5xy+2y^2} = \frac{(2x+y)(2x-y)}{(2x-y)(x+y)} \div \frac{(3x+2y)(2x+y)}{(3x+2y)(x+y)}$$

$$= \frac{(2x+y)(2x-y)(3x+2y)(x+y)}{(2x-y)(x+y)(3x+2y)(2x+y)} = 1$$

6 Efectúa y simplifica la siguiente operación: $\left(x+4+\frac{2}{x+1}\right) \div \left(x-1-\frac{9}{x-1}\right)$.

Solución

Se resuelven las operaciones dentro de los paréntesis:

$$\left(x+4+\frac{2}{x+1}\right) \div \left(x-1-\frac{9}{x-1}\right) = \left(\frac{x^2+5x+4+2}{x+1}\right) \div \left(\frac{x^2-2x+1-9}{x-1}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+5x+6}{x+1}\right) \div \left(\frac{x^2-2x-8}{x-1}\right)$$

Se factorizan los polinomios resultantes y se resuelve la división:

$$\frac{(x+3)(x+2)}{x+1} \div \frac{(x-4)(x+2)}{x-1} = \frac{(x+3)(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-4)(x+2)} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4}$$

EJERCICIO **57**

Realiza las siguientes operaciones y simplifica al máximo:

1. $\frac{2x^3}{y^2} \div \frac{8x^5}{3y^3}$

2. $\frac{12a^4b^5}{15x^6y^3} \div \frac{4a^2b}{5x^2y^3}$

3. $\frac{\frac{6x^2}{(2x+3)^3}}{\frac{2x^4}{(2x+3)}}$

4. $\frac{\frac{12x^5}{(2x^3+1)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{2x^2}{(2x^3+1)^{\frac{2}{3}}}}$

5. $\dfrac{\dfrac{4x^3}{3x^2-3xy}}{\dfrac{x^2}{x^2-y^2}}$

6. $\dfrac{x^3+x}{x^2-x}\div\dfrac{x^3-x^2}{x^2-2x+1}$

7. $\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}\div\dfrac{x^2+6x-27}{x^2-10x+9}$

8. $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-6x+5}\div\dfrac{x^2+5x-14}{x^2+8x+7}$

9. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}\div\dfrac{x^2+12x+32}{x^2+3x-40}$

10. $\dfrac{4x^2-23x-6}{3x^2-14x+8}\div\dfrac{4x^2+25x+6}{x^2+x-30}$

11. $\dfrac{6x^2-5x+1}{12x^2-x-1}\div\dfrac{4x^2-8x-5}{8x^2+6x+1}$

12. $\dfrac{x^2-16}{x^3-3x^2+9x}\div\dfrac{x^2-x-12}{x^3+27}$

13. $\dfrac{8x^2-2x-3}{16x^3-9x}\div\dfrac{4x^2-1}{4x^2+3x}$

14. $\dfrac{\dfrac{x^3-121x}{x^3-49x}}{\dfrac{x^2-11x}{x+7}}$

15. $\dfrac{\dfrac{x^3+125}{x^2-64}}{\dfrac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}}$

16. $\dfrac{\dfrac{a^2-6a}{a^3+3a^2}}{\dfrac{a^2+3a-54}{a^2+9a}}$

17. $\dfrac{15x^2+7x-2}{25x^3-x}\div\dfrac{6x^2+13x+6}{25x^2+10x+1}$

18. $\left(1+\dfrac{a}{a+b}\right)\div\left(1+\dfrac{2a}{b}\right)$

19. $\left(x+\dfrac{2}{x+3}\right)\div\left(x+\dfrac{3}{x+4}\right)$

20. $\left(n-\dfrac{2n-1}{n^2+2}\right)\div\left(n^2+1-\dfrac{n-1}{n}\right)$

21. $\left(a+b+\dfrac{b^2}{a-b}\right)\div\left(1-\dfrac{b}{a+b}\right)$

22. $\left(1-\dfrac{1}{x^3+2}\right)\div\left(x+\dfrac{1}{x-1}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Combinación de operaciones con fracciones

La simplificación de este tipo de operaciones, en las que se combinan operaciones básicas, se basa en la jerarquización de operaciones de izquierda a derecha, como sigue:

- Divisiones y productos
- Sumas y restas

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa y simplifica la siguiente fracción algebraica

$$\frac{x^2+2x}{x^2+4x+3}\cdot\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}\div\frac{x^2-2x-8}{2x^2-7x-4}$$

Solución

Se factoriza cada uno de los polinomios de la expresión

$$\frac{x^2+2x}{x^2+4x+3}\cdot\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}\div\frac{x^2-2x-8}{2x^2-7x-4}=\frac{x(x+2)}{(x+3)(x+1)}\cdot\frac{(x+3)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}\div\frac{(x-4)(x+2)}{(2x+1)(x-4)}$$

(continúa)

(*continuación*)

Se realiza el producto

$$\frac{x(x+2)}{(x+3)(x+1)}\cdot\frac{(x+3)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\frac{x(x+2)(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+1)(2x+1)(x-1)}=\frac{x(x+2)}{(x+1)(2x+1)}$$

Por último, se realiza la división y se simplifica al máximo:

$$\frac{x(x+2)}{(x+1)(2x+1)}\div\frac{(x-4)(x+2)}{(2x+1)(x-4)}=\frac{x(x+2)(2x+1)(x-4)}{(x+1)(2x+1)(x-4)(x+2)}=\frac{x}{x+1}$$

2 Realiza y simplifica la siguiente fracción:

$$\frac{x^2+6x+5}{x^2+5x+6}\cdot\frac{x^2-3x-10}{x^2-4x-5}-\frac{x}{x+1}$$

Solución

Se factorizan las expresiones y se aplica la jerarquía de las operaciones

$$\frac{(x+5)(x+1)}{(x+3)(x+2)}\cdot\frac{(x-5)(x+2)}{(x-5)(x+1)}-\frac{x}{x+1}=\frac{(x+5)(x+1)(x-5)(x+2)}{(x+3)(x+2)(x-5)(x+1)}-\frac{x}{x+1}$$

$$=\frac{x+5}{x+3}-\frac{x}{x+1}=\frac{(x+5)(x+1)-x(x+3)}{(x+3)(x+1)}$$

$$=\frac{x^2+6x+5-x^2-3x}{(x+3)(x+1)}$$

$$=\frac{3x+5}{(x+3)(x+1)}$$

EJERCICIO 58

Efectúa y simplifica las siguientes expresiones:

1. $\frac{x^2-x-12}{x^2-49}\cdot\frac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\div\frac{x^2-5x-24}{x+5}$
2. $\frac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\cdot\frac{a^2-36}{a^3-1}\div\frac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}$
3. $\frac{6a^2-7a-3}{a^2-1}\div\frac{4a^2-12a+9}{a^2-1}\cdot\frac{2a^2-a-3}{3a^2-2a-1}$
4. $\frac{2t^2+5t+2}{t^2-4t+16}\div\frac{t+2}{t^3+64}\div\frac{2t^3+9t^2+4t}{t+1}$
5. $\frac{2}{x+3}\div\frac{3x+3}{x^2-2x-8}\div\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$
6. $\frac{3x^2+3x}{3x^2-8x+4}\cdot\frac{x^2+2x-8}{x^2+5x+4}-\frac{2x}{2x-1}$
7. $\frac{6x^2-12x}{2x^2+3x-9}\div\frac{2x^2-5x+2}{2x^2+5x-3}-\frac{3}{x+1}$

8. $\dfrac{x^4-27x}{x^2+7x-30}\cdot\dfrac{x^2+20x+100}{x^3+3x^2+9x}\div\dfrac{x^2-100}{x-3}$

9. $\dfrac{8x^2-10x-3}{6x^2+13x+6}\cdot\dfrac{4x^2-9}{3x^2+2x}\div\dfrac{8x^2+14x+3}{9x^2+12x+4}$

10. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+x-2}\div\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-3x-10}\div\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-15}$

11. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}\cdot\dfrac{x^2+3x}{x^2-1}+\dfrac{2x^2-4x}{x^2+x-6}$

12. $\dfrac{x^3-5x^2}{x^3-25x}\div\dfrac{x^2+3x}{x^2+5x+6}+\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8}\cdot\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+5}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fracciones complejas

En una fracción compleja el numerador y el denominador se conforman por operaciones algebraicas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica la expresión $\left(m+\dfrac{m}{n}\right)\div\left(n-\dfrac{1}{n}\right)$.

Solución

Se realizan las operaciones dentro de los paréntesis,

$$\left(m+\frac{m}{n}\right)\div\left(n-\frac{1}{n}\right)=\frac{mn+m}{n}\div\frac{n^2-1}{n}$$

se resuelve la división y se simplifica al máximo:

$$\frac{n(mn+m)}{n(n^2-1)}=\frac{nm(n+1)}{n(n+1)(n-1)}=\frac{m}{n-1}$$

2 Realiza y simplifica la fracción $\dfrac{y-1-\dfrac{5}{y+3}}{y+5-\dfrac{35}{y+3}}$.

Solución

Se resuelve tanto el numerador como el denominador y se factorizan los polinomios resultantes, si es posible

$$\frac{y-1-\dfrac{5}{y+3}}{y+5-\dfrac{35}{y+3}}=\frac{\dfrac{(y-1)(y+3)-5}{y+3}}{\dfrac{(y+5)(y+3)-35}{y+3}}=\frac{\dfrac{y^2+2y-3-5}{y+3}}{\dfrac{y^2+8y+15-35}{y+3}}=\frac{\dfrac{y^2+2y-8}{y+3}}{\dfrac{y^2+8y-20}{y+3}}$$

$$=\frac{\dfrac{(y+4)(y-2)}{y+3}}{\dfrac{(y+10)(y-2)}{y+3}}$$

(*continúa*)

(*continuación*)
Se dividen las fracciones y se simplifica al máximo

$$=\frac{(y+3)(y+4)(y-2)}{(y+3)(y+10)(y-2)}=\frac{y+4}{y+10}$$

3 Efectúa y simplifica: $\dfrac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{b-\dfrac{b-2}{b+1}}}$.

Solución

Se eligen las operaciones secundarias y se reducen hasta simplificar la fracción al máximo:

$$\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{b-\dfrac{b-2}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{\dfrac{b(b+1)-(b-2)}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{\dfrac{b^2+b-b+2}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{\dfrac{b^2+2}{b+1}}}$$

$$=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{(b+1)(b^2+2)}{b^2+2}}=\frac{b-1}{b+2-(b+1)}=\frac{b-1}{1}=b-1$$

4 Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\dfrac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{x-2}$$

Solución

Se resuelve la parte superior de la fracción principal

$$\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-(x+2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x-2)-(x+2)}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-4}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}$$

Luego, la fracción original se escribe como:

$$\frac{\dfrac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{x-2}=\frac{\dfrac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{x-2}=\frac{\dfrac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{x-2}{1}}$$

Se realiza la división de fracciones y la simplificación es:

$$\frac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{3}{2}}}$$

EJERCICIO 59

Simplifica las siguientes fracciones complejas:

1. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$

2. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}}$

3. $1-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{y}{3}-1}}$

4. $\dfrac{m+4+\dfrac{3}{m}}{m-4-\dfrac{5}{m}}$

5. $\dfrac{y^2-\dfrac{1}{y}}{1-\dfrac{1}{y}}$

6. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$

7. $\dfrac{\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{x^2-y^2}{x+y}}{\dfrac{x-y}{y}+\dfrac{y}{x}}$

8. $\dfrac{1-\dfrac{7}{n}+\dfrac{12}{n^2}}{n-\dfrac{16}{n}}$

9. $\dfrac{a-3b-\dfrac{5b^2}{a+b}}{a-2b-\dfrac{4b^2}{a+b}}$

10. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y^2}}{\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{x^2}{y}}$

11. $\dfrac{\left(a-2b+\dfrac{4b^2}{a+3b}\right)\left(a+2b-\dfrac{b^2}{a+2b}\right)}{1+\dfrac{a}{b}}$

12. $\left(1+\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a+b}}\right)\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{4}b-\dfrac{\frac{7}{4}b^2}{2a+3b}\right)$

13. $\dfrac{\dfrac{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{2(2x+3)^{\frac{1}{2}}}}{2x+3}$

14. $\dfrac{2x\left(x^2-5\right)^{\frac{1}{2}}-\dfrac{x^3}{\left(x^2-5\right)^{\frac{1}{2}}}}{x^2-5}$

15. $\dfrac{\dfrac{(3x-1)^{\frac{1}{3}}}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{(3x+1)^{\frac{1}{3}}}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}$

16. $\dfrac{\dfrac{\left(5x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{10x^{\frac{4}{3}}}{3\left(5x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}}{\left(5x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 17

Ecuaciones de primer grado

Reseña HISTÓRICA



A principios del siglo XIX tres matemáticos, Ruffini, Abel y Galois, encararon el problema de resolver una ecuación desde un punto de vista radicalmente diferente.

Más que a Ruffini y Abel, es Evariste Galois a quien le cabe el título de fundador del álgebra moderna.

Galois nació el 25 de octubre de 1811 en Bourg-la Reine, hasta los 12 años de edad lo educó su madre, mujer culta y esclarecida. En 1823 viaja a París para internarse en el Liceo Louis le Grand, institución famosa por el rigor de su disciplina.

A principios de 1827 despierta su interés por la matemática, disciplina a la que de inmediato se dedica por completo, descuidando los estudios de griego, latín, francés, retórica, considerados más importantes.

Galois publicó, en abril de 1829, su primer artículo científico: un teorema sobre las fracciones continuas periódicas. Al mes siguiente presentó a la Academia de Ciencias sus primeras investigaciones sobre las ecuaciones algebraicas de primer grado, trabajo que fue recibido con frialdad y desinterés por Cauchy, el mayor matemático de la época y presidente de la Academia. En ese mismo año el joven matemático entró en la École Préparatoire, institución destinada a formar profesores. Dos meses después era bachiller en letras y en ciencias.

Evariste Galois (1811-1832)

Conceptos generales

Igualdad. Dos cantidades son iguales o equivalentes cuando tienen el mismo valor.

Ejemplos

$(2+3)^2 = 25$ $\quad$ $(4)^2 + (3)^2 = 25$ $\quad$ $\sqrt{625} = 25$

Entonces $(2+3)^2$, $(4)^2 + (3)^2$, $\sqrt{625}$ son expresiones equivalentes ya que todas valen 25
¿Podríamos decir que $x + 3 = 8$ es una igualdad?

Ecuación. Una ecuación es una igualdad con una o varias incógnitas que se representan con letras. Las ecuaciones pueden ser fórmulas que se utilizan para encontrar una magnitud.

Ejemplos

La fórmula $v = \frac{d}{t}$ se utiliza para encontrar la velocidad constante de un móvil del que se conoce la distancia recorrida y el tiempo que empleó en recorrerla.

La fórmula $A = \pi r^2$ se utiliza para encontrar el área de un círculo dada la longitud de su radio.

También existen ecuaciones con expresiones algebraicas, en las que se busca el valor de una variable o representan modelos matemáticos que resuelvan algún problema de la vida real.

Ejemplos

$x + 2 = 8$ $\quad$ $x + y = 6$ $\quad$ $x^2 - 4 = 0$ $\quad$ $\frac{4}{x-2} - \frac{2}{x^2-2} = \frac{5}{x+2}$

Las ecuaciones están formadas de la siguiente manera:

$$1^{\text{er}} \text{ miembro} = 2^{\text{o}} \text{ miembro}$$

Solución de una ecuación. La solución o soluciones de una ecuación son los valores que hacen que la igualdad se cumpla.

Ejemplos

1. Para la ecuación $x + 2 = 10$, la solución es $x = 8$, ya que al sustituir con 8 a la literal x, se obtiene: $8 + 2 = 10$
2. Para la ecuación $x + y = 8$, una solución es $x = 3$, $y = 5$; porque: $3 + 5 = 8$
3. Para la ecuación $x^2 - 4 = 0$, las soluciones son: $x = -2$, $x = 2$ porque:

$$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0,\ (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Grado de una ecuación. El grado de una ecuación se obtiene del término de mayor grado que contenga a la(s) incógnita(s).

Ejemplos

1. La ecuación $2x + 3 = 5$, es de primer grado, porque la incógnita tiene exponente 1
2. La ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$, es de segundo grado, porque la incógnita tiene exponente 2
3. La ecuación $x + y = 6$, es de primer grado, porque las variables tienen exponente 1

A las ecuaciones de primer grado se les llama lineales.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Ecuaciones que se resuelven mediante la aplicación de ecuaciones equivalentes con operaciones elementales (suma, resta, multiplicación o división) a ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de x en la siguiente ecuación: $2x + 3 = 7$.

Solución

Se agrupan los términos que contienen a la incógnita en el primer miembro y las constantes en el segundo, se aplican sumas, restas, multiplicaciones o divisiones, según corresponda.

$$2x + 3 = 7 \quad \rightarrow \quad (2x + 3) - 3 = 7 - 3 \qquad \text{Se resta 3 en ambos miembros}$$
$$2x = 4 \qquad \text{Al simplificar}$$
$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(4) \qquad \text{Se multiplica por } \frac{1}{2}$$
$$\frac{2}{2}x = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

Se comprueba la solución al sustituir en la ecuación el valor de x, y se verifica la igualdad.

$$2(2) + 3 = 7$$
$$4 + 3 = 7$$
$$7 = 7$$

Por tanto, la solución es $x = 2$

2 Encuentra el valor de la incógnita en la ecuación $m - 25 = 3m - 5$.

Solución

$$m - 25 = 3m - 5 \quad \rightarrow \quad m - 3m = -5 + 25 \qquad \text{Se suma 25 y se resta } 3m$$
$$-2m = 20 \qquad \text{Al simplificar}$$
$$m = \frac{20}{-2} \qquad \text{Se divide entre } -2$$
$$m = -10$$

Por tanto, $m = -10$

3 ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $20x - 14 - 11x = 8 - 6x + 2$?

Solución

$$20x - 14 - 11x = 8 - 6x + 2 \quad \rightarrow \quad 20x - 11x + 6x = 8 + 2 + 14$$
$$15x = 24$$
$$x = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$$

Por consiguiente, el conjunto solución es $\left\{\frac{8}{5}\right\}$

Teorema: sea la ecuación lineal $ax = b$

a) Si $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$ es solución única

Demostración:

$ax = b$

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)x = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad 1x = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{b}{a}$$

Supongamos ahora que x_0 es solución, entonces, al sustituir en $ax = b$ obtenemos:

$$ax_0 = b \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}(ax_0) = \frac{1}{a}(b) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{a}\cdot a\right)x_0 = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad x_0 = \frac{b}{a}$$

Por tanto, $x = \frac{b}{a}$ es solución única.

b) Si $a = 0$ pero $b \neq 0$, entonces, $ax = b$ no tiene solución

Demostración:
Sea $a = 0$, entonces, para todo $k \in R$, $ak = 0$ si $b \neq 0$, entonces, $ax \neq 0$, por tanto, k no es solución de $ax = b$

c) Si $a = 0$ y $b = 0$, todo $k \in R$ es solución de $ax = b$

Demostración:
Si $a = 0$, para todo $k \in R$, $ak = 0$, si $b = 0$, entonces, cualquier número real k es solución de $ax = b$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución de la ecuación $2x - 7 - 5x = 11x - 6 - 14x$.

Solución

Al resolver la ecuación se obtiene:

$$2x - 7 - 5x = 11x - 6 - 14x \quad \rightarrow \quad 2x - 5x - 11x + 14x = -6 + 7$$
$$0x = 1$$

El conjunto solución es vacío, ya que todo número multiplicado por cero es cero (ver inciso *b* del teorema).

2 Determina el conjunto solución de la ecuación $3y - 8 + 5y + 6 = 10y - 2 - 2y$.

Solución

$$3y - 8 + 5y + 6 = 10y - 2 - 2y \quad \rightarrow \quad 3y + 5y - 10y + 2y = -2 + 8 - 6$$
$$0y = 0$$

El conjunto solución son todos los números reales, ya que cualquier número multiplicado por cero es cero (ver inciso *c* del teorema).

EJERCICIO **60**

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x + 2 = 5$
2. $y - 4 = 6$
3. $8 - z = 9$
4. $10 - x = 12$
5. $2x - 3 = 5$
6. $3y + 2 = 11$
7. $9x - 6 = 18$
8. $5x + 7 = 3$
9. $1 - 4w = 9$
10. $2 - 7z = 13$
11. $8x - 6 = 6x + 4$
12. $12 + 7x = 2x + 22$
13. $9 - 8y = 27 - 2y$
14. $2z + 9 = z + 1$
15. $3w - 3 = 4w + 11$
16. $10x + 21 = 15 - 2x$
17. $21x - 3 = 3x + 6$
18. $11y - 5y + 6 = -24 - 9y$

19. $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$
20. $-9x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x$
21. $5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y$
22. $16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - 2x$
23. $-12x - 8 - 3x + 10 = 2x - 9 + 6x$
24. $3z - 8 + 6z - 12 = z - 10 + 9z - 13$
25. $7y - 10 + 2y - 8 = 14y - 9 + 8y$
26. $x - 6 - 5x + 10x = 9x - 8 + 3x$
27. $2z - 4 - 8z + 9 = 10z - 6 + z - 12$
28. $9y - 1 - 14y + 8 = y - 9 + 15y - 1$
29. $x - 7 - 12x - 9 + 3x = 14x - 10 - x + 7$
30. $10z - 5 + 7z - 10 + 8z = 2z - 6 + 4z - 8$
31. $3x + 101 - 4x - 33 = 108 - 16x - 100$
32. $14 - 12x + 39x - 18x = 239 - 60x - 6x$
33. $-8x + 48 - 30x - 51x = 3x - 31x + 170$
34. $7x + 5 - 2x + 9x = 14x - 9 + 2x - 11x + 8$
35. $3w + 5 - 7w + 9w - 11w + 13 = 16 - 8w$
36. $6z + 12z - 18 - 5z = -12z + 4z - 11 + z$
37. $10x - 8 + 3x - 7 + x = 20x - 10 - 6x$
38. $5x - 8 - 8x + 10 - 3x = 9 - x + 6 - 5x - 13$
39. $2y + 7 - 8y + 5 - 3y = 14 - 6y - 2 - 3y$
40. $12z - 9 - 10z + 3 - 8z = z - 9 + 3z + 10 - 10z$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Con signos de agrupación y productos indicados

Para resolver este tipo de ecuaciones se suprimen los signos de agrupación o se realizan los productos indicados y se resuelve la ecuación equivalente que se obtuvo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación: $8x - (6x - 9) + (3x - 2) = 4 - (7x - 8)$.

Solución

Se eliminan los signos de agrupación y se resuelve la ecuación equivalente que se obtiene:

$$8x - (6x - 9) + (3x - 2) = 4 - (7x - 8) \quad \rightarrow \quad 8x - 6x + 9 + 3x - 2 = 4 - 7x + 8$$
$$8x - 6x + 3x + 7x = 4 + 8 - 9 + 2$$
$$12x = 5$$
$$x = \frac{5}{12}$$

Por tanto, la solución es: $x = \frac{5}{12}$

2 Encuentra el valor de la incógnita en la siguiente ecuación:

$$7(18 - x) - 6(3 - 5x) = -(7x + 9) - 3(2x + 5) - 12$$

Solución

Se resuelven los productos indicados y se determina el valor de x de resolver la ecuación equivalente:

$$7(18 - x) - 6(3 - 5x) = -(7x + 9) - 3(2x + 5) - 12$$
$$126 - 7x - 18 + 30x = -7x - 9 - 6x - 15 - 12$$
$$-7x + 30x + 7x + 6x = -9 - 15 - 12 - 126 + 18$$
$$36x = -144$$
$$x = \frac{-144}{36} = -4$$

Por consiguiente, $x = -4$

3 Determina el valor de x en la siguiente ecuación:

$$2x-\{3x-(9x+1)-8\}=12x-\{9-[3x-(5-2x)-10]+18x\}$$

Solución

Se suprimen los signos de agrupación y se resuelve la ecuación:

$$2x-\{3x-(9x+1)-8\}=12x-\{9-[3x-(5-2x)-10]+18x\}$$
$$2x-\{3x-9x-1-8\}=12x-\{9-[3x-5+2x-10]+18x\}$$
$$2x-\{3x-9x-1-8\}=12x-\{9-3x+5-2x+10+18x\}$$
$$2x-3x+9x+1+8=12x-9+3x-5+2x-10-18x$$
$$2x-3x+9x-12x-3x-2x+18x=-9-5-10-1-8$$
$$9x=-33 \quad \rightarrow \quad x=-\frac{33}{9}=-\frac{11}{3}$$

Por consiguiente, el valor de x es: $-\frac{11}{3}$

4 Determina el valor de y en la siguiente ecuación:

$$-13y-(y-4)^2+8(2y-3)=8-(y+5)(y-5)-10(y+1)$$

Solución

Se realizan los productos notables, los productos indicados y se resuelve la ecuación:

$$-13y-(y-4)^2+8(2y-3)=8-(y+5)(y-5)-10(y+1)$$
$$-13y-(y^2-8y+16)+8(2y-3)=8-(y^2-25)-10(y+1)$$
$$-13y-y^2+8y-16+16y-24=8-y^2+25-10y-10$$
$$-13y-y^2+8y+16y+y^2+10y=8+25-10+16+24$$
$$21y=63$$
$$y=\frac{63}{21}=3$$

Por tanto, la solución es: $y=3$

EJERCICIO 61

Determina el valor de la incógnita de las siguientes ecuaciones:

1. $x-(2x+1)=8-(3x+3)$
2. $15x-20=6x-(x+2)+(-x+3)$
3. $(5-3x)-(-4x+6)=(8x+11)-(3x-6)$
4. $4(x-2)-5(2x-6)=8(x+1)-3(2x+3)$
5. $7(3x+1)+8(2x-3)=4(3x-1)-7(x-4)$
6. $30w-(-w+6)+(-5w+4)=-(5w+6)+(-8+3w)$
7. $-\{3y+8-[-15+6y-(-3y+2)-(5y+4)]-29\}=-5$
8. $-2y-3-\{-4y+5+[-y+2-(3y-1)+2y-5]\}=-(y-4)$

9. $-2(y-1)+\{-4(y-1)-5[y-2(4-y)+3y]-(y+1)\}=2y-(-5-y)$

10. $w-2[w+5(1-2w)+4w]-(w+3)=-w+3(w+2)+7w$

11. $x-3[2x-(x+1)+5(1-x)]=x+(3x-7)-(x+3)$

12. $7(x-4)^2-3(x+5)^2=4(x+1)(x-1)-2$

13. $5(1-x)^2-6(x^2-3x-7)=x(x-3)-2x(x+5)-2$

14. $(x+1)^3-(x-1)^3=6x(x-3)$

15. $3(x-2)^2(x+5)=3(x+1)^2(x-1)+3$

16. $(x+1)(x+2)(x-3)=(x-2)(x+1)^2$

17. $2x(x-4)-(2x+3)(x-4)=4x(2x-3)-8(1-x)^2$

18. $(3x-2)^3-(3x-4)(6x-5)-45x^2=9x^2(3x-5)-10(x+3)-2(6x-1)(6x+1)$

19. $3x-\{10x-[(3-5x)^2-8]+(5x-3)(5x+4)\}=3(6x^2-4)-9\{3x+(2x-1)(x-3)\}$

20. $12-\{6x+[3x+(x-7)(x+7)]-(2x+3)^2\}=-2x^2+5[(x+1)^2-3(x+6)]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fraccionarias

Cuando aparecen fracciones en la ecuación, se eliminan los denominadores al multiplicar los dos términos de la igualdad por su mínimo común múltiplo.

EJEMPLOS

1 Encuentra el valor de x en la siguiente ecuación: $\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x$.

Solución

Se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores, en este caso 6:

$$\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x \quad\rightarrow\quad 6\left(\frac{x}{6}+5\right)=6\left(\frac{1}{3}-x\right) \quad\rightarrow\quad \frac{6x}{6}+30=\frac{6}{3}-6x$$

Se simplifica

$$x+30=2-6x$$
$$x+6x=2-30$$
$$7x=-28$$
$$x=-\frac{28}{7}$$

Por consiguiente, el resultado es: $x=-4$

2 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{3z}\left(2-\frac{z}{2}\right)-\frac{2}{3}+\frac{1}{4z}\left(10-\frac{5z}{3}\right)=\frac{1}{z}\left(5+\frac{z}{4}\right)$$

Solución

Se eliminan los signos de agrupación,

$$\frac{2}{3z}-\frac{z}{6z}-\frac{2}{3}+\frac{10}{4z}-\frac{5z}{12z}=\frac{5}{z}+\frac{z}{4z} \quad\rightarrow\quad \frac{2}{3z}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2z}-\frac{5}{12}=\frac{5}{z}+\frac{1}{4}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se multiplican ambos miembros por $12z$, y se resuelve la ecuación que resulta.

$$12z\left(\frac{2}{3z}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2z}-\frac{5}{12}=\frac{5}{z}+\frac{1}{4}\right)$$
$$8-2z-8z+30-5z=60+3z$$
$$-2z-8z-5z-3z=60-8-30$$
$$-18z=22$$
$$z=\frac{22}{-18}$$
$$z=-\frac{11}{9}$$

Finalmente: $z=-\dfrac{11}{9}$

3 Determina el valor de y en la ecuación:

$$\frac{1+2y}{1+3y}-\frac{1-2y}{1-3y}=-\frac{3y-14}{1-9y^2}$$

Solución

Se factorizan los denominadores:

$$\frac{1+2y}{1+3y}-\frac{1-2y}{1-3y}=-\frac{3y-14}{(1+3y)(1-3y)}$$

Se multiplica por el mínimo común múltiplo que es: $(1+3y)(1-3y)$ y se simplifica:

$$(1+3y)(1-3y)\left[\frac{1+2y}{1+3y}-\frac{1-2y}{1-3y}=-\frac{3y-14}{(1+3y)(1-3y)}\right]$$
$$(1-3y)(1+2y)-(1+3y)(1-2y)=-(3y-14)$$

Se realizan los productos indicados y se resuelve la ecuación:

$$1+2y-3y-6y^2-(1-2y+3y-6y^2)\ =-3y+14$$
$$1+2y-3y-6y^2-1+2y-3y+6y^2=-3y+14$$
$$-2y=-3y+14$$
$$-2y+3y=14$$
$$y=14$$

4 Encuentra el valor de t en la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{t^2+5t+6}-\frac{5}{t^2+3t+2}=\frac{3}{t^2+4t+3}$$

Solución

Se factorizan los denominadores:

$$\frac{1}{(t+3)(t+2)}-\frac{5}{(t+2)(t+1)}=\frac{3}{(t+3)(t+1)}$$

Se multiplica por $(t+1)(t+2)(t+3)$, se simplifica y resuelve la ecuación:

$$(t+1)(t+2)(t+3)\left[\frac{1}{(t+3)(t+2)}-\frac{5}{(t+2)(t+1)}=\frac{3}{(t+3)(t+1)}\right]$$

$$1(t+1)-5(t+3)=3(t+2)$$

$$t+1-5t-15=3t+6$$

$$t-5t-3t=6+15-1$$

$$-7t=20$$

$$t=-\frac{20}{7}$$

EJERCICIO 62

Resuelve las siguientes ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1. $\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}x=33$
2. $\frac{5}{2}x-\frac{5}{6}x=\frac{4}{3}$
3. $\frac{5}{6}x-\frac{2}{3}x=-\frac{3}{8}$
4. $\frac{5}{9}x-\frac{5}{3}=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$
5. $\frac{4}{3}x-\frac{2}{5}=\frac{7}{5}x-\frac{1}{10}$
6. $\frac{5}{3}x-\frac{1}{6}=x+\frac{1}{4}$
7. $\frac{5x}{6}-\frac{7}{4}+\frac{2x}{3}=2x-\frac{5}{12}+\frac{x}{3}$
8. $\frac{5x-9}{3}+\frac{x}{2}=10$
9. $\frac{x+10}{9}+\frac{x+7}{3}=7$
10. $\frac{x+1}{6}+\frac{x-3}{3}=\frac{5}{6}$
11. $\frac{9x+12}{4}+\frac{3x-2}{2}=\frac{7}{2}x$
12. $\frac{2x+1}{6}-\frac{x-3}{3}=\frac{4x-1}{3}+\frac{x-6}{2}$
13. $\frac{3x-2}{5}-\frac{2x+1}{10}=\frac{6x-3}{2}-4$
14. $\frac{5}{6}(x+9)+\frac{3}{4}(x+1)-\frac{7}{9}=8$
15. $\frac{1}{2}(z-1)-(z-3)=\frac{1}{3}[z+3]+\frac{1}{2}$
16. $\frac{4}{3x}+\frac{7}{4}=6-\frac{5}{2x}$
17. $\frac{1}{4}+\left(2z-\frac{3z-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{z+2}{6}\right)-2z$
18. $\frac{3}{4}\left(3-\frac{x}{9}\right)-\frac{1}{6}\left(1-\frac{x}{3}\right)=1-\left(x-\frac{3}{2}\right)$
19. $\frac{2}{x}-\frac{4}{5}=\frac{3}{x}$
20. $\frac{3}{2x}-\frac{7}{5}=\frac{4}{5x}-\frac{5}{2}$
21. $\frac{3}{5x}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2x}=\frac{7}{5}-\frac{9}{4x}$
22. $\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{5x}=\frac{4}{5x^2}-\frac{7}{4x}$
23. $\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{5}{3x^2}-\frac{6}{x}$
24. $\frac{7y-1}{3}-\frac{5-2y}{2y}-\frac{4y-3}{4}=\frac{1+4y^2}{3y}$
25. $\frac{2x+7}{3}-\frac{2(x^2-4)}{5x}=\frac{4x^2-6}{15x}+\frac{7x^2+6}{3x^2}$
26. $\frac{3}{x-5}=\frac{4}{x+5}$
27. $\frac{4}{3x-2}=\frac{6}{2x+1}$
28. $\frac{5}{z-4}-\frac{2}{z+4}=0$
29. $\frac{3}{4x^2-1}-\frac{4}{2x+1}=\frac{5}{2x-1}$
30. $\frac{4}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}$
31. $\frac{2}{z^2-4z-12}-\frac{1}{z^2-3z-18}=\frac{4}{z^2+5z+6}$
32. $\frac{2}{2y^2+7y+3}-\frac{1}{2y^2+11y+5}=\frac{1}{y^2+8y+15}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Con valor absoluto

En estas ecuaciones se aplica la definición del valor absoluto.

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si} \quad a < 0 \\ a & \text{si} \quad a \geq 0 \end{cases}$$

Para resolver una ecuación con valor absoluto, se tiene que si $|x| = a$, su solución está dada por:

$$x = a \qquad \text{o} \qquad -x = a$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación: $|6 - 3x| = 9$.

Solución

Se aplica la definición y se obtienen dos ecuaciones, las cuales se resuelven por separado:

$$\begin{aligned} 6 - 3x &= 9 \\ -3x &= 9 - 6 \\ -3x &= 3 \\ x &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -(6 - 3x) &= 9 \\ -6 + 3x &= 9 \\ 3x &= 9 + 6 \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Por consiguiente, las soluciones para esta ecuación son: $x = -1$ o $x = 5$

2 Encuentra el conjunto solución de: $|3x - 1| = 2x + 5$.

Solución

Se aplica la definición y se resuelven las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 2x + 5 \\ 3x - 2x &= 5 + 1 \\ x &= 6 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -(3x - 1) &= 2x + 5 \\ -3x + 1 &= 2x + 5 \\ -3x - 2x &= 5 - 1 \\ -5x &= 4 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución es: $\left\{-\frac{4}{5}, 6\right\}$

3 Determina el conjunto solución de: $\left|\frac{x+3}{x}\right| = 2$.

Solución

Se aplica la definición y se resuelven las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x} &= 2 \\ x + 3 &= 2x \\ x - 2x &= -3 \\ -x &= -3 \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad -\left(\frac{x+3}{x}\right) = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{x+3}{x} &= -2 \\ x + 3 &= -2x \\ x + 2x &= -3 \\ 3x &= -3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el conjunto solución es $\{-1, 3\}$

4 Determina el conjunto solución de $\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right|=2$.

Solución

Se factorizan las expresiones, se simplifica y se aplica la definición:

$$\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right|=2 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\right|=2 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{x-2}{x+3}\right|=2$$

$$\frac{x-2}{x+3}=2 \qquad\qquad -\left(\frac{x-2}{x+3}\right)=2 \rightarrow \frac{x-2}{x+3}=-2$$

$$\begin{aligned} x-2&=2(x+3) \\ x-2&=2x+6 \\ x-2x&=6+2 \\ -x&=8 \\ x&=-8 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x-2&=-2(x+3) \\ x-2&=-2x-6 \\ x+2x&=-6+2 \\ 3x&=-4 \\ x&=-\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución es: $\left\{-8, -\frac{4}{3}\right\}$

EJERCICIO **63**

Encuentra el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones:

1. $|x+1|=8$
2. $|3-2y|=5$
3. $|3m+4|=8$
4. $|5x-1|=14$
5. $|4-2y|=4$
6. $|-2m-5|=1$
7. $\left|x+\frac{1}{2}\right|=2$
8. $\left|\frac{m-1}{2m+1}\right|=0$
9. $|8x+2|=2-x$
10. $|2x-5|=x+2$
11. $\left|\frac{x+2}{5}\right|=\frac{1}{15}$
12. $\left|\frac{x}{3}-1\right|=\frac{x}{6}+2$
13. $\left|\frac{3x-2}{5}\right|=\frac{1}{2}-\frac{x}{10}$
14. $\left|\frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$
15. $\left|\frac{1}{x}-\frac{3}{4}\right|=2$
16. $\left|\frac{x}{x-3}\right|=1$
17. $\left|\frac{x+6}{x-2}\right|=5$
18. $\left|\frac{3x-1}{x}\right|=1$
19. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}\right|=4$
20. $\left|\frac{3x}{x^2-7x}\right|=8$
21. $\left|\frac{x^3+27}{x^2-3x+9}\right|=6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Con literales

En estas ecuaciones las incógnitas se representan con las letras x, y, z, mientras que las letras a, b, c, d, m y n, se utilizan como constantes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de x en la ecuación: $8abcx - ab = 8abx + 1$.

Solución

$8abcx - ab = 8abx + 1$

$8abcx - 8abx = 1 + ab$ Se agrupan términos en x

$x(8abc - 8ab) = 1 + ab$ Se factoriza y se despeja

$$x = \frac{1+ab}{8abc - 8ab}$$

2 Determina el valor de y en la ecuación: $a - \frac{m+n}{y} = b - \frac{m-n}{y}$.

Solución

$$a - \frac{m+n}{y} = b - \frac{m-n}{y}$$

$$y\left[a - \frac{m+n}{y} = b - \frac{m-n}{y}\right]$$ Se eliminan los denominadores

$ay - (m+n) = by - (m-n)$

$ay - m - n = by - m + n$

$ay - by = -m + n + m + n$ Se agrupan términos

$y(a - b) = 2n$ Se factoriza

$$y = \frac{2n}{a-b}$$

3 Resuelve la ecuación $1 + \frac{b}{z} = \frac{b}{a} + \frac{a}{z}$; para z.

Solución

Se multiplica la ecuación por az, para eliminar los denominadores:

$$az\left[1 + \frac{b}{z} = \frac{b}{a} + \frac{a}{z}\right]$$

$az + ab = bz + a^2$

$az - bz = a^2 - ab$ Se agrupan los términos con z

$z(a - b) = a(a - b)$ Se factoriza en ambos miembros y se despeja z

$$z = \frac{a(a-b)}{(a-b)}$$ Se simplifica

$z = a$

EJERCICIO 64

Resuelve las siguientes ecuaciones para las incógnitas x, y o z, según sea el caso:

1. $2b(2a - x) = x(b - a) + a(x + b)$
2. $y^2 + a^2 = (a + y)^2 - a(a + 1)$
3. $a(x + b) - (x + a)^2 = -x^2$
4. $a(b - y) - a(b - 1) = a(ay - b)$
5. $\frac{x-m}{x-n} = \left(\frac{2x-m}{2x-n}\right)^2$
6. $\frac{x-m}{n} = 2 - \frac{x-n}{m}$
7. $\frac{x+a}{a} - \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{x+b}{b} - 2$
8. $(y-m)^2 + (m-n)^2 - (y-n)^2 = 0$
9. $(z+m)^3 + (z-m)^3 = 2(z^3 + 6m^3)$
10. $\frac{z+a}{a-b} + \frac{z-a}{a+b} = \frac{z+b}{a+b} - \frac{z-b}{a-b}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Para resolver los siguientes problemas debes tomar en cuenta la relación entre objetos, personas, etc., para establecer una incógnita y un modelo matemático en lenguaje algebraico que al resolverlo dé el valor de dicha incógnita y, por tanto, la solución del problema.

Problemas sobre números

1 La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en ocho. Encuentra los números.

Solución

Datos: número mayor: $x + 8$
Número menor: x

Planteamiento:

$$x + (x + 8) = 106 \quad \text{la suma de dos números es 106}$$
$$2x + 8 = 106$$
$$2x = 106 - 8$$
$$2x = 98$$
$$x = \frac{98}{2}$$
$$x = 49$$

Por consiguiente, el número mayor es 49 + 8 = 57 y el menor es 49

2 La suma de tres números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Determina los números.

Solución

Datos:

Mayor: x Medio: $x - 32$ Menor: $x - 65$

Planteamiento:

$$x + (x - 32) + (x - 65) = 200 \quad \text{la suma de los tres números es 200}$$
$$3x = 200 + 32 + 65$$
$$3x = 297$$
$$x = \frac{297}{3}$$
$$x = 99$$

Por tanto, los números buscados son: Mayor = 99 Medio = 67 Menor = 34

Para los siguientes problemas se utiliza la notación desarrollada de un número. Por ejemplo, en el número $372 = 3(100) + 7(10) + 2$, 3 es el dígito de las centenas, 7 el de las decenas y 2 el de las unidades.

3 En un número de dos dígitos, el dígito de las decenas es 3 unidades menor que el de las unidades. Si el número excede en 6 al cuádruplo de la suma de sus dígitos, halla el número.

Solución

Datos:

Dígito de las unidades: x
Dígito de las decenas: $x - 3$
Número: $10(x - 3) + x$

Planteamiento:

Número = 4(suma de los dígitos) + 6
$10(x - 3) + x = 4(x + x - 3) + 6$

Se resuelve la ecuación:

$$10x - 30 + x = 4x + 4x - 12 + 6$$
$$10x + x - 4x - 4x = -12 + 6 + 30$$
$$3x = 24$$
$$x = 8$$

El dígito de las unidades es 8 y el de las decenas es 5, por tanto, el número es 58.

4 La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 9. Si el número se divide por el dígito de las decenas, el cociente es 12. Encuentra el número.

Solución

Datos:

Dígito de las unidades: x

Dígito de las decenas: $9 - x$

Número: $10(9 - x) + x$

Planteamiento:

$$\frac{\text{Número}}{\text{Dígito de las decenas}} = 12$$

$$\frac{10(9 - x) + x}{9 - x} = 12$$

Resolviendo la ecuación:

$$10(9 - x) + x = 12(9 - x)$$
$$90 - 10x + x = 108 - 12x$$
$$-10x + x + 12x = 108 - 90$$
$$3x = 18$$
$$x = 6$$

El dígito de las unidades es 6 y el de las decenas es 3, por tanto, el número es 36

EJERCICIO **65**

Resuelve los siguientes problemas:

1. La suma de tres números enteros consecutivos es 312. Encuentra dichos números.
2. La diferencia de dos números es 17 y la suma de ambos es 451. Determina los números.
3. La suma de tres números enteros pares consecutivos es 276. Determina los números.
4. La suma de tres números enteros impares consecutivos es 45. Encuentra los números.
5. La diferencia de dos números es 36 y un medio del mayor excede en dos al menor. Determina los números.
6. La diferencia de dos números es 42 y los dos quintos del mayor equivalen al menor. ¿Cuáles son los números?
7. Un número excede en seis a otro y el doble del mayor equivale al triple del menor. Encuentra los números.

8. Un número excede en 4 a otro y la tercera parte del mayor equivale a la mitad del menor. Determina los números.
9. El exceso de un número sobre 20 es igual a las tres cuartas partes del mismo número. ¿Cuál es el número?
10. El exceso de 30 sobre un número es igual a las dos terceras partes del número, más 10 unidades. ¿Cuál es el número?
11. La suma de dos números es 10 y la diferencia de sus cuadrados es 40. ¿Cuáles son los números?
12. La suma de dos números y la diferencia de sus cuadrados es 11. ¿Cuáles son los números?
13. El cuadrado del exceso de 12 sobre un número, menos la mitad del número, es igual al cuadrado del número, menos los 13 medios del número. ¿Cuál es el número?
14. Un número es el doble de otro, si ambos se aumentan en 6, el triple del mayor equivale a cinco veces el menor. Encuentra los números.
15. Un número es la tercera parte de otro, si ambos se aumentan en 10, el mayor será el doble del menor. Determina los números.
16. La suma de tres números es 45, el mayor excede en 5 al mediano y en 10 al menor. Encuentra los números.
17. La suma de dos números es 60 y el mayor equivale cinco veces al menor aumentado en 30. Determina los números.
18. La suma de dos números es 23 y el doble del mayor excede en 6 al triple del menor. ¿Cuáles son los números?
19. La diferencia de dos números es 8 y si se divide el doble del mayor más dos entre el menor, se obtiene como cociente 5. Encuentra los números.
20. Dos números están en la relación 3:4 y el mayor equivale al menor aumentado en 8. Determina los números.
21. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es igual a 8. Si los dígitos se invierten, el número resultante excede en 11 a las seis quintas partes del número original. ¿Cuál es el número?
22. En un número de dos cifras, el dígito de las decenas excede en 2 al de las unidades. Si al número se resta 4, el resultado es el séxtuplo de la suma de sus dígitos. Determina el número.
23. En un número de dos cifras el dígito de las decenas es 4 menos que el dígito de las unidades. Si los dígitos se invierten, el número resultante es el triple más 6 del número original. Encuentra el número.
24. La suma de los dígitos de una cantidad de dos cifras es 9. Si los dígitos se invierten, el número que resulta excede en 9 al número original, ¿cuál es el número?
25. La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede al de las unidades en 5 y las dos terceras partes de la suma de sus cifras es 6. ¿Cuál es el número?
26. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 11. Si el número supera en 5 al triple de la suma de sus dígitos, ¿cuál es el número?
27. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 9. Si se resta 18 al número formado al invertir el orden de los dígitos del número original, el resultado es la mitad del número original, determina el número.
28. En una cantidad de dos dígitos, el número que ocupa el lugar de las decenas es la mitad del dígito que ocupa el lugar de las unidades. El mismo número es igual a la suma de ocho veces el dígito de las decenas, más cuatro veces el de las unidades reducido en dos. ¿Cuál es la cantidad?
29. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 16 y el cociente del número original con el número que resulta al invertir los dígitos es uno, con un residuo de 18. ¿Cuál es el número?
30. En un número de dos cifras, el dígito de las unidades equivale a las $\frac{2}{3}$ partes del dígito de las decenas. Si el número se divide entre la suma de sus dígitos, el cociente es 6 y el residuo 6, halla los números.
31. En un número de tres cifras, el dígito de las unidades excede en tres al de las centenas y la suma de los tres dígitos es 7. Si se invierten los dígitos de las decenas y las centenas el número resultante excede en 90 al original. Encuentra el número.
32. En un número de tres cifras, el dígito de las decenas excede en 2 al de las unidades y en 4 al de las centenas. Si se invierten el dígito de las unidades y el de las centenas, el número que resulta es 66 unidades menor que el doble del número original. ¿Cuál es el número?

33. En un número de tres cifras el dígito de las decenas es la mitad del dígito de las unidades, mientras que el de las centenas es el sucesor del dígito de las decenas. Si se intercambia el dígito de las decenas por el de las centenas el número obtenido es 44 unidades menor que 30 veces la suma de los dígitos. Determina el número.


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre edades

1 La edad de Carla excede en 3 años a la de Daniel y el doble de la edad de Carla más 12 años equivale al triple de la de Daniel. Determina ambas edades.

Solución

Datos:

Edad de Carla: x
Edad de Daniel: $x - 3$

Planteamiento:

2(Edad de Carla) + 12 años = 3(Edad de Daniel)

$$2x + 12 = 3(x - 3)$$

Se resuelve la ecuación:

$$2x + 12 = 3(x - 3) \quad \rightarrow \quad 2x + 12 = 3x - 9$$
$$2x - 3x = -9 - 12$$
$$-x = -21$$
$$x = 21$$

Por tanto, Carla tiene 21 años y Daniel 18.

2 La edad de Antonio es el doble de la edad de Ramiro y dentro de 6 años será de $\frac{5}{3}$. ¿Cuáles son sus edades?

Solución

Datos:	Edades actuales:	Dentro de 6 años:
Antonio	$2x$	$2x + 6$
Ramiro	x	$x + 6$

Planteamiento:

$$2x + 6 = \frac{5}{3}(x + 6)$$

Resolvemos la ecuación:

$$3(2x + 6) = 5(x + 6)$$
$$6x + 18 = 5x + 30$$
$$6x - 5x = 30 - 18$$
$$x = 12$$

Finalmente, la edad de Ramiro es 12 años y la de Antonio es 24

EJERCICIO 66

Resuelve los siguientes problemas:

1. La suma de las edades de Andrés, Carlos y Rodolfo es de 90 años. La edad de Andrés excede en 4 años a la edad de Carlos y en 11 a la de Rodolfo. Determina las edades de los tres.
2. La edad de Fabiana es la tercera parte de la edad de Hilda y la edad de Cecilia es el doble de la edad de Fabiana. Si la suma de sus edades es de 72 años, determina la edad de Cecilia.
3. La edad de Tania excede en 6 a la de Luz, y la edad de María es la semisuma de las edades de Tania y Luz. Si la suma de sus edades es 42, determina las edades de Tania, Luz y María.
4. Carlos tiene 18 años y Juan 42, ¿en cuántos años la edad de Juan será el doble de la de Carlos en ese entonces?

5. La edad de Carlos es el triple de la de Mauricio y dentro de 10 años será el doble. Determina las edades actuales de Carlos y Mauricio.
6. La edad actual de Bárbara es la mitad de la de Patricia. Si dentro de 20 años la edad de Patricia superará en 8 la de Bárbara, determina las edades actuales.
7. Ignacio tiene 70 años y Álvaro 28. ¿Hace cuánto tiempo la edad de Ignacio era el triple de la de Álvaro?
8. Hace 6 años la edad de Alejandra era el triple de la de Omar y dentro de 4 años será el doble. Determina sus edades actuales.
9. Gabriela le dice a Samanta: "Si a mi edad le restas 4 años y a la de Angélica 12 nuestras edades serían iguales, ¿cuántos años tengo si mi edad es la mitad de la de Angélica?"
10. Héctor le dice a María: "Mi abuelo es 40 años más grande que yo y un cuarto de la suma de nuestras edades equivale a mi edad. ¿Cuántos años tengo?"
11. La edad de Guillermo excede en 12 a la de Patricia y hace 7 años la edad de Patricia era $\frac{3}{4}$ de la edad de Guillermo. Halla las edades de Guillermo y Patricia hace 7 años.
12. La edad de Camilo supera en 20 años a la de Joaquín y equivale a $\frac{3}{2}$ de la edad de Julián. Si la suma de las edades de Camilo, Joaquín y Julián es de 60 años, ¿cuáles son sus edades?
13. La edad de Iván es $\frac{3}{5}$ de la de Antonio y hace 5 años era la mitad, determina ambas edades.
14. La edad de Luciana son los tres quintos de la edad de Mariana, si dentro de 10 años Luciana tendrá siete décimos de la edad que tenga Mariana en ese entonces, ¿cuántos años tiene Luciana?
15. Hace 5 años la edad de Juan Carlos era dos tercios de la de Daniel y dentro de 5 años será cuatro quintos. Halla las edades actuales.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre mezclas

1 Un tanque contiene 80 litros de agua al 5% de sal. ¿Cuánta agua deberá agregarse para tener agua al 2% de sal?

Solución

Datos:



Planteamiento:
Éste se obtiene con la cantidad de sal de cada recipiente:

$$5\% \text{ de } 80 = 2\% \text{ de } (80 + x)$$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{5}{100}(80) = \frac{2}{100}(80 + x) \quad \rightarrow \quad 5(80) = 2(80 + x)$$

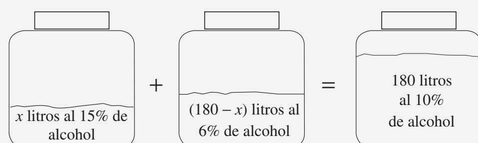
$$400 = 160 + 2x$$
$$400 - 160 = 2x$$
$$240 = 2x$$
$$120 = x$$

Esto significa que se deberán agregar 120 litros de agua para obtener agua al 2% de sal.

2 ¿Cuántos litros de una solución al 15% de alcohol se deben agregar a otra al 6% para obtener 180 litros de una nueva solución al 10% de alcohol?

Solución

Datos:



Planteamiento:
Éste se obtiene con la cantidad de alcohol de cada recipiente:

$$15\% \text{ de } x + 6\% \text{ de } (180 - x) = 10\% \text{ de } 180$$

Planteamos la ecuación y la resolvemos:

$$\frac{15}{100}x + \frac{6}{100}(180 - x) = \frac{10}{100}(180) \quad \rightarrow \quad 15x + 6(180 - x) = 10(180)$$

$$15x + 1\,080 - 6x = 1\,800$$
$$9x = 720$$
$$x = 80$$

Se deben combinar 80 litros al 15% de alcohol con 100 litros al 6% para obtener 180 litros al 10% de alcohol.

EJERCICIO 67

Resuelve los siguientes problemas:

1. A 120 litros de agua azucarada al 3%, ¿cuánta agua se debe evaporar para aumentar su concentración a 5%?
2. A 80 litros de agua al 1.5% de sal, ¿cuánta agua deberá agregarse para disminuir su concentración al 1%?
3. ¿Cuánto ácido clorhídrico se debe agregar a 120 gramos de una solución al 60% del ácido para obtener una nueva solución con 70%?
4. Si se tienen 120 litros de una solución que contiene azúcar al 5%, ¿qué cantidad de agua se debe agregar para obtener una solución al 2%?
5. De 50 litros de agua al 4% de sal, ¿qué cantidad de agua se debe evaporar para obtener una nueva solución al 5%?
6. Un radiador contiene 1.5 litros de una mezcla de agua y anticongelante. Si 30% de la mezcla es anticongelante, ¿cuántos litros de anticongelante puro se deben añadir para que en la nueva mezcla represente 50%?
7. Se tienen 18 onzas de una mezcla de agua hervida y leche de fórmula al 20%. Si se desea una mezcla al 15% de leche de fórmula, ¿cuántas onzas de agua hervida hay que agregar?
8. En una empresa que fabrica material médico se utiliza alcohol etílico al 10% para limpiar las áreas de producción. Si al almacén llega un contenedor de 20 litros con alcohol etílico al 15%, ¿qué cantidad de agua se debe agregar para poder obtener el alcohol al 10%?
9. Un farmacéutico debe preparar 75 ml de una solución con un ingrediente activo al 2%. Si sólo tiene en existencia soluciones al 4 y 1%, ¿cuánto de cada solución deberá mezclar para la elaboración de la nueva solución al 2%?
10. Se requieren 100 ml de una solución al 3.5% de alcohol, si sólo se tienen disponibles soluciones al 5 y 2%, ¿qué cantidad de cada solución deberá mezclarse para obtener la solución requerida?
11. ¿Cuántos litros de una solución de alcohol al 30% deben combinarse con otra al 3% para obtener 30 litros de una nueva solución al 12%?

12. Mario quiere mezclar una aleación de plata al 30%, con otra al 80% para lograr una nueva aleación al 60%. Si hay 30 onzas más de la aleación al 80% que de la de 30%, ¿cuántas onzas hay de cada aleación?
13. Una planta procesadora de alimentos dispone de dos tipos de mermelada, una con 56% y otra con 80% de azúcar. Si desea producir 2 400 litros de mermelada al 70% de azúcar, ¿cuánta de cada tipo deberá utilizar?
14. Se mezclan 12 000 gramos de una aleación de cobre con 8 000 gramos de otra que contiene 30% menos que la primera, y se obtiene una aleación con 80% de cobre, ¿qué porcentaje de cobre hay en cada aleación?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre monedas

En este tipo de problemas se toma en cuenta que el producto del número de billetes, monedas, etc., por su denominación nos da el valor monetario.

1 Carmen tiene \$110 en monedas de \$10 y \$5, el número de monedas de \$10 excede en 2 a las de \$5, ¿cuántas monedas de \$10 y de \$5 tiene Carmen?

Solución

Datos:
Número de monedas de \$10: x
Número de monedas de \$5: $x - 2$
Planteamiento:
La suma de los productos del número de monedas por la denominación de la moneda nos da el total:

$$\text{(denominación) (monedas de \$10) + (denominación) (monedas de \$5) = total}$$
$$10x + 5(x - 2) = 110$$

Resolución:

$$10x + 5(x - 2) = 110 \quad \rightarrow \quad 10x + 5x - 10 = 110$$
$$10x + 5x = 110 + 10$$
$$15x = 120$$
$$x = 8$$

Carmen tiene 8 monedas de \$10 y 6 monedas de \$5.

2 Carla retira del banco \$5 000, en billetes de \$500, \$200 y \$100. Si el número de billetes de \$200 excede en 3 a los de \$100, y el número de billetes de \$100 es el doble de los de \$500, ¿cuántos billetes de cada denominación recibió Carla?

Solución

Datos:
Billetes de \$200: x
Billetes de \$100: $x - 3$
Billetes de \$500: $\frac{x-3}{2}$

Planteamiento:

$$200x + 100(x - 3) + 500\left(\frac{x-3}{2}\right) = 5\,000$$

Se resuelve la ecuación:

$$200x + 100(x - 3) + 250(x - 3) = 5\,000$$
$$200x + 100x - 300 + 250x - 750 = 5\,000$$
$$200x + 100x + 250x = 5\,000 + 300 + 750$$
$$550x = 6\,050$$
$$x = 11$$

Carla recibió 11 billetes de \$200, 8 de \$100 y 4 de \$500.

EJERCICIO 68

Resuelve los siguientes problemas:

1. Marcos ahorró \$3 270 en monedas de \$10, \$5 y \$2. Si el número de monedas de \$10 excede en 20 a las de \$5 y en 15 a las de \$2, ¿cuántas monedas de \$5 pesos tiene Marcos?
2. Paulina tiene \$9 300 en billetes de \$1 000, \$500 y \$200. Si el número de billetes de \$500 excede en 2 a los de \$1 000 y en 3 a los de \$200, ¿cuántos billetes de cada denominación tiene Paulina?
3. Andrés tiene 30 monedas de \$5 y \$10. Si en total dispone de \$200, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?
4. Juan tiene 400 monedas de 50¢ y \$1. Si en total dispone de \$350, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?
5. Se desea repartir \$210 en monedas de \$20, \$10 y \$5, de tal forma que el número de monedas de cada denominación sea el mismo. ¿Cuántas monedas se necesitan de cada denominación?
6. Se desea tener \$2 600 en billetes de \$200, \$100 y \$50, de tal manera que el número de billetes de mayor denominación sea uno más que los de mediana denominación y dos más que los de menor denominación, ¿cuántos billetes de cada denominación se tendrá?
7. Gloria tiene el triple de monedas de \$5 que de \$10 y 10 monedas más de \$2 que de \$5. Si en total dispone de \$392, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?
8. Iván da a su hijo \$90 en monedas de \$2 y 50¢, si el número de monedas de \$2 es la mitad del número de monedas de 50¢, ¿cuántas monedas de \$2 pesos le da a su hijo?
9. Fabián tiene 12 monedas de \$5 y 33 de \$2, al llegar el día domingo su papá le da el doble número de monedas de \$2 que de \$5, Fabián se da cuenta que tiene la misma cantidad de dinero en monedas de \$2 que de \$5, ¿cuántas monedas de \$2 y de \$5 le dio su papá?
10. Sergio es conductor de un transporte colectivo y cambia en el banco \$795 por monedas de \$5, \$2, \$1 y de 50¢. Al separar las monedas de acuerdo con su denominación se da cuenta que el número de monedas de \$5 es la tercera parte del número de monedas de \$2, la mitad de las de \$1 y el doble de 50¢, ¿cuántas monedas de \$5 tiene?
11. Ricardo cambia un cheque de \$6 400 por billetes de \$200, \$100, \$50 y \$20, y le pide al cajero que el número de billetes de \$200 sea la mitad de los de \$100, la cuarta parte de los de \$50 y la décima parte de los de \$20, ¿cuántos billetes de \$200 recibirá?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre costos

1 Sandra pagó \$66 por una pasta dental, un jabón y un champú. Si el costo de la pasta excede en \$15 al del jabón y en \$3 al del champú, determina el costo de cada uno de los artículos.

Solución

Datos:
Costo de la pasta para dientes: x
Costo del jabón: $x - 15$
Costo del champú: $x - 3$

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$$x + (x - 15) + (x - 3) = 66 \quad \rightarrow \quad 3x - 18 = 66$$
$$3x = 66 + 18$$
$$3x = 84$$
$$x = \frac{84}{3}$$
$$x = 28$$

Por tanto, los costos de los artículos son: pasta dental \$28, jabón \$13, champú \$25.

2 Cierta escuela pidió el presupuesto para la fotografía de graduación de un grupo de 30 alumnos. Al momento de realizar el trato con el estudio fotográfico se avisa que serán 10 alumnos más, si el estudio respeta el precio total y disminuye en \$50 el costo de la fotografía por persona, ¿cuál hubiese sido el costo x de la fotografía por alumno para el grupo de 30 alumnos?

Solución

Datos:
El costo total para un grupo de 30 alumnos es: $30x$
El costo total para un grupo de 40 alumnos es: $40(x-50)$
Debido a que el costo total es el mismo, entonces:

$$30x = 40(x-50)$$

Se resuelve la ecuación:

$$30x = 40x - 2\,000 \quad \rightarrow \quad 30x - 40x = -2\,000$$
$$-10x = -2\,000$$
$$x = \frac{-2000}{-10}$$
$$x = 200$$

Por tanto, el costo de la fotografía para un grupo de 30 alumnos es de \$200 por cada uno.

3 El costo de producción por ejemplar de una revista semanal es de 28 centavos. El ingreso del distribuidor es de 24 centavos por copia más 20% de los ingresos por concepto de publicidad anunciada en la revista cuando sobrepasan las 3 000 copias. ¿Cuántas copias deben publicarse y venderse cada semana para obtener utilidades semanales de \$1 000?

Solución

Sea x el número de ejemplares, el 20% de los ingresos es $\frac{20}{100}\left(\frac{24}{100}x\right) = \frac{6}{125}x$ cuando sobrepasan las 3 000 copias

Costo total por semana = \$ $\frac{28}{100}(x+3\,000)$

Ingreso total por semana = \$$\left[\frac{24}{100}(x+3\,000)+\frac{6}{125}x\right]$

Se sabe que:

$$\text{Utilidad} = \text{Ingresos} - \text{Costos}$$

Por tanto,

$$\left[\frac{24}{100}(x+3\,000)+\frac{6}{125}x\right]-\frac{28}{100}(x+3\,000)=1\,000$$

Se resuelve la ecuación:

$$500\left\{\left[\frac{24}{100}(x+3\,000)+\frac{6}{125}x\right]-\frac{28}{100}(x+3\,000)=1\,000\right\}$$
$$500\left\{-\frac{4}{100}(x+3\,000)+\frac{6}{125}x=1\,000\right\}$$
$$-20(x+3\,000)+24x=500\,000$$
$$-20x-60\,000+24x=500\,000$$
$$4x=500\,000+60\,000$$
$$x=\frac{560\,000}{4}$$
$$x=140\,000$$

El distribuidor deberá vender 140 000 ejemplares para obtener utilidades de \$1 000 semanales.

EJERCICIO 69

Resuelve los siguientes problemas:

1. Julio pagó por un traje, una camisa y unos zapatos, \$2 700. Si la camisa cuesta la sexta parte del traje y los zapatos cuestan el doble de la camisa, ¿cuál es el precio de los zapatos?
2. Alejandra compró una chamarra, una blusa y un pantalón. El pantalón costó la mitad de la chamarra y la blusa las tres décimas partes del costo del pantalón. Si en total pagó \$1 320, ¿cuál fue el costo de cada prenda?
3. Adriana pagó por su reinscripción, colegiatura y un examen extraordinario, \$6 400. Si el examen cuesta las dos quintas partes de la inscripción y las dos novenas partes de la colegiatura, ¿cuánto paga de colegiatura?
4. Una empresa compró automóviles para tres de sus gerentes. El primer automóvil costó el doble del segundo más \$25 000 y el tercero \$18 000 menos que el primero. Si la empresa invirtió \$432 000, ¿cuál es el precio de cada automóvil?
5. Jazmín ganó el martes el doble de lo que ganó el lunes; el miércoles, el doble de lo que ganó el martes; el jueves, el doble de lo que ganó el miércoles; el viernes, \$30 menos que el jueves, y el sábado \$10 más que el viernes. Si en los seis días Jazmín ganó \$1 500, ¿cuánto ganó el miércoles?
6. Una computadora y un escritorio costaron \$15 100, si por el escritorio se pagó la sexta parte de la computadora más \$400, determina el precio de cada uno.
7. En el curso de álgebra un profesor pidió resolver 16 problemas al alumno más destacado de la clase, con la condición de que por cada problema resuelto correctamente el estudiante recibiría \$30, y por cada problema erróneo, perdería \$10. Después de resolver los 16 problemas, el profesor le pagó \$240. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente el alumno?
8. Luis dice: "Si triplico mi dinero y pago \$2 600 de una deuda me quedarían \$13 000". ¿Cuánto dinero tiene Luis?
9. "Compré 20 discos por cierta cantidad, si hubiera adquirido 4 discos más por la misma cantidad, el costo de cada disco disminuiría en \$60. ¿Cuál es el precio de cada disco?" (Sugerencia: sea x el precio de los 20 discos).
10. El salario básico de un profesor es de \$40 por hora, pero recibe un tanto y medio de esta cuota por cada hora cuando rebasa las 40 horas por semana. Si el cheque que recibe es de \$2 800, ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó durante la semana?
11. El precio de 30 kg de una mezcla de dos tipos de arroz es de \$10.20 por kilogramo. Si uno de los tipos de arroz vale \$9.30 el kilogramo y el otro \$12, ¿cuántos kilogramos de cada tipo de este grano hay en la mezcla?
12. Las entradas para el espectáculo de un circo cuestan \$60 para adulto y \$40 para niño. Si una familia pagó \$320 por seis boletos, ¿cuántos boletos de cada clase compró?
13. En un partido de futbol se vendieron 12 000 boletos y se recaudaron \$800 000. Si los precios eran de \$60 y \$80, ¿cuántos boletos se vendieron de cada clase?
14. Juan mezcla tres tipos de café, el primero tiene un precio de \$100 el kilogramo, el segundo de \$70 y el tercero de \$105. La mezcla pesa 20 kilogramos y la vende en \$90 el kilogramo. Si la cantidad del grano de \$70 es el doble que la del café de \$100, ¿cuántos kilogramos utilizó de cada grano?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre el tiempo requerido para realizar un trabajo

1 Un estanque se llena por una de dos llaves en 4 horas y la segunda lo llena en 6 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el estanque vacío si se abren ambas llaves al mismo tiempo?

Solución

Datos:	Tiempo total de llenado:	En una hora, el estanque estará lleno en:
Primera llave	4 horas	$\frac{1}{4}$ de su capacidad
Segunda llave	6 horas	$\frac{1}{6}$ de su capacidad
Las dos llaves	x horas	$\frac{1}{x}$ de su capacidad

Planteamiento:

En una hora las dos llaves llenarán $\frac{1}{x}$ de la capacidad del estanque:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$$

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad 12x\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}\right) \quad \rightarrow \quad 3x+2x=12$$

$$5x=12$$

$$x=2.4$$

2.4 horas equivalen a 2 horas, .4(60) = 24 minutos

Por consiguiente, las dos llaves tardarán 2 horas y 24 minutos en llenar el estanque.

2 Para la recolección de trigo se utilizan dos cosechadoras, la primera tarda 8 horas y las dos juntas tardan 4.8 horas, ¿cuánto tiempo tardará la segunda en recolectar el trigo?

Solución

Sea x el tiempo que tarda la segunda cosechadora en recolectar el trigo, entonces:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4.8} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{4.8}-\frac{1}{8}$$

Se resuelve la ecuación:

$$\frac{1}{x}=\frac{5}{24}-\frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad 24=5x-3x \quad \rightarrow \quad 24=2x$$

$$x=12$$

Resulta que la segunda cosechadora tardará 12 horas en recolectar el trigo.

EJERCICIO **70**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un estanque se llena con una de dos llaves en 3 horas y con la segunda en 2 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el estanque vacío si se abren las dos llaves?
2. Cierto trabajo lo puede realizar Damián en 4 horas y Beatriz en 6 horas. ¿En cuánto tiempo lo realizan ambos?
3. Una tortillería produce por día 350 kilogramos con la máquina A, con la máquina B la misma producción se obtiene en dos días, si se ponen a trabajar ambas máquinas, ¿cuánto tiempo tardarán en producir los 350 kilos de tortilla?
4. Para envasar leche se utilizan dos máquinas, la primera envasa 2 400 botes en 4 horas y la segunda envasa la misma cantidad en 8 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar los 2 400 botes de leche ambas máquinas?
5. Para sacar 20 000 copias se tienen tres copiadoras, la primera tarda 6 horas, la segunda 8 horas y la tercera 4 horas; si se utilizan las tres copiadoras, ¿cuánto tiempo tardarán en realizar esta tarea?

6. Un productor de leche puede vaciar un contenedor con una llave de desagüe en 12 horas; este recipiente puede ser llenado con una llave en 4 horas y con una segunda llave en 6 horas. Si el contenedor inicialmente está vacío y se abren las tres llaves simultáneamente, ¿en cuánto tiempo se puede llenar?
7. Cierta producción de tornillos se realiza por la máquina serie *A* en una hora 20 minutos, y por las máquinas series *A* y *B* en 1 hora, ¿cuánto tiempo tardaría la máquina serie *B* en realizar la producción de tornillos?
8. Una pipa de 1 500 litros de capacidad tiene dos llaves y un desagüe. La primera llave la llena en 45 minutos, la segunda en 30 y el desagüe la vacía en 60 minutos. Si la pipa está vacía y se abren las dos llaves y el desagüe, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse la pipa?
9. Tania y José van a construir cierta cantidad de juguetes que se conforman de tres piezas cada uno. Tania los construye en 2 horas y media y ambos tardan una hora 54 minutos, ¿cuánto tardará José en construir los juguetes?
10. En una escuela se tienen que hacer juegos de cuatro hojas cada uno para formar 1 200 exámenes, para ello se forman dos grupos de 3 personas; el primer grupo tardará 3 horas 40 minutos, mientras que los dos grupos tardarán 3 horas, ¿cuánto tiempo tardará el segundo grupo en terminar los 1 200 exámenes?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas sobre comparación de distancias y tiempos

En este tipo de problemas se utilizan las siguientes fórmulas del movimiento rectilíneo uniforme:

$$v = \frac{d}{t} \qquad d = vt \qquad t = \frac{d}{v}$$

Éstas se usan para determinar la velocidad, distancia y el tiempo, respectivamente.

1 Un automóvil con velocidad constante de 21 m/s sale de la meta 5 segundos después que un automóvil, cuya velocidad constante es de 18 m/s, ¿cuánto tiempo transcurre para que el segundo alcance al primero?

Solución

Datos:

Primer automóvil
Vel. 18 m/s





Segundo automóvil
Vel. 21 m/s





Planteamiento:
Las distancias recorridas son las mismas, pero cada automóvil con distinto tiempo, si $d = vt$, entonces:

Distancia recorrida por el primer automóvil = distancia recorrida por el segundo automóvil

$$18(t + 5) = 21(t)$$

Se resuelve la ecuación:

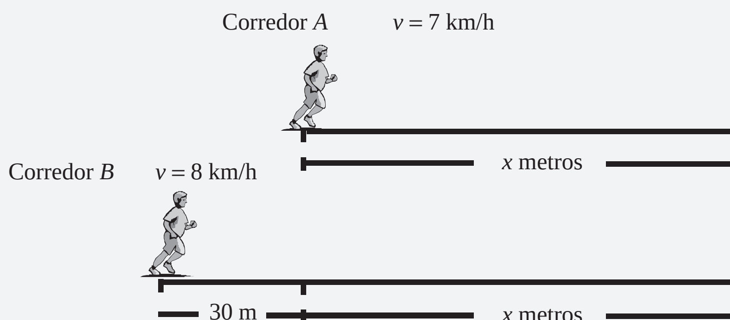
$$18(t + 5) = 21(t) \quad \rightarrow \quad 18t + 90 = 21t$$
$$90 = 21t - 18t$$
$$90 = 3t$$
$$30 = t$$

Esto indica que el segundo automóvil dará alcance al primero en 30 segundos.

2 En cierta competencia de atletismo el corredor A se encuentra a 30 metros adelante del corredor B. El corredor A lleva una velocidad constante de 7 km/h y el corredor B lleva una velocidad constante de 8 km/h. Si los dos salen al mismo tiempo, ¿después de cuántos metros el corredor B alcanzará al corredor A?

Solución

Datos:



Planteamiento:

La distancia en kilómetros para cada corredor es $\frac{x}{1\,000}$ y $\frac{30+x}{1\,000}$, respectivamente.

Al momento de salir el tiempo es el mismo para ambos corredores, si $t = \frac{d}{v}$, entonces;

tiempo para el corredor A = tiempo para el corredor B

$$\frac{\frac{x}{1\,000}}{7} = \frac{\frac{30+x}{1\,000}}{8}$$

Se resuelve la ecuación:

$$\frac{x}{7\,000} = \frac{30+x}{8\,000} \quad \rightarrow \quad 8x = 7(30+x) \quad \rightarrow \quad 8x = 210 + 7x$$

$$8x - 7x = 210$$

$$x = 210$$

El corredor B recorre 210 + 30 = 240 metros antes de alcanzar al corredor A.

EJERCICIO **71**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un automóvil que viaja a 60 m/s pasa por el punto A 12 segundos antes de que un automóvil que viaja a 80 m/s pase por el mismo punto, ¿cuánto tiempo transcurre antes de que el segundo automóvil alcance al primero?
2. Dos personas se encuentran a una distancia de 55 metros, ¿después de cuánto tiempo se encontrarán si la primera camina a 1 m/s y la segunda a 1.2 m/s?
3. Un automóvil con una velocidad constante de 60 km/h va por la avenida Viaducto, en sentido contrario viaja un segundo automóvil a una velocidad constante de 90 km/h. Si la distancia que los separa es de 25 km, ¿después de cuánto tiempo se cruzarán?
4. Un par de guardabosques tienen aparatos de radiocomunicación, con un alcance máximo de 2 kilómetros. Uno de ellos realiza su recorrido hacia el oeste a las 12:00 p.m. a una velocidad de 4 km/h, mientras que el otro sale de la misma base a las 12:10 p.m. y camina hacia el este a una velocidad de 6 km/h. ¿A qué hora dejan de comunicarse ambos guardabosques?

5. Una lancha que viaja a 12 m/s pasa por debajo de un puente 3 segundos después que un bote que viaja a 9 m/s, ¿después de cuántos metros la lancha alcanzará al bote?
6. Dos automóviles se cruzan en dirección opuesta, si el primero lleva una velocidad de 24 m/s y el segundo una velocidad de 26 m/s, ¿cuántos segundos transcurren cuando los automóviles están a 800 m uno del otro?
7. Un motociclista persigue a un automóvil, el automóvil lleva una velocidad de 80 km/h y la motocicleta 120 km/h. Si el automóvil le lleva una ventaja de 500 m, ¿qué distancia debe recorrer la motocicleta para alcanzarlo?
8. Una persona que viaja a 3.6 km/h pasa por el punto A a las 14:15 p.m.; 18 minutos después pasa un automóvil por el mismo punto a una velocidad de 68.4 km/h, ¿a qué hora alcanza el automóvil a la persona?
9. Dos personas se encuentran a las 8:34 a.m., la primera camina a 1.5 m/s hacia el oeste y la segunda camina hacia el este a 0.5 m/s, ¿a qué hora la distancia entre ellos es de 360 m?
10. Dos automóviles parten en sentido contrario del punto A, el primero parte a las 20:12 p.m. con una velocidad constante de 40 km/h y el segundo a las 20:16 p.m. a una velocidad constante de 30 km/h, ¿a qué hora la distancia entre ellos será de 26 km?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Problemas de aplicación a la geometría plana

Para los siguientes problemas se toman en cuenta algunos conceptos básicos de geometría. Aquí se proporcionan algunas fórmulas para el cálculo de perímetros y áreas.

Figura	Perímetro	Área
Rectángulo	$P = 2(b + h)$	$A = bh$
Cuadrado	$P = 4l$	$A = l^2$
Triángulo	$P = l_1 + l_2 + l_3$	$A = \frac{bh}{2}$
Círculo	$P = 2\pi r$	$A = \pi r^2$

b = base, h = altura, l = lado, r = radio

1 Dos ángulos complementarios son aquellos que suman 90°, ¿cuánto mide un ángulo si su complemento es el doble más 15°?

Solución

Datos:

Ángulo: x

Complemento: $2x + 15°$

Planteamiento:

Ángulo + Complemento = 90°

$$x + (2x + 15°) = 90°$$

Se resuelve la ecuación:

$$x + 2x + 15° = 90°$$
$$3x + 15° = 90°$$
$$3x = 75°$$
$$x = 25°$$

Por tanto, el ángulo es de 25°

2 El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm. Si el lado diferente equivale a $\frac{2}{3}$ de la medida de los lados iguales, ¿cuál es la medida de los lados del triángulo?

Solución

Datos:

Medida de los lados iguales: x

Medida del lado diferente: $\frac{2}{3}x$

Planteamiento:

Perímetro = suma de los lados = 48

$$x + x + \frac{2}{3}x = 48$$

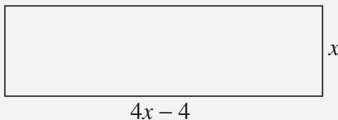
Se resuelve la ecuación:

$$3x + 3x + 2x = 144$$
$$8x = 144$$
$$x = 18$$

Los lados del triángulo isósceles son 18 cm, 18 cm y 12 cm.

3 El largo de un rectángulo mide 4 metros menos que el cuádruple de su ancho y su perímetro mide 32 metros. ¿Cuánto mide el largo?

Solución



Datos:

Ancho o altura: x

Largo o base: $4x - 4$

Perímetro: 32 metros

La fórmula para hallar el perímetro de un rectángulo es: $P = 2(b + h)$

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$$2[x + (4x - 4)] = 32$$
$$2[5x - 4] = 32$$
$$5x - 4 = 16$$
$$5x = 16 + 4$$
$$5x = 20$$
$$x = 4$$

Por tanto, el largo del rectángulo mide:
$4(4) - 4 = 12$ metros

4 Si se aumentan 8 metros a los lados de un cuadrado el área aumenta en 144 m^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado original?

Solución

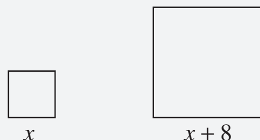
Datos:

Lado del primer cuadrado: x

Lado del segundo cuadrado: $x + 8$

Área del primer cuadrado: x^2

Área del segundo cuadrado: $(x + 8)^2$



La diferencia de las áreas es igual a 144 m^2, se plantea la ecuación y se resuelve:

$$(x + 8)^2 - x^2 = 144$$
$$x^2 + 16x + 64 - x^2 = 144$$
$$16x = 144 - 64$$
$$16x = 80$$
$$x = \frac{80}{16}$$
$$x = 5$$

Por tanto, el lado del cuadrado original mide 5 metros.

EJERCICIO 72

Resuelve los siguientes problemas:

1. Si uno de dos ángulos complementarios mide 34° más que el otro, ¿cuánto mide el ángulo mayor?
2. Dos ángulos son suplementarios si suman 180°, ¿cuál es la medida del ángulo cuyo suplemento es el triple del ángulo?

3. El largo de un rectángulo mide el triple de su ancho; si el perímetro mide 96 cm, ¿cuáles son sus dimensiones?
4. El largo de un rectángulo mide diez metros más que el doble de su ancho y su perímetro mide 164 metros. ¿Cuáles son sus dimensiones?
5. El ancho de un rectángulo mide cinco metros menos que la cuarta parte de su largo y su perímetro mide 80 metros. ¿Cuáles son sus dimensiones?
6. El perímetro de un triángulo escaleno mide 23 metros. Si uno de los lados mide dos metros menos que el doble del segundo lado y tres metros más que el tercer lado, ¿cuánto mide cada lado?
7. La base de un triángulo mide 36 cm y su área 144 cm^2. ¿Cuánto mide la altura?
8. Un trozo de madera de 14 cm se divide en dos partes, de tal manera que la longitud de una de ellas es las dos quintas partes de longitud de la otra, ¿cuál es la longitud de cada parte?
9. Una cuerda de 75 cm se divide en dos partes, de tal manera que la longitud de una de ellas es las tres quintas partes del total de la cuerda.
   - Si con el trozo más pequeño se forma una circunferencia, determina su radio.
   - Si con el trozo de mayor longitud se forma un cuadrado, calcula la longitud de uno de sus lados.
10. Si se aumentan ocho metros a cada lado de un cuadrado el área aumenta 160 m^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado original?
11. El largo de un rectángulo mide el doble de su ancho. Si se aumentan cuatro metros a cada lado el área aumenta 124 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo original?
12. El largo de un rectángulo mide cinco metros menos que el triple de su ancho. Si se aumentan 10 metros al largo el área aumenta 60 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones del nuevo rectángulo?
13. La diferencia entre las áreas de dos círculos es de 209π m^2. Si el radio del círculo mayor mide 11 metros más que el radio del círculo menor, ¿cuánto mide el radio del círculo mayor?
14. El área de un rectángulo es de 24 u^2 con un ancho de x. Si el largo se aumenta en 3 y no cambia el ancho, el área resultante es de 33 u^2. Determina las dimensiones del rectángulo inicial.
15. La base de un triángulo excede en dos a su altura; si la base se disminuye en 3 y la altura se aumenta en 2, el área del nuevo triángulo es 3 u^2 menor que el área del triángulo original. Determina las dimensiones del triángulo original
16. Se desea mandar a diseñar una ventana Normanda (forma de rectángulo bajo un semicírculo). El ancho es de tres metros, pero la altura h todavía no se define. Si para dicha ventana se utilizan 24 m^2 de vidrio, determina la altura del rectángulo h.
17. Las dimensiones de un rectángulo están en relación 2:1, si estas dimensiones se aumentan en 3 unidades, el área del nuevo rectángulo excede en 63 u^2 al área del rectángulo inicial, ¿cuál es el largo del rectángulo inicial?
18. El marco de una pintura rectangular mide 5 cm de ancho y tiene un área de 2 300 cm^2. El largo de la pintura mide 20 cm menos que el triple de su ancho. Determina las dimensiones de la pintura sin marco.


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Despejes de fórmulas

Al inicio del capítulo se habló de que una ecuación es una fórmula para el cálculo de alguna magnitud. En este caso habrá fórmulas que tengan más de una variable que representen ciertas magnitudes y dependerá cuál se quiera conocer para hacer el despeje.

Para despejar una variable bastará con aplicar la operación inversa a cada miembro de la fórmula. Si el término suma, se resta el mismo valor en ambos miembros; si multiplica, se divide; si es una potencia, se obtiene una raíz, etcétera.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la fórmula $A = b \cdot h$, despeja b.

Solución

$A = b \cdot h \quad \rightarrow \quad \frac{A}{h} = b$ Se dividen ambos miembros entre h

Por tanto, $b = \frac{A}{h}$

2 Despeja c de la fórmula $a^2 = b^2 + c^2$.

Solución

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a^2 - b^2 = c^2$ Se resta b^2 a ambos miembros

$\sqrt{a^2 - b^2} = c$ y se obtiene la raíz cuadrada

Por consiguiente, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

3 Despeja R_1 en la fórmula $\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Solución

$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}$ Se resta $\frac{1}{R_2}$ a ambos miembros

$\frac{R_2 - R_t}{R_t \cdot R_2} = \frac{1}{R_1}$ Se resuelve la fracción

$R_1(R_2 - R_t) = 1(R_t \cdot R_2)$ Se multiplica por $R_1(R_tR_2)$

Finalmente, se obtiene: $R_1 = \frac{R_t \cdot R_2}{R_2 - R_t}$ Se divide entre $R_2 - R_t$

4 Despeja v de la fórmula $E = mgh + \frac{mv^2}{2}$.

Solución

$E = mgh + \frac{mv^2}{2} \quad \rightarrow \quad E - mgh = \frac{mv^2}{2}$ Se resta mgh

$2(E - mgh) = mv^2$ Se multiplica por 2

$\frac{2(E - mgh)}{m} = v^2$ Se divide entre m

$\sqrt{\frac{2(E - mgh)}{m}} = v$ Se obtiene la raíz cuadrada

Por tanto, $v = \sqrt{\frac{2(E - mgh)}{m}}$

EJERCICIO 73

Realiza lo que se indica en cada caso:

1. Despeja n de la fórmula $PV = nrt$
2. En $P = 2\ell + 2\omega$ despeja ℓ
3. En $y = mx + b$ despeja m
4. En $S = \frac{a - \ell r}{1 - r}$ despeja r
5. Despeja F de $C = \frac{5}{9}(F - 32)$
6. Despeja r de $A = \pi r^2$
7. Despeja b de $A = \frac{1}{2}h(B + b)$
8. En $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ despeja x_2
9. Despeja h de la fórmula $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
10. Despeja F de la fórmula $r = \frac{1}{24}\sqrt{B^2 + C^2 - 4AF}$
11. En $u = a + (n - 1)d$ despeja d
12. Despeja r de $u = ar^{n-1}$
13. Despeja P_0 de $P = P_0e^{kt}$
14. En $a = \frac{V_f^{\,2} - V_0^{\,2}}{2d}$ despeja V_0
15. Despeja m de $F = G\frac{mM}{r^2}$
16. Despeja i de $M = C(1 + i)^t$
17. En $tg\,\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$, despeja m_1
18. Despeja x de $y = ax^2 + bx + c$
19. En $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$ despeja p'
20. Despeja t de $d = Vt + \frac{1}{2}at^2$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Capítulo 18

Función lineal

Reseña HISTÓRICA



François Viéte (1540-1603)

Entre el Renacimiento y el surgimiento de la matemática moderna (s. XVII), se desarrolló un periodo de transición en el que se asentaron las bases de disciplinas como el álgebra, la trigonometría, los logaritmos y el análisis infinitesimal. La figura más importante de este periodo fue el francés François Viéte.

Considerado uno de las padres del álgebra, desarrolló una notación que combina símbolos con abreviaturas y literales. Es lo que se conoce como álgebra sincopada, para distinguirla del álgebra retórica utilizada en la antigüedad y el álgebra simbólica que se usa en la actualidad.

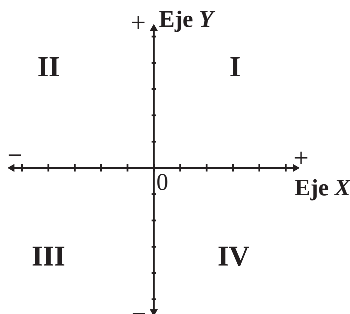
Uno de sus hallazgos más importantes fue establecer claramente la distinción entre variable y parámetro, lo que le permitió plantear familias enteras de ecuaciones con una sola expresión y así abordar la resolución de ecuaciones con un alto grado de generalidad, en lo que se entendió como una aritmética generalizada.

François Viéte (1540-1603)

Plano cartesiano

El plano cartesiano se forma con dos rectas perpendiculares, cuyo punto de intersección se denomina origen. La recta horizontal recibe el nombre de eje X o eje de las abscisas y la recta vertical recibe el nombre de eje Y o eje de las ordenadas.

El plano cartesiano se divide en cuatro regiones llamadas "cuadrantes". A cada punto P se le asigna un par ordenado o coordenada $P(x, y)$.

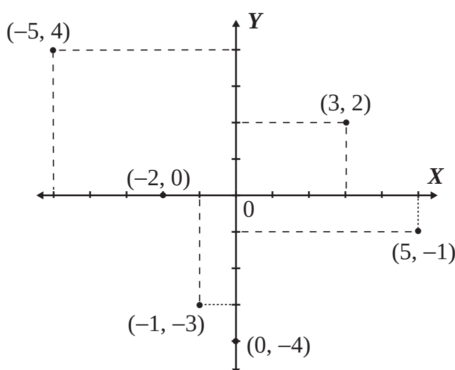


Localización de puntos

Para localizar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano se toma como referencia el origen, se avanza tanto como lo indica el primer número (abscisa) hacia la derecha o izquierda, según sea su signo, de ese punto se avanza hacia arriba o hacia abajo, tanto como lo indica el segundo número (ordenada) según sea su signo.

Ejemplo

Grafica los puntos: (–5, 4), (3, 2), (–2, 0), (–1, –3), (0, –4) y (5, –1) en el plano cartesiano.



EJERCICIO 74

Localiza en el plano cartesiano y une los puntos:

1. $A(3, -1)$ y $B(4, 3)$
2. $A(0, 2)$ y $B(3, 0)$
3. $A(-1, 2)$, $B(4, 5)$ y $C(2, -3)$
4. $A(0, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(-3, -4)$
5. $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$, $C(2, -3)$ y $D(4, 2)$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función

Es la relación que existe entre dos conjuntos, de manera que a los elementos de x les corresponde a lo más un elemento de y. Se denota por:

$$y = f(x)$$

Se lee, y es igual a f de x

donde: x: variable independiente

y: variable dependiente

$f(x)$: regla de correspondencia

Constante

Es la función que asocia un mismo valor a cada valor de la variable independiente

$$y = k$$

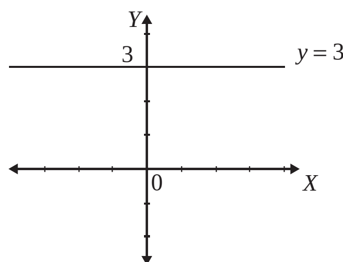
La representación gráfica es una línea recta paralela al eje X, sobre la ordenada k

Ejemplo

Grafica la función $y = 3$

Solución

Se traza una recta paralela al eje X, sobre la ordenada 3



Ecuación $x = k$

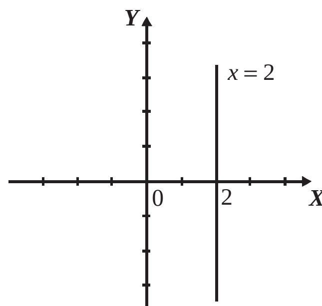
Una ecuación de la forma $x = k$ no es una función. La representación gráfica de esta ecuación es una recta paralela al eje Y que pasa por el valor de la abscisa k.

Ejemplo

Representa en una gráfica la ecuación $x = 2$

Solución

Se traza una recta paralela al eje Y, que pasa sobre la abscisa 2



Lineal

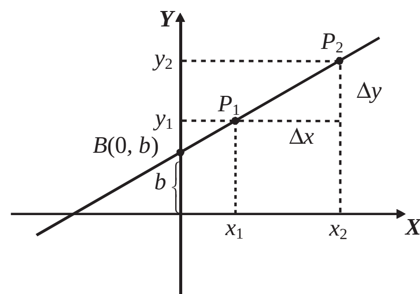
La función de la forma $y = mx + b$ se llama lineal, donde los parámetros m, b representan la pendiente y ordenada al origen, respectivamente.

Ejemplos

Sean las funciones lineales:

1. $y = 5x + 2$ en donde: $m = 5, b = 2$
2. $y = -4x + \frac{4}{7}$ en donde: $m = -4, b = \frac{4}{7}$
3. $y = \frac{2}{3}x - 1$ en donde: $m = \frac{2}{3}, b = -1$
4. $y = -\frac{1}{2}x$ en donde: $m = -\frac{1}{2}, b = 0$
5. $y = 4$ en donde: $m = 0, b = 4$

La pendiente indica el número de unidades que incrementa o disminuye y, cuando x aumenta. La ordenada al origen es la distancia del origen al punto $(0, b)$, este punto se encuentra sobre el eje Y, y es la intersección con la recta.



Donde:

$\Delta x = x_2 - x_1$
$\Delta y = y_2 - y_1$

Dados dos puntos de la recta, la pendiente se obtiene con la fórmula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(3, 6)$?

Solución

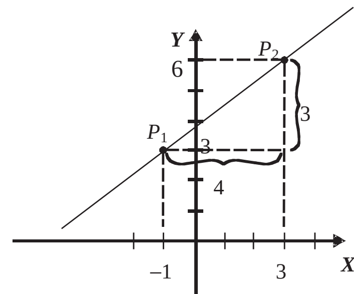
Sea:

$A(-1, 3) = (x_1, y_1)$, entonces $x_1 = -1$, $y_1 = 3$

$B(3, 6) = (x_2, y_2)$, entonces $x_2 = 3$, $y_2 = 6$

Estos valores se sustituyen en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{3-(-1)} = \frac{6-3}{3+1} = \frac{3}{4}$$



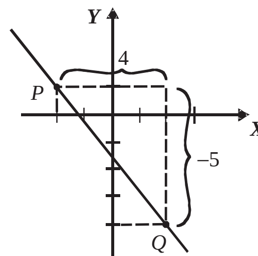
Por tanto, el valor de la pendiente es $\frac{3}{4}$

2 ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(-2, 1)$ y $Q(2, -4)$?

Solución

Sea:

$P(-2, 1) = (x_1, y_1)$, entonces $x_1 = -2$, $y_1 = 1$
$Q(2, -4) = (x_2, y_2)$, entonces $x_2 = 2$, $y_2 = -4$



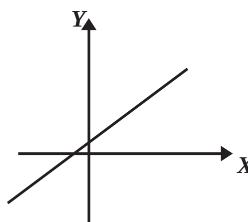
Estos valores se sustituyen en la fórmula:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-4-1}{2-(-2)}=\frac{-4-1}{2+2}=\frac{-5}{4}=-\frac{5}{4}$$

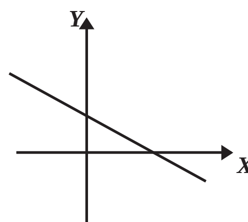
Por consiguiente, el valor de la pendiente es $-\frac{5}{4}$

Generalidades

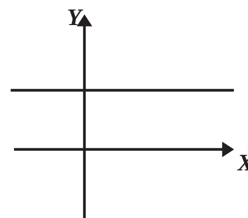
- Si $m > 0$, la función es creciente, es decir, cuando x aumenta, también lo hace y.



- Si $m < 0$, la función es decreciente, es decir, cuando x aumenta, y disminuye.



- Si $m = 0$, se tiene una función constante.



EJERCICIO 75

Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

1. $A(-2,4)$ y $B(6,12)$
2. $M(1,5)$ y $B(2,-7)$
3. $R(-4,-2)$ y $B(5,6)$
4. $A\left(-\frac{1}{2},3\right)$ y $B\left(4,-\frac{2}{3}\right)$
5. $A\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{4}\right)$ y $B\left(\frac{3}{10},\frac{1}{2}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Gráfica

Para graficar una función lineal se lleva a cabo lo siguiente:

I. Se localiza la ordenada al origen, es decir, el punto (0, *b*).
II. A partir de este punto se localiza otro al tomar a la pendiente como el incremento o decremento vertical sobre el incremento horizontal.

EJEMPLOS

1 Grafica la función $y=\frac{2}{3}x+4$.

Solución

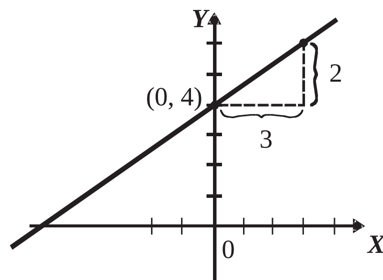
La pendiente y ordenada al origen de la función:

$$y=\frac{2}{3}x+4$$

$$m=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \text{ incremento vertical}}{3 \text{ incremento horizontal}}$$

$b = 4$ que representa el punto (0, 4).

Gráfica de la función



2 Traza la gráfica de la función $y=-\frac{4}{5}x+2$.

Solución

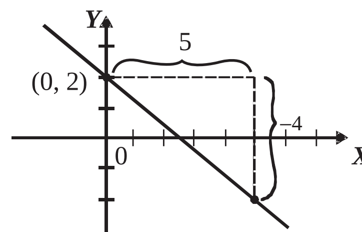
La pendiente y ordenada al origen de la función:

$$y=-\frac{4}{5}x+2$$

$$m=-\frac{4}{5}=\frac{-4}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{-4 \text{ decremento vertical}}{5 \text{ incremento horizontal}}$$

$b = 2$ que representa el punto (0, 2).

Gráfica de la función

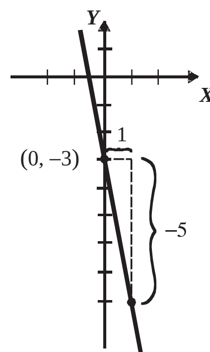


3 Traza la gráfica de la función $y = -5x - 3$.

Solución

La pendiente y ordenada al origen de la función:

Gráfica de la función



$$y = -5x - 3$$

$$m = -5 = \frac{-5}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{-5 \text{ decremento vertical}}{1 \text{ incremento horizontal}}$$

$b = -3$ que representa el punto $(0, -3)$.

Otra forma de graficar una función lineal es dar valores de x, para obtener los respectivos valores de y, con estos dos valores se forman puntos coordenados. A este procedimiento se le llama *tabulación*.

Ejemplo

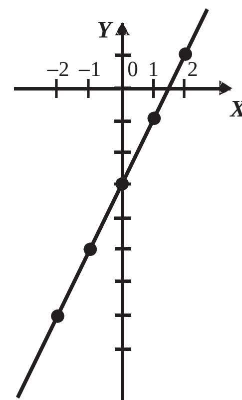
Traza la gráfica de la función $y = 2x - 3$.

Solución

Se construye una tabla con valores arbitrarios en x, para obtener los valores respectivos de y.

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
-2	$y = 2(-2) - 3 = -7$	$(-2, -7)$
-1	$y = 2(-1) - 3 = -5$	$(-1, -5)$
0	$y = 2(0) - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$y = 2(1) - 3 = -1$	$(1, -1)$
2	$y = 2(2) - 3 = 1$	$(2, 1)$

Gráfica de la función



EJERCICIO 76

Grafica las siguientes funciones y ecuaciones:

1. $y = -2$
2. $y = \pi$
3. $x = 4$
4. $x = \frac{3}{2}$
5. $y = 2x + 5$
6. $y = 4x$
7. $y = -\frac{1}{2}x$
8. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
9. $y = \frac{3}{4}x + 3$
10. $y = -\frac{1}{3}x + 3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Familia de rectas

Se ha visto la función $y = mx + b$ con valores constantes para m y b, en este tema analizaremos qué pasa cuando se fija uno de los dos valores y el otro se deja libre. Este tipo de funciones reciben el nombre de *familia de rectas*.

Ejemplos

1. $y = 3x + b$
2. $y = -x + b$
3. $y = mx - 7$
4. $y = mx + 6$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Grafica una familia de rectas de la función $y = mx + 2$.

Solución

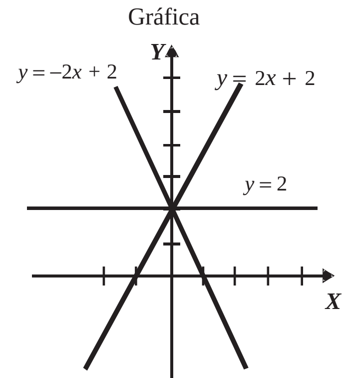
La función $y = mx + 2$ representa todas las rectas que tienen ordenada al origen 2, es decir, todas las rectas que intersecan al eje Y en el punto (0, 2).

Se grafican algunas de las rectas, con algunos valores para m:

Si $m = 2$, entonces se tiene la recta $y = 2x + 2$

Si $m = -2$, entonces se tiene la recta $y = -2x + 2$

Si $m = 0$, entonces se tiene la recta $y = 2$



2 Grafica una familia de rectas de la ecuación $y = x + b$.

Solución

La función $y = x + b$ representa todas las rectas que tienen pendiente 1

Se grafican algunas de estas rectas, con algunos valores para b:

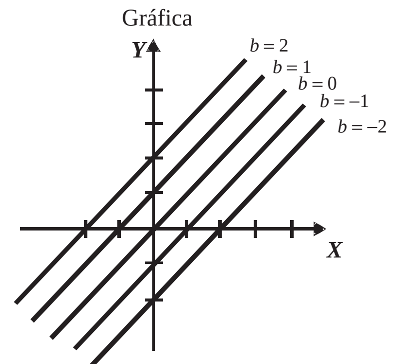
Si $b = -2$, se tiene la recta $y = x - 2$

Si $b = -1$, se tiene la recta $y = x - 1$

Si $b = 0$, se tiene la recta $y = x$

Si $b = 1$, se tiene la recta $y = x + 1$

Si $b = 2$, se tiene la recta $y = x + 2$



EJERCICIO 77

Grafica una familia de rectas para cada función:

1. $y = mx + 4$
2. $y = mx - 3$
3. $y = mx + \frac{2}{3}$
4. $y = 2x + b$
5. $y = -x + b$
6. $y = \frac{7}{2}x + b$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Si tenemos dos variables x, y que cumplen la ecuación $y = mx + b$ donde $m, b \in R$, se dice que dichas variables se relacionan linealmente.

Para lo anterior existen problemas de la vida real que se pueden representar con un modelo lineal y así dar un valor estimado de la variable y, para un cierto valor de la variable x.

Ejemplos

1. El salario s que recibe un empleado por trabajar x horas.
2. El desgaste d de un artículo que se ha usado t meses.

1 Cinco metros de tela tienen un costo de $300, encuentra un modelo lineal para el costo y determina ¿cuánto cuestan 25m? y ¿cuántos metros de tela se pueden comprar con $18 000?

Solución

Sean:

x: metros de tela
y: costo por metro de tela
El costo y de x metros de tela se relaciona con la función $y = mx + b$
Si se venden cero metros de tela ($x = 0$), el costo es cero pesos ($y = 0$), entonces, al sustituir estos valores en la función $y = mx + b$, se tiene que:

$$0 = m(0) + b \rightarrow b = 0$$

De tal manera que la función queda de la forma siguiente:

$$y = mx$$

Si $x = 5$, entonces $y = 300$, que son los datos iniciales del problema, con ellos se encuentra el valor de la pendiente, cuando se sustituyen en $y = mx$.

$$y = mx$$

$$300 = m(5) \rightarrow m = \frac{300}{5} = 60 \rightarrow m = 60$$

Por tanto, el modelo lineal es:

$$y = 60x$$

Se quiere conocer el costo de 25 metros de tela.

$$y = 60x$$
$$y = 60(25) = 1\ 500$$

Por consiguiente, 25 m de tela tienen un costo de $1 500
Finalmente, se desea saber cuántos metros de tela se pueden comprar con $18 000

$$y = 60x$$
$$18\ 000 = 60x$$
$$\frac{18\,000}{60} = x$$
$$300 = x$$

Con $18 000 se pueden comprar 300 metros de tela.

2 El delfín mular mide 1.5 metros al nacer y pesa alrededor de 30 kilogramos. Los delfines jóvenes son amamantados durante 15 meses, al final de dicho periodo estos cetáceos miden 2.7 metros y pesan 375 kilogramos.

Sea L y P la longitud en metros y el peso en kilogramos, respectivamente, para un delfín mular de t meses.

a) Si la relación entre L y t es lineal, expresa L en términos de t.
b) ¿Cuál es el aumento diario de la longitud para un delfín joven?
c) Expresa P en términos de t, si P y t están relacionados linealmente.
d) ¿Cuál es el peso de un delfín de cinco meses de edad?

Solución

a) Si la relación entre L y t es lineal, expresa L en términos de t.

$$L = mt + b$$

Cuando el delfín es recién nacido $t = 0$ y $L = 1.5$, al sustituir estos valores en la función anterior se tiene que $b = 1.5$ y el modelo queda de la siguiente forma:

$$L = mt + 1.5 \qquad \rightarrow \qquad L = mt + \frac{3}{2}$$

Cuando $t = 15$, $L = 2.7$, estos valores se sustituyen en el modelo anterior para determinar la pendiente.

$$L = mt + \frac{3}{2}$$

$$2.7 = m(15) + \frac{3}{2} \qquad \rightarrow 2.7 - \frac{3}{2} = 15m \qquad \rightarrow \qquad \frac{6}{5} = 15m \qquad \rightarrow \qquad \frac{\frac{6}{5}}{15} = m$$

$$\frac{2}{25} = m$$

Por tanto, la longitud L en función del tiempo t es:

$$L = \frac{2}{25}t + \frac{3}{2}$$

b) ¿Cuál es el aumento diario de la longitud para un delfín joven?
En la función lineal L, la parte que indica el aumento en la longitud del delfín es: $\frac{2}{25}t$, por consiguiente, se divide t entre 30 y se sustituye $t = 1$

$$\frac{t}{30} = \frac{1}{30}$$

Entonces:

$$\frac{2}{25}t = \frac{2}{25}\left(\frac{1}{30}\right) = \frac{2}{750} = \frac{1}{375} = 0.00267$$

Luego, el aumento diario en la longitud de un delfín es de 0.00267 m.

c) Expresa P en términos de t, si P y t están relacionados linealmente.
Se representa el peso P en función del tiempo t con la función:

$$P = mt + b$$

Cuando el delfín es neonato su peso es de 30 kilogramos, es decir,

$$t = 0 \text{ y } P = 30$$

Al sustituir estos valores en la función anterior se obtiene el valor de b,

$$P = mt + b$$
$$30 = m(0) + b \rightarrow b = 30$$

El modelo matemático para un delfín recién nacido es:

$$P = mt + 30$$

Luego, a los 15 meses un delfín pesa 375 kg, entonces:

Si $t = 15$ y $P = 375$, se tiene que:

$$P = mt + 30$$

$$375 = m(15) + 30 \rightarrow 375 - 30 = 15m \rightarrow 345 = 15m \rightarrow \frac{345}{15} = m \quad \rightarrow \quad m = 23$$

Por consiguiente, el peso P en términos de t se expresa con el modelo:

$$P = 23t + 30$$

d) ¿Cuál es el peso de un delfín de cinco meses de edad?
Para obtener el peso P de un delfín de 5 meses de edad, se sustituye $t = 5$ en el modelo anterior:

$$P = 23t + 30$$
$$P = 23(5) + 30$$
$$P = 115 + 30$$
$$P = 145$$

Por tanto, el peso de un delfín de cinco meses de edad es de 145 kilogramos.

EJERCICIO **78**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un hombre recibe \$120 por 3 horas de trabajo. Expresa el sueldo S (en pesos) en términos del tiempo t (horas).
2. Un bebé pesa 3.5 kg al nacer y 3 años después alcanza 10.5 kg. Supongamos que el peso P (en kg) en la infancia está relacionado linealmente con la edad t (en años).

   a) Expresa P en términos de t.
   b) ¿Cuánto pesará el niño cuando cumpla 9 años?
   c) ¿A qué edad pesará 28 kg?

3. La cantidad de calor C (en calorías), requerida para convertir un gramo de agua en vapor, se relaciona linealmente con la temperatura T (en °F) de la atmósfera. A 50°F esta conversión requiere 592 calorías y cada aumento de 15°F aumenta 9.5 calorías la cantidad de calor. Expresa C en términos de T.
4. El dueño de una franquicia de agua embotellada debe pagar \$500 por mes, más 5% de los ingresos mensuales (I) por concepto de uso de la marca. Los costos de operación de la franquicia incluyen un pago fijo de \$1 300 por mes de servicios y mano de obra. Además, el costo para embotellar y distribuir el agua comprende 50% de los ingresos.

   a) Determina los gastos mensuales G en términos de I.
   b) Expresa la utilidad mensual U en términos de I (utilidad = ingreso − costo)
   c) Indica el ingreso mensual necesario para que no haya pérdida ni ganancia.

5. La relación entre las lecturas de temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius, está dada por: $°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$

   a) Encuentra la temperatura en que la lectura es la misma en ambas escalas.
   b) ¿En qué valor debe estar la lectura en grados Fahrenheit para que sea el doble de la lectura en grados Celsius?

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Capítulo 19

Sistemas de ecuaciones

Reseña HISTÓRICA



Gabriel Cramer

Matemático suizo nacido en Ginebra en el año 1704, quien falleció en Bagnols-sur-Cèze, Francia, en 1752. Fue catedrático de matemáticas (1724-1727) y de filosofía (1750-1752) en la Universidad de Ginebra. En 1750 expuso en su obra *Introducción al análisis de las curvas algebraicas* la teoría newtoniana referente a las curvas algebraicas, clasificándolas según el grado de la ecuación. Reintrodujo el determinante, algoritmo que Leibniz ya había utilizado al final del siglo XVII para resolver sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas. Editó las obras de Jakob Bernoulli y parte de la correspondencia de Leibniz.

Gabriel Cramer (1704-1752)

Ecuación lineal

Una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes reales tales que A y B no son cero, recibe el nombre de lineal.

Ejemplos

1. $2x - 3y - 4 = 0$, es una ecuación lineal con: $A = 2$, $B = -3$ y $C = -4$
2. $-5x + 4y = 0$, es una ecuación lineal con: $A = -5$, $B = 4$ y $C = 0$
3. $x + 2 = 0$, es una ecuación lineal con: $A = 1$, $B = 0$ y $C = 2$
4. $2y - 3 = 0$, es una ecuación lineal con: $A = 0$, $B = 2$ y $C = -3$

Una ecuación que se puede escribir de la forma $Ax + By + C = 0$ también es lineal.

Ejemplos

1. Dada la ecuación $2x = 5y - 6$, también se puede escribir de la forma: $2x - 5y + 6 = 0$
2. Para que la ecuación $\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y = 2$ tenga la forma $Ax + By + C = 0$, se eliminan los denominadores al multiplicar por 4 cada término de la igualdad:

$$4\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y\right) = 4(2)$$

   Al realizar las operaciones se transforma en $10x - 3y = 8$, finalmente:

$$10x - 3y - 8 = 0$$

3. La ecuación $\frac{1}{2}(x - y) - 3y = 4x + 1$, se puede escribir de la forma: $Ax + By + C = 0$, al realizar el producto indicado, eliminar denominadores y simplificar:

$$\frac{1}{2}(x-y) - 3y = 4x + 1$$
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 3y = 4x + 1$$
$$2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 3y\right) = 2(4x + 1)$$
$$x - y - 6y = 8x + 2$$
$$x - y - 6y - 8x - 2 = 0$$

   Por tanto, la ecuación se transforma en: $-7x - 7y - 2 = 0$

4. La ecuación $y = \frac{5}{3}x - 2$ al multiplicarla por 3 se obtiene $3y = 5x - 6$, por consiguiente se puede escribir como: $5x - 3y - 6 = 0$

Solución de una ecuación lineal

Una ecuación lineal tiene como conjunto solución todos los pares ordenados (x, y), que satisfacen la ecuación, donde x y y son números reales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si los pares ordenados (1, –4), $\left(2,-\frac{10}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$, son soluciones de la ecuación: $2x - 3y - 14 = 0$.

Solución

Se sustituye cada par ordenado en la ecuación:

- Para (1, –4)

$$\begin{aligned}2x-3y-14&=0\\2(1)-3(-4)-14&=0\\2+12-14&=0\\0&=0\end{aligned}$$

Por tanto, el par ordenado (1, –4), es solución.

- Para $\left(2,-\frac{10}{3}\right)$

$$\begin{aligned}2x-3y-14&=0\\2(2)-3\left(-\frac{10}{3}\right)-14&=0\\4+10-14&=0\\0&=0\end{aligned}$$

Por consiguiente, el par ordenado $\left(2,-\frac{10}{3}\right)$ es solución.

- Para $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$

$$\begin{aligned}2x-3y-14&=0\\2\left(\frac{1}{2}\right)-3\left(-\frac{3}{4}\right)-14&=0\\1+\frac{9}{4}-14&=0\\-\frac{43}{4}&\neq 0\end{aligned}$$

Entonces, el par ordenado $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$ no es solución.

2 Verifica si el punto (–2, 1), es solución de la ecuación $x+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(y-x)-5$

Solución

Se sustituye el punto en la ecuación:

$$\begin{aligned}x+\frac{3}{2}&=\frac{3}{2}(y-x)-5\\-2+\frac{3}{2}&=\frac{3}{2}[1-(-2)]-5\\-2+\frac{3}{2}&=\frac{3}{2}[1+2]-5\end{aligned}$$

(continúa)

(*continuación*)

$$-2+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(3)-5$$
$$-2+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}-5$$
$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Por consiguiente (–2, 1), es solución de la ecuación.

EJERCICIO 79

1. Verifica si los pares ordenados $(2,-3)$, $(7,0)$ y $(1,5)$ son solución de la ecuación: $3x-5y-21=0$.
2. Verifica si los puntos $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ son solución de la ecuación: $2x+4y+2=0$.
3. Verifica si los pares ordenados $(3,-4)$, $(-3,-12)$ y $\left(\frac{1}{2},2\right)$ son solución de la ecuación: $\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}y+4$.
4. Verifica si el punto $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right)$ es solución de la ecuación: $2(x-y)-\frac{7}{3}=\frac{1}{3}(x-8)-y$.
5. Verifica si el punto $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{10}\right)$ es solución de la ecuación: $\frac{1}{5}(x+2y)+\frac{1}{10}y=\frac{7}{10}(x+1)-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}x$.


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Gráfica

La gráfica de una ecuación lineal $Ax + By + C = 0$, es una recta que forman los puntos de su conjunto solución: $\{(x,y)|\,Ax+By+C=0\}$.

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es la gráfica de la ecuación $2x - 3y + 7 = 0$?

Solución

Para obtener la gráfica, basta con conocer dos puntos de la recta, para lo cual se sustituyen dos valores arbitrarios para x o y en la ecuación, y con esto se obtienen los dos puntos que se requieren.

Sea $x = -2$, se sustituye y se despeja y:

$$2x-3y+7=0$$
$$2(-2)-3y+7=0$$
$$-4-3y+7=0$$
$$3-3y=0$$
$$-3y=-3$$
$$y=\frac{-3}{-3}$$
$$y=1$$

Por tanto, el punto es (–2,1)

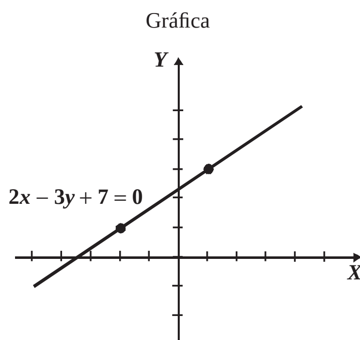
Sea $x = 1$, se sustituye y se despeja y:

$$2x-3y+7=0$$
$$2(1)-3y+7=0$$
$$2-3y+7=0$$
$$9-3y=0$$
$$-3y=-9$$
$$y=\frac{-9}{-3}$$
$$y=3$$

Por consiguiente, el punto es $(1,3)$

Por último, se localizan los puntos en el plano y se traza una recta sobre ellos.

Gráfica



Otra forma de graficar $Ax + By + C = 0$, es transformarla a la forma $y = mx + b$ y aplicar algunos de los métodos vistos en el capítulo 7.

Ejemplo

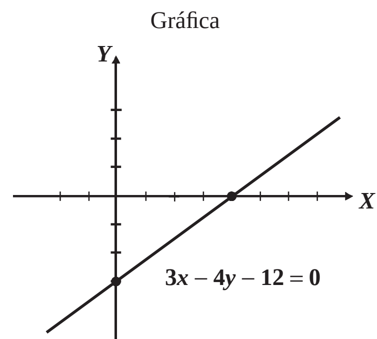
Grafica la ecuación $3x - 4y - 12 = 0$.

Solución

Se despeja y en la ecuación para expresarla en la forma $y = mx + b$

$$3x-4y-12=0$$
$$-4y=-3x+12$$
$$y=\frac{-3x+12}{-4}$$
$$y=\frac{-3}{-4}x+\frac{12}{-4}$$
$$y=\frac{3}{4}x-\frac{12}{4}$$
$$y=\frac{3}{4}x-3$$

Gráfica



Los valores respectivos de la pendiente y ordenada al origen son: $m = \frac{3}{4}$ y $b = -3$

EJERCICIO 80

Grafica las siguientes ecuaciones:

1. $x+y-3=0$
2. $x-y+2=0$
3. $3x-2y+6=0$
4. $4x+3y-12=0$
5. $3x-4y=0$
6. $2x+7y=0$
7. $-3x+5y-10=0$
8. $8x=2y-4$
9. $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=4$
10. $-\frac{3}{5}x=\frac{1}{10}y-2$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Se ha visto que el conjunto solución de la ecuación $Ax + By + C = 0$, son todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación.

En un sistema de dos ecuaciones con dos variables, que tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y = c_1 \\ a_2x+b_2y = c_2 \end{cases}$$

El conjunto solución lo forman todos los pares ordenados que satisfacen ambas ecuaciones, es decir:
$\{(x,y)|a_1x+b_1y=c_1\}\cap\{(x,y)|a_2x+b_2y=c_2\}$

Cada ecuación representa una recta en el plano, entonces, se pueden presentar tres casos:

I. Las rectas se intersecan en un punto. Las rectas sólo coinciden en un punto, por tanto, se dice que el sistema tiene una solución.

Ejemplo

Grafica y determina la solución del siguiente sistema:

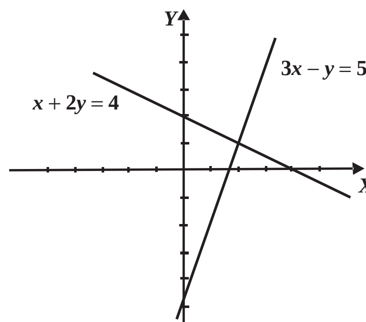
$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases}$$

Solución

Se grafica cada una de las ecuaciones a partir de encontrar las intersecciones con los ejes *XY*.

$x + 2y = 4$		$3x - y = 5$	
Sea $x = 0$	Sea $y = 0$	Sea $x = 0$	Sea $y = 0$
$x+2y=4$	$x+2y=4$	$3x-y=5$	$3x-y=5$
$(0)+2y=4$	$x+2(0)=4$	$3(0)-y=5$	$3x-(0)=5$
$y=\frac{4}{2}=2$	$x=4$	$y=-5$	$x=\frac{5}{3}$
La intersección con el eje *y* es: $(0,2)$	La intersección con el eje *x* es: $(4,0)$	La intersección con el eje *y* es: $(0,-5)$	La intersección con el eje *x* $\left(\frac{5}{3},0\right)$

Gráfica



La solución es el punto donde se intersecan las rectas, en este caso (2, 1)

II. Las rectas son coincidentes. Dos ecuaciones representan rectas coincidentes si al multiplicar una de ellas por un número real *k*, se obtiene la otra.

En un sistema de rectas coincidentes el conjunto solución es infinito, es decir, el conjunto solución son todos los puntos de las rectas.

Ejemplo

Grafica y determina el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x-6y=18 \end{cases}$$

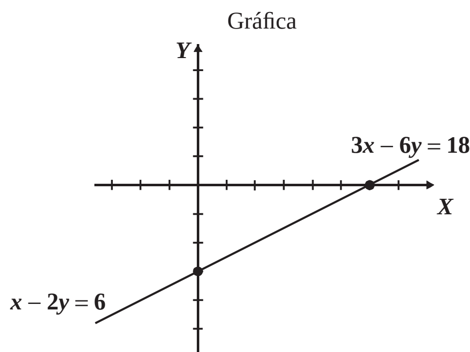
Solución

Se grafica cada recta.

$x-2y=6$		$3x-6y=18$	
Sea $x=0$	Sea $y=0$	Sea $x=0$	Sea $y=0$
$x-2y=6$	$x-2y=6$	$3x-6y=18$	$3x-6y=18$
$(0)-2y=6$	$x-2(0)=6$	$3(0)-6y=18$	$3x-6(0)=18$
$y=\frac{6}{-2}=-3$	$x=6$	$y=\frac{18}{-6}$	$x=\frac{18}{3}$
		$y=-3$	$x=6$
El punto es: $(0,-3)$	El punto es: $(6,0)$	El punto es: $(0,-3)$	El punto es: $(6,0)$

Se observa que las intersecciones de las rectas con los ejes, son los mismos puntos.

Gráfica



Las rectas coinciden en todos sus puntos, por tanto, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.
Se observa que si multiplicamos la ecuación $x-2y=6$, por 3, se obtiene la otra ecuación.

III. Las rectas son paralelas. En este caso, las rectas no tienen ningún punto en común, por tanto, el sistema no tiene solución.

Ejemplo

Grafica y determina el conjunto solución del siguiente sistema:

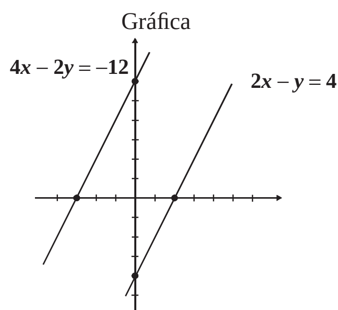
$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x-2y=-12 \end{cases}$$

Solución

Se grafican las rectas.

$2x - y = 4$		$4x - 2y = -12$	
Sea $x = 0$	Sea $y = 0$	Sea $x = 0$	Sea $y = 0$
$2x - y = 4$	$2x - y = 4$	$4x - 2y = -12$	$4x - 2y = -12$
$2(0) - y = 4$	$2x - (0) = 4$	$4(0) - 2y = -12$	$4x - 2(0) = -12$
$y = -4$	$x = \frac{4}{2} = 2$	$y = \frac{-12}{-2}$	$x = \frac{-12}{4}$
	$x = 2$	$y = 6$	$x = -3$
El punto es: $(0, -4)$	El punto es: $(2, 0)$	El punto es: $(0, 6)$	El punto es: $(-3, 0)$

Se localizan los puntos de intersección y se grafican las rectas.



Al graficar las rectas se observa que son paralelas, es decir, no hay un punto común, por consiguiente no hay solución, entonces se dice que el conjunto solución es vacío.

EJERCICIO 81

Grafica y determina el conjunto solución de los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 6x - 9y = 18 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 3x - 15y = -15 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x - 3y = -11 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 10x + 6y = 4 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = -9 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Métodos de solución

Hasta ahora se ha visto cómo resolver de forma gráfica un sistema de ecuaciones con dos variables; sin embargo, este método en algunas ocasiones puede ser poco preciso, por lo que existen procedimientos algebraicos y que además de ser prácticos resultan exactos.

Reducción (suma y resta)

Este método consiste en multiplicar las ecuaciones dadas por algún número, de tal forma que al sumar las ecuaciones equivalentes que resultan, una de las variables se elimina para obtener una ecuación con una incógnita, y al resolverla se determina su valor, para posteriormente sustituirla en alguna de las ecuaciones originales y así obtener el valor de la otra incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+5y=19 \\ 3x-4y=-6 \end{cases}$$

Solución

Se elige la variable a eliminar, en este ejemplo se toma x; para eliminarla se necesita que los coeficientes de x de cada ecuación sean iguales y de distinto signo. La primera ecuación se multiplica por −3 y la segunda se multiplica por 2, posteriormente se suman las ecuaciones y se resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{matrix} (2x+5y=19)(-3) \\ (3x-4y=-6)(2) \end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} -6x-15y=-57 \\ 6x\ \ -8y=-12 \\ \hline -23y=-69 \end{array}$$

$$y=\frac{-69}{-23}$$

$$y=3$$

El valor de $y = 3$ se sustituye en cualquiera de las ecuaciones, para obtener el valor de x.

$$2x+5y=19 \rightarrow 2x+5(3)=19$$

$$2x+15=19$$

$$2x=19-15$$

$$2x=4$$

$$x=\frac{4}{2}$$

$$x=2$$

Se puede comprobar el resultado al sustituir los valores obtenidos en la otra ecuación:

$$3x-4y=-6 \rightarrow 3(2)-4(3)=-6 \rightarrow 6-12=-6 \rightarrow -6=-6$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 2$, $y = 3$

2 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x-3y=-7 \\ 3x+5y=-11 \end{cases}$$

Solución

En este ejemplo se elimina la variable y, entonces se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por 3

$$\begin{matrix} (5x-3y=-7)(5) \\ (3x+5y=-11)(3) \end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} 25x-15y=-35 \\ 9x+15y=-33 \\ \hline 34x\qquad=-68 \end{array}$$

$$x=\frac{-68}{34}=-2$$

(*continúa*)

(*continuación*)

El valor de $x = -2$, se sustituye, en cualquiera de las ecuaciones, para obtener el valor de y.

$$3x+5y=-11 \rightarrow 3(-2)+5y=-11$$
$$-6+5y=-11$$
$$5y=-11+6$$
$$5y=-5$$
$$y=-1$$

Por consiguiente, la solución del sistema es: $x = -2$, $y = -1$

Los siguientes conjuntos indican el conjunto solución de un sistema de rectas coincidentes y paralelas, respectivamente.

$$\{(x,y) \mid 0x+0y=0\} = \{(x,y) \mid x,y \in R\}$$

$$\{(x,y) \mid 0x+0y=a, a \neq 0\} = \varnothing$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 6x-2y=10 \\ 3x-y=5 \end{cases}$$

Solución

La primera ecuación se multiplica por 1 y la segunda por -2 y se suman las ecuaciones equivalentes:

$$\begin{matrix}(6x-2y=10)(1) \\ (3x-y=5)(-2)\end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} 6x-2y=10 \\ -6x+2y=-10 \\ \hline 0x+0y=0 \end{array}$$

Se obtiene la ecuación $0x + 0y = 0$, por tanto, hay un conjunto infinito de soluciones; entonces, se trata de dos rectas coincidentes, y se dice que al conjunto solución lo forman todos los pares ordenados que satisfacen cualquiera de las ecuaciones.

2 Encuentra el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} -x+2y=4 \\ -3x+6y=5 \end{cases}$$

Solución

La primera ecuación se multiplica por -3 y la segunda por 1 y se suman las ecuaciones equivalentes.

$$\begin{matrix}(-x+2y=4)(-3) \\ (-3x+6y=5)(1)\end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} 3x-6y=-12 \\ -3x+6y=5 \\ \hline 0x+0y=-7 \end{array}$$

Resulta la ecuación $0x + 0y = -7$, por consiguiente, el conjunto solución es el vacío.

EJERCICIO 82

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de reducción:

1. $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 12x-18y=13 \\ -12x+30y=-19 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-4y=-26 \\ 2x-3y=-19 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 7x+6y=38 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5a+3b=21 \\ -2a+4b=2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5m+n=-1 \\ 3m+2n=5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 7x+2y=-3 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6u+4v=5 \\ 9u-8v=4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 9x-12y=21 \end{cases}$

11. $\begin{cases} -20x+5y=2 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 7p-q=2 \\ -21p+3q=5 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sustitución

Este método consiste en despejar una de las variables de cualquiera de las dos ecuaciones y sustituir dicho despeje en la ecuación restante, así resulta una ecuación de primer grado, la cual se resuelve para obtener el valor de una de las variables. Este primer valor se sustituye en el despeje para determinar el valor de la variable que falta.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los valores de x y y en el sistema: $\begin{cases} 3x-4y=-11 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$

Solución

En este ejemplo se despeja x de la primera ecuación.

$$3x-4y=-11 \quad \rightarrow \quad 3x=4y-11$$

$$x=\frac{4y-11}{3}$$

Se sustituye el despeje en la otra ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$5x+3y=1 \quad \rightarrow \quad 5\left(\frac{4y-11}{3}\right)+3y=1 \qquad \text{Se multiplica por 3}$$

$$5(4y-11)+9y=3$$
$$20y-55+9y=3$$
$$20y+9y=3+55$$
$$29y=58$$
$$y=\frac{58}{29}$$
$$y=2$$

Se sustituye el valor de $y=2$ en el despeje $x=\frac{4y-11}{3}$

$$x=\frac{4(2)-11}{3}=\frac{8-11}{3}=\frac{-3}{3}=-1$$

Por tanto, los valores son:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

2 Determina el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} -x+y=-7 \\ 5x+3y=3 \end{cases}$$

Solución

Se despeja y de la primera ecuación.

$$-x+y=-7$$
$$y=x-7$$

El despeje se sustituye en la segunda ecuación.

$$5x+3y=3 \rightarrow 5x+3(x-7)=3 \rightarrow 5x+3x-21=3$$
$$8x-21=3$$
$$8x=24$$
$$x=3$$

Se sustituye $x = 3$, en el despeje $y=x-7$

$$y=3-7=-4$$
$$y=-4$$

Finalmente, el punto de intersección del sistema es $(3,-4)$

3 Obtén el conjunto solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x+y=-4 \\ 6x-3y=12 \end{cases}$$

Solución

Se despeja y de la primera ecuación.

$$-2x+y=-4 \rightarrow y=2x-4$$

El despeje se sustituye en la segunda ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$6x-3(2x-4)=12$$
$$6x-6x+12=12$$
$$6x-6x=12-12$$
$$0x=0$$

La ecuación $0x = 0$ indica que las rectas son coincidentes y tienen como conjunto solución todos los números reales, esto significa que el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.

4 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 6x-8y=3 \end{cases}$$

Solución

Se despeja x de la primera ecuación.

$$3x-4y=7 \rightarrow 3x=4y+7 \rightarrow x=\frac{4y+7}{3}$$

El despeje se sustituye en la segunda ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$6\left(\frac{4y+7}{3}\right)-8y=3$$
$$2(4y+7)-8y=3$$
$$8y+14-8y=3$$
$$8y-8y=3-14$$
$$0y=-11 \quad \text{La ecuación no tiene solución}$$

Por tanto, el conjunto solución es vacío.

EJERCICIO 83

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

1. $\begin{cases} 2x+y=-10 \\ x-3y=2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2m-5n=14 \\ 5m+2n=-23 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 6r-5t=-11 \\ 7t-8r=15 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 9x-2y=-3 \\ 7y-12x=17 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 8p-3q=8 \\ 2p+9q=15 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x-4y=32 \\ 5x+y=38 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 7p-3q=-28 \\ 5q-4p=16 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 7x-y=75 \\ 5x-2y=42 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 12u-16v=24 \\ 3u-4v=6 \end{cases}$
10. $\begin{cases} -5x-15y=2 \\ x+3y=7 \end{cases}$
11. $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 8x+4y=36 \end{cases}$
12. $\begin{cases} 4p-3q=-2 \\ 20p-15q=-1 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Igualación

En este método se elige una variable, la cual se despeja de ambas ecuaciones, los despejes se igualan y se resuelve la ecuación de primer grado que resulta. Por último, el valor que se obtiene se sustituye en cualquiera de los despejes para hallar el otro valor.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+6y=-45 \end{cases}$$

Solución

Se despeja x de ambas ecuaciones.

$$2x-3y=9 \qquad\qquad 5x+6y=-45$$
$$2x=3y+9 \qquad\qquad 5x=-6y-45$$
$$x=\frac{3y+9}{2} \qquad\qquad x=\frac{-6y-45}{5}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$\frac{3y+9}{2}=\frac{-6y-45}{5}$$
$$5(3y+9)=2(-6y-45)$$
$$15y+45=-12y-90$$
$$15y+12y=-90-45$$
$$27y=-135$$
$$y=\frac{-135}{27}=-5$$

El valor de $y=-5$ se sustituye en cualquiera de los despejes.

$$x=\frac{3y+9}{2}$$
$$x=\frac{3(-5)+9}{2}=\frac{-15+9}{2}$$
$$x=\frac{-6}{2}=-3$$
$$x=-3$$

Por consiguiente, el punto de intersección es (–3, –5)

2 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 6m-7n=4 \\ 2m-14n=-1 \end{cases}$$

Solución

Se despeja n de ambas ecuaciones.

$$6m-7n=4$$
$$-7n=-6m+4$$
$$n=\frac{-6m+4}{-7}$$

$$2m-14n=-1$$
$$-14n=-2m-1$$
$$n=\frac{-2m-1}{-14}$$

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$\frac{-6m+4}{-7}=\frac{-2m-1}{-14}$$
$$-14(-6m+4)=-7(-2m-1)$$
$$84m-56=14m+7$$
$$84m-14m=7+56$$
$$70m=63$$
$$m=\frac{63}{70}$$
$$m=\frac{9}{10}$$

El valor de $m=\frac{9}{10}$ se sustituye en cualquiera de los despejes.

$$n=\frac{-2m-1}{-14}.$$
$$n=\frac{-2\left(\frac{9}{10}\right)-1}{-14}$$
$$n=\frac{-\frac{14}{5}}{-14}$$
$$n=\frac{14}{(14)(5)}=\frac{1}{5}$$

Por tanto, la solución es:

$$\begin{cases} m=\frac{9}{10} \\ n=\frac{1}{5} \end{cases}$$

3 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ -8x+4y=-20 \end{cases}$$

Solución

Se despeja y de ambas ecuaciones y se obtiene:

$$2x-y=5 \;\rightarrow\; y=\frac{-2x+5}{-1};\; -8x+4y=-20 \;\rightarrow\; y=\frac{8x-20}{4}$$

Se igualan los despejes:

$$\frac{-2x+5}{-1}=\frac{8x-20}{4} \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} 4(-2x+5)&=-1(8x-20)\\ -8x+20&=-8x+20\\ -8x+8x&=-20+20\\ 0x&=0 \end{aligned}$$

La solución son todos los números reales y el conjunto solución corresponde a todos los pares ordenados que satisfacen la ecuación:

$$2x-y=5$$

4 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ -15x-20y=7 \end{cases}$$

Solución

Se despeja x de ambas ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x+4y&=-2\\ 3x&=-4y-2\\ x&=\frac{-4y-2}{3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -15x-20y&=7\\ -15x&=20y+7\\ y&=\frac{20y+7}{-15} \end{aligned}$$

Se igualan los despejes:

$$\frac{-4y-2}{3}=\frac{20y+7}{-15} \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} -15(-4y-2)&=3(20y+7)\\ 60y+30&=60y+21\\ 60y-60y&=21-30\\ 0y&=-9 \end{aligned}$$

La ecuación no tiene solución, por tanto, el conjunto solución es vacío.

EJERCICIO 84

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación:

1. $\begin{cases} x-2y=11 \\ x+5y=-17 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -m+n=-1 \\ 4m-2n=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4a+5b=-3 \\ -7b+3a=-13 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x+3y=18 \\ -5y+x=-23 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3p-2q=-5 \\ 2p+q=-1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x+y=-20 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2a+b=1 \\ -5b-6a=-9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3m-5n=1 \\ 9m+15n=9 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6u-3v=7 \\ 8u-5v=10 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 6x-24y=36 \\ -3x+12y=-18 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+3y=4 \\ -4x-12y=8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3p-9q=5 \\ p-3q=6 \end{cases}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cramer (determinantes)

1. Determinante de 2 × 2. Un determinante de 2 × 2 es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$.

Solución

Se aplica la definición.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = (2)(-6)-(3)(-5) = -12+15 = 3$$

Por tanto, el resultado es 3

2 ¿Cuál es el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{4}{5} & 6 \end{vmatrix}$?

Solución

Se aplica la definición.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{4}{5} & 6 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)(6) - \left(-\frac{4}{5}\right)(3) = -3 + \frac{12}{5} = \frac{-15+12}{5} = -\frac{3}{5}$$

Por consiguiente, el resultado es $-\frac{3}{5}$

3 Determina $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2-b^2 & a-b \end{vmatrix}$.

Solución

Se aplica la definición.

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2-b^2 & a-b \end{vmatrix}=(a)(a-b)-(a^2-b^2)(1)=a^2-ab-a^2+b^2=b^2-ab$$

Por consiguiente, el resultado es b^2-ab

4 Resuelve $\dfrac{\begin{vmatrix} x & 3-x \\ 4 & x-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^2+3 \\ 9 & x+9 \end{vmatrix}}$.

Solución

Se aplica la definición.

$$\frac{\begin{vmatrix} x & 3-x \\ 4 & x-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^2+3 \\ 9 & x+9 \end{vmatrix}}=\frac{(x)(x-3)-(4)(3-x)}{(x^2)(x+9)-(9)(x^2+3)}=\frac{x^2-3x-12+4x}{x^3+9x^2-9x^2-27}=\frac{x^2+x-12}{x^3-27}$$

$$=\frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$$

$$=\frac{x+4}{x^2+3x+9}$$

Finalmente, el resultado es $\dfrac{x+4}{x^2+3x+9}$

EJERCICIO 85

Encuentra el valor de los siguientes determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -6 & -8 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{7}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a & a-b \\ a & b \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} m-n & m+n \\ m & m-n \end{vmatrix}$

9. $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}$

10. $\dfrac{\begin{vmatrix} a & b-a \\ b & a-b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a & a \end{vmatrix}}$

11. $\dfrac{\begin{vmatrix} x & x-2 \\ 5 & x-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 5 \\ 5 & x \end{vmatrix}}$

 Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

2. Deducción del método de Cramer. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Por el método de reducción se determina "*x*"

$$\begin{array}{l} (a_1x+b_1y=c_1)(b_2) \\ (a_2x+b_2y=c_2)(-b_1) \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1 \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=-b_1c_2 \\ \hline (a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2 \end{array}$$

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

De forma análoga se determina "*y*"

$$\begin{array}{l} (a_1x+b_1y=c_1)(-a_2) \\ (a_2x+b_2y=c_2)(a_1) \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -a_1a_2x-a_2b_1y=-a_2c_1 \\ a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2 \\ \hline (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \end{array}$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Finalmente, la solución general del sistema es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ con } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

El método de Cramer consiste en aplicar las definiciones anteriores y según los resultados se puede concluir que las rectas son:

- **Concurrentes:** si los determinantes son diferentes de cero.
- **Coincidentes:** si los determinantes son todos iguales a cero.
- **Paralelas:** si únicamente el determinante denominador es igual a cero.

Rectas concurrentes. Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0, \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

El sistema tiene una solución que es el punto $P(x, y)$

Ejemplo

Aplica el método de Cramer y determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} 4x-y=-9 \\ 3x+5y=-1 \end{cases}$$

Solución

Se aplica la solución general

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -9 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{-45-1}{20+3}=\frac{-46}{23}=-2;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{-4+27}{20+3}=\frac{23}{23}=1$$

Por tanto, la solución es $x = -2$, $y = 1$, las rectas son concurrentes.

Rectas coincidentes. Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

El sistema tiene un conjunto infinito de soluciones, es decir, es un sistema de dos rectas coincidentes. Por tanto, el conjunto está formado por todos los pares ordenados que satisfacen cualquiera de las ecuaciones del sistema dado.

Ejemplo

Aplica el método de Cramer y determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x-2y=8 \end{cases}$$

Solución

Se aplica la solución general

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-8+8}{-4+4}=\frac{0}{0};\ y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{16-16}{-4+4}=\frac{0}{0}$$

El sistema son rectas coincidentes, por tanto, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.

Rectas paralelas. Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

Entonces el sistema no tiene solución, es decir, el sistema representa rectas paralelas.

Ejemplo

Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ -6x+3y=2 \end{cases}$$

Solución

Se aplica la solución general:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{vmatrix}}=\frac{15+2}{6-6}=\frac{17}{0};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\ -6 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{vmatrix}}=\frac{4+30}{6-6}=\frac{34}{0}$$

Por consiguiente, el sistema no tiene solución.

EJERCICIO 86

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Cramer:

1. $\begin{cases}3x-4y=15\\ -2x+3y=-12\end{cases}$

4 $\begin{cases}3x-8y=-13\\ 5y+2x=-19\end{cases}$

7. $\begin{cases}5a-7b=10\\ 8b-6a=-12\end{cases}$

10. $\begin{cases}2x-9y=3\\ 18x-81y=-5\end{cases}$

2. $\begin{cases}4m+9n=-35\\ 3m-8n=18\end{cases}$

5. $\begin{cases}5p-q=7\\ -2p+3q=5\end{cases}$

8. $\begin{cases}10m-3n=19\\ 15m-24n=35\end{cases}$

11. $\begin{cases}5x-11y=-6\\ 40x-88y=-7\end{cases}$

3. $\begin{cases}7a-10b=-64\\ 5b+3a=19\end{cases}$

6. $\begin{cases}9x-4y=8\\ 6x-2y=3\end{cases}$

9. $\begin{cases}7u+2v=-5\\ -35u-10v=25\end{cases}$

12. $\begin{cases}60p-25q=15\\ -12p+5q=-3\end{cases}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de dos ecuaciones que se reducen a lineales

Dado un sistema de ecuaciones con dos variables, éste se transforma a:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}2x+19=3(y-x)\\ 2(x-5y)=5(y-5)-8y\end{cases}$$

Solución

Se realizan las operaciones indicadas en cada ecuación y se simplifican.

$$\begin{aligned}2x+19&=3(y-x)\\ 2x+19&=3y-3x\\ 2x+3x-3y&=-19\\ 5x-3y&=-19\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}2(x-5y)&=5(y-5)-8y\\ 2x-10y&=5y-25-8y\\ 2x-10y-5y+8y&=-25\\ 2x-7y&=-25\end{aligned}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}5x-3y=-19\\ 2x-7y=-25\end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto, por ejemplo, reducción.

$$\begin{aligned}&(5x-3y=-19)(-2)\\&(2x-7y=-25)(5)\\ \hline &-10x+6y=38\\&10x-35y=-125\\ \hline &-29y=-87\\&y=\frac{-87}{-29}\\&y=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5x-3y&=-19\\5x-3(3)&=-19\\5x-9&=-19\\5x&=-19+9\\5x&=-10\\x&=\frac{-10}{5}\\x&=-2\end{aligned}$$

Entonces, la solución del sistema $\begin{cases}2x+19=3(y-x)\\2(x-5y)=5(y-5)-8y\end{cases}$ es $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$

2 Determina la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{10}-\dfrac{y}{5}=\dfrac{1}{4}\\[2mm]\dfrac{2x}{3}+2y=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Solución

Para eliminar las fracciones se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores de cada ecuación.

$$\left(\frac{x}{10}-\frac{y}{5}=\frac{1}{4}\right)(20)\qquad \frac{20x}{10}-\frac{20y}{5}=\frac{20}{4}\qquad 2x-4y=5$$

$$\left(\frac{2x}{3}+2y=\frac{5}{2}\right)(6)\qquad \frac{12x}{3}+12y=\frac{30}{2}\qquad 4x+12y=15$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}2x-4y=5\\4x+12y=15\end{cases}$$

y se elige algún método de solución, en este caso el de igualación.

$$\begin{aligned}2x-4y&=5\\2x&=5+4y\\x&=\frac{5+4y}{2}\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}4x+12y&=15\\4x&=15-12y\\x&=\frac{15-12y}{4}\end{aligned}$$

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación de primer grado:

$$\begin{aligned}\frac{5+4y}{2}&=\frac{15-12y}{4}\\(4)(5+4y)&=(2)(15-12y)\\20+16y&=30-24y\\16y+24y&=30-20\\40y&=10\\y&=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Se sustituye $y=\frac{1}{4}$ en cualquier despeje:

$$\begin{aligned}x&=\frac{5+4y}{2}\\x&=\frac{5+4\left(\frac{1}{4}\right)}{2}\\x&=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}\\x&=3\end{aligned}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Por consiguiente, la solución del sistema $\begin{cases} \frac{x}{10}-\frac{y}{5}=\frac{1}{4} \\ \frac{2x}{3}+2y=\frac{5}{2} \end{cases}$ es $\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$

3 Determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} \frac{a+5}{3}+b=\frac{b+5}{7}+3 \\ \frac{2(a-3)}{5}+1=\frac{b-1}{5} \end{cases}$$

Solución

Se eliminan las fracciones al multiplicarlas por el mínimo común múltiplo y se simplifican las ecuaciones.

$$\left(\frac{a+5}{3}+b=\frac{b+5}{7}+3\right)(21)$$
$$\frac{(21)(a+5)}{3}+(21)(b)=\frac{(21)(b+5)}{7}+(3)(21)$$
$$7(a+5)+(21)(b)=(3)(b+5)+(3)(21)$$
$$7a+35+21b=3b+15+63$$
$$7a+21b-3b=15+63-35$$
$$7a+18b=43$$

$$\left(\frac{2(a-3)}{5}+1=\frac{b-1}{5}\right)(5)$$
$$\frac{10(a-3)}{5}+1(5)=\frac{5(b-1)}{5}$$
$$2(a-3)+5=1(b-1)$$
$$2a-6+5=b-1$$
$$2a-b=-1+6-5$$
$$2a-b=0$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7a+18b=43 \\ 2a-b=0 \end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto, por ejemplo, sustitución.

De la segunda ecuación se despeja a b.

$$2a-b=0$$
$$2a=b$$

Se sustituye $b=2a$ de la primera, y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$7a+18b=43$$
$$7a+18(2a)=43$$
$$7a+36a=43$$
$$43a=43 \rightarrow a=\frac{43}{43}$$
$$a=1$$

Luego, si $b=2a$ entonces $b=2(1)=2$

Por tanto, la solución del sistema $\begin{cases} \frac{a+5}{3}+b=\frac{b+5}{7}+3 \\ \frac{2(a-3)}{5}+1=\frac{b-1}{5} \end{cases}$ es $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

4 Determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} 5\sqrt{3}x+1=2\left(2\sqrt{3}x+\sqrt{2}y\right) \\ \sqrt{3}\left(\sqrt{3}x-1\right)=2\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Solución

Se resuelven los productos indicados de cada ecuación y se simplifican:

$$5\sqrt{3}x+1=2\left(2\sqrt{3}x+\sqrt{2}y\right)$$
$$5\sqrt{3}x+1=4\sqrt{3}x+2\sqrt{2}y$$
$$5\sqrt{3}x-4\sqrt{3}x-2\sqrt{2}y=-1$$
$$\sqrt{3}x-2\sqrt{2}y=-1$$

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}x-1\right)=2\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\left(\sqrt{3}\right)^2x-\sqrt{3}=2y-\frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$\left(\sqrt{3}\right)^2x-\sqrt{3}=2y-\frac{2\sqrt{2}}{2}$$
$$3x-\sqrt{3}=2y-\sqrt{2}$$
$$3x-2y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x-2\sqrt{2}y=-1 \\ 3x-2y=\sqrt{3}-\sqrt{2} \end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto, por ejemplo, Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2\sqrt{2} \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(-1)(-2)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(-2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)(-2)-(3)\left(-2\sqrt{2}\right)}=\frac{2+2\sqrt{6}-4}{-2\sqrt{3}+6\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}-2}{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{6}-1\right)}{2\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{6}-1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}+\sqrt{3}\sqrt{6}-3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{18-3}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{15}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 3 & \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2\sqrt{2} \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-(3)(-1)}{\left(\sqrt{3}\right)(-2)-(3)\left(-2\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}\sqrt{2}+3}{-2\sqrt{3}+6\sqrt{2}}=\frac{6-\sqrt{6}}{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\cdot\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{36\sqrt{2}+12\sqrt{3}-6\sqrt{6}\sqrt{2}-2\sqrt{6}\sqrt{3}}{\left(6\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{36\sqrt{2}+12\sqrt{3}-12\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{72-12}=\frac{30\sqrt{2}}{60}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalmente, la solución del sistema es $x=\frac{\sqrt{3}}{3}; y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

5 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-13 \end{cases}$.

Solución

Se multiplica la primera ecuación por 3

$$\begin{array}{r} 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}= \quad 1\right) \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-13 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=3 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-13 \\ \hline \end{array}$$

Se suman las ecuaciones resultantes para eliminar a la variable y, entonces se resuelve la ecuación que se obtiene.

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{x}=3-13 \rightarrow \frac{5}{x}=-10 \rightarrow x=\frac{5}{-10}=-\frac{1}{2}$$

Luego se sustituye el valor de $x=-\frac{1}{2}$, en la ecuación $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ y se obtiene el valor de la otra variable.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \rightarrow \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{y}=1 \rightarrow -2+\frac{1}{y}=1 \rightarrow \frac{1}{y}=3 \rightarrow y=\frac{1}{3}$$

Por tanto, la solución al sistema de ecuaciones es $x=-\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{3}$

6 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=11 \\ \frac{10}{x}-\frac{2}{y}=-13 \end{cases}$.

Solución

El sistema se representa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right)=11 \\ 10\left(\frac{1}{x}\right)-2\left(\frac{1}{y}\right)=-13 \end{cases}$$

Se propone un cambio de variable:

Sea $u=\frac{1}{x}$ y $v=\frac{1}{y}$, entonces se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2u+3v=11 \\ 10u-2v=-13 \end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto.

Las soluciones del sistema son: $u=-\frac{1}{2}; v=4$

Luego, los resultados se sustituyen en los cambios de variable, para hallar el valor de x y y.

Si $u=-\frac{1}{2}$ entonces:

$$u=\frac{1}{x}$$
$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$$
$$-x=2$$
$$x=-2$$

Si $v=4$ entonces:

$$v=\frac{1}{y}$$
$$4=\frac{1}{y}$$
$$(4)(y)=1$$
$$y=\frac{1}{4}$$

Por consiguiente, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

7 Utiliza el método de Cramer para resolver el sistema: $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2 \\ 2ax-\dfrac{a^2y}{b}=a^2 \end{cases}$

Solución

Se aplica la solución general.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{b} \\ a^2 & -\frac{a^2}{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ 2a & -\frac{a^2}{b} \end{vmatrix}}=\frac{(2)\left(-\frac{a^2}{b}\right)-\left(a^2\right)\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{a^2}{b}\right)-(2a)\left(\frac{1}{b}\right)}=\frac{-\frac{2a^2}{b}-\frac{a^2}{b}}{-\frac{a^2}{ab}-\frac{2a}{b}}=\frac{-\frac{2a^2}{b}-\frac{a^2}{b}}{-\frac{a}{b}-\frac{2a}{b}}$$

$$=\frac{-\frac{3a^2}{b}}{-\frac{3a}{b}}=\frac{\left(-3a^2\right)(b)}{(-3a)(b)}=a$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 2 \\ 2a & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ 2a & -\frac{a^2}{b} \end{vmatrix}}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)\left(a^2\right)-(2a)(2)}{\left(\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{a^2}{b}\right)-(2a)\left(\frac{1}{b}\right)}=\frac{\frac{a^2}{a}-4a}{-\frac{a^2}{ab}-\frac{2a}{b}}=\frac{\frac{a^2-4a^2}{a}}{-\frac{a}{b}-\frac{2a}{b}}$$

$$=\frac{-\frac{3a^2}{a}}{-\frac{3a}{b}}=\frac{\left(-3a^2\right)(b)}{(-3a)(a)}=\frac{-3a^2b}{-3a^2}=b$$

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$$

EJERCICIO 87

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x=y-3 \\ 2y=5+x \end{cases}$

2. $\begin{cases} b=a+7 \\ 3a=2b-17 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -7m=2(3n+13) \\ 7n=2(m-5) \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7(x+5)+21y=3(y+5)+63 \\ 2(x-3)+5=y-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3(m+2)-2(n-4)=2n+m \\ 2(n-1)-m=n \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sqrt{12}x-\sqrt{8}y=2 \\ \sqrt{3}x+\sqrt{2}y=5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{12}=-\frac{2}{3} \\ 2x=3y-22 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y=\frac{9}{10} \\ 5x=2y+1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=-\frac{1}{6} \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{2x}{3}+\frac{5}{6}y=1 \\ \frac{3x}{20}+\frac{y}{5}=\frac{1}{4} \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{2y}{5}=\frac{12}{5} \\ \frac{3x}{14}-\frac{3y}{2}=\frac{33}{14} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{3p-5q}{4}=5 \\ \frac{q+5p}{6}=4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{x+1}{3}+\frac{2y+5}{2}=\frac{1}{2} \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{4}=\frac{17}{12} \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)+\frac{2y}{7}=0 \\ \frac{3x-1}{4}-\frac{2y}{7}=4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3(a+1)-4=\frac{5-(b+1)}{3} \\ 2(a-2)+b=-4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=5 \\ \frac{2}{m}+\frac{3}{n}=12 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=-1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10} \\ -\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=-\frac{7}{10} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-6 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=-16 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \frac{4}{x}-\frac{7}{y}=5 \\ \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=85 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \frac{ax}{2}+\frac{by}{3}=\frac{5ab}{6} \\ \frac{x}{b}+\frac{y}{2a}=\frac{3}{2} \end{cases}$

22. $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=a+b \\ \frac{bx}{a}+\frac{ay}{b}=2ab \end{cases}$

23. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2a}{(a+b)(a-b)} \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=\frac{a-5b}{a^2-b^2} \end{cases}$

24. $\begin{cases} x\sqrt{a}+y\sqrt{b}=\frac{a^2-b^2}{a-b} \\ x+y=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \end{cases}$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales son una herramienta importante para la resolución de problemas que involucran a más de dos variables, cuya aplicación es frecuente en la economía, la administración, la física, etcétera.

1 En una tienda departamental ponen en oferta camisas y pantalones que están fuera de temporada. El primer día se vendieron cinco pantalones y siete camisas, para totalizar $1 060, el segundo día de ventas se invirtieron las cantidades y se ganaron $1 100. ¿Cuál fue el precio de un pantalón y de una camisa?

Solución

Se plantea con dos variables los precios de los artículos:

x: precio de un pantalón.
y: precio de una camisa.

Con los datos del problema se plantean las ecuaciones simultáneas:
Se multiplica el número de objetos por el precio de cada uno de ellos y la suma será la cantidad de las ventas.

$$\begin{cases} 5x + 7y = 1\ 060 \\ 7x + 5y = 1\ 100 \end{cases}$$

Esta ecuación se resuelve por cualquiera de los métodos anteriores, en este caso por el de reducción:

$$\begin{array}{r} -35x - 49y = -7\ 420 \\ 35x + 25y = \quad 5\ 500 \\ \hline -24y = -1\ 920 \end{array}$$

$$y = \frac{-1\ 920}{-24} = 80$$

Se sustituye $y = 80$ en cualquiera de las ecuaciones originales y se obtiene x,

$$5x + 7y = 1\ 060$$
$$5x + 7(80) = 1\ 060$$
$$5x + 560 = 1\ 060$$
$$x = \frac{1\ 060 - 560}{5} = 100$$

Por tanto, el precio de un pantalón es de $100 y el de una camisa de $80

2 Al revisar sus facturas de pago, el señor Méndez se percata de que la empresa de mensajería y paquetería La Paloma, le cobró $1 924 por un envío que en total pesaba 29 kilogramos, entonces pide a su secretaria aclarar cuánto le cobraron por paquete. La compañía aclaró que por los paquetes que envió a Monterrey cobró $92 por kilogramo y por los que mandó a Pachuca $30 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos enviaron a cada ciudad?

Solución

Se plantea con dos variables los datos que se deben encontrar:

x: cantidad de kilogramos que se mandaron a Monterrey
y: cantidad de kilogramos que se enviaron a Pachuca

En total se mandaron 29 kilogramos, entonces,

$$x + y = 29$$

Luego, si por cada kilogramo que se envió a Monterrey y Pachuca se cobró $92 y $30, respectivamente,

$$92x + 30y = 1\ 924$$

entonces, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ 92x + 30y = 1\,924 \end{cases}$$

el cual se resolverá por el método de sustitución:

despeje de x

$$x + y = 29$$
$$x = 29 - y$$

sustitución de $x = 29 - y$ en $92x + 30y = 1\,924$

$$92(29 - y) + 30y = 1\,924$$
$$2\,668 - 92y + 30y = 1\,924$$
$$-62y = 1\,924 - 2\,668$$
$$y = \frac{-744}{-62} = 12$$

Al sustituir $y = 12$ en la primera ecuación,

$$x + y = 29$$
$$x + 12 = 29$$
$$x = 29 - 12$$
$$x = 17$$

Por consiguiente, se mandaron 17 kilos a Monterrey y 12 a Pachuca.

EJERCICIO **88**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 225 y su diferencia sea 135.
2. Si dos ángulos son suplementarios, su suma es de 180°, si la diferencia entre dos ángulos suplementarios es 100°, ¿cuál es el valor de cada ángulo?
3. La diferencia de dos números es 30 y $\frac{1}{5}$ de su suma es 26. Determina los números.
4. Encuentra dos números, cuya diferencia de sus recíprocos sea 2 y la suma de sus recíprocos sea 14.
5. En un parque de diversiones 6 entradas de adulto y 8 de niño cuestan $880 y 4 entradas de adulto y 5 de niño, $570, ¿cuál es el precio de entrada por un adulto y por un niño?
6. Una colección de monedas antiguas de $5 y $10, suman la cantidad de $85. Si hay 12 monedas en total, ¿cuántas monedas de $10 hay?
7. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm, cada lado igual excede en 9 cm al largo de la base. Determina las dimensiones del triángulo.
8. Una agenda electrónica y un traductor cuestan $1 300. Si la agenda electrónica tiene un costo de $200 más que el traductor, ¿cuánto cuesta cada artículo?
9. El hermano de Antonio es 3 veces más grande que él, hace 3 años su hermano era 6 veces más grande que Antonio, ¿cuáles son sus edades actualmente?
10. Los $\frac{2}{3}$ de la suma de 2 números es 92 y los $\frac{3}{8}$ de su diferencia es 3. Encuentra los números.
11. Carlos y Gabriel fueron al supermercado a comprar lo necesario para una reunión con amigos del colegio, llevaban un total de $500 para gastar. Carlos gastó dos terceras partes de su dinero, mientras que Gabriel tres quintas partes, regresaron a casa con un total de $180, ¿cuánto llevaba cada uno al ir al supermercado?
12. Dividir el número 550 en 2 partes, tales que si de los $\frac{3}{5}$ de la primera se resta $\frac{1}{4}$ de la segunda, se obtiene 160, ¿cuáles son las partes?

13. El cociente de 2 números es 5 y su diferencia es 56, ¿cuáles son los números?
14. La suma de 2 números es 52, su diferencia, dividida entre el menor da 5 como cociente y 3 como residuo, ¿cuáles son los números?
15. Si al dinero que tiene Alejandra se le añaden $30, tendrá el triple de lo que tiene Beatriz, y si a Beatriz se le agregan $10, tendrá la mitad de lo que tiene Alejandra, ¿cuánto dinero tiene Alejandra y Beatriz?
16. Una lancha viajó corriente arriba 36 km en 4 horas. Si la corriente hubiese sido del cuádruplo, el viaje lo hubiera hecho en 6 horas, ¿cuál es la rapidez de la lancha y de la corriente?
17. Un granjero posee cierta cantidad de animales, entre gallinas y borregos, de tal forma que al sumar el número de cabezas el resultado es 44 y la suma de las patas es 126. ¿Cuántas gallinas y cuántos borregos tiene?
18. El mismo granjero al comprar los borregos y las gallinas pagó un total de $6 450. Después y al mismo precio, adquirió 10 borregos y 14 gallinas, por los cuales pagó $3 420, ¿cuál es el costo de cada borrego y cada gallina?
19. Un vendedor de libros de ciencias vendió 3 de geometría analítica y 5 de álgebra lineal en $870. Al día siguiente, vendió 2 de geometría analítica y 3 de álgebra lineal en $540, ¿cuál es el precio de cada libro?
20. ¿Cuántos litros de una solución al 6% y cuántos de otra al 30% se deben mezclar para obtener 50 litros de una nueva solución al 12%?
21. Un mexicano especialista en mezclas de café desea exportar el grano en bolsas que contengan un kilogramo. Debe combinar granos de los estados de Chiapas y Veracruz. El costo por kilogramo de estos tipos de café es $30 y $24, respectivamente. Si la bolsa cuesta $25.50, ¿qué cantidad de cada café lleva dicha mezcla?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Métodos para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables

Para resolver un sistema de este tipo, se pueden utilizar los mismos métodos empleados para resolver los sistemas de dos variables, aunque se recomienda emplear el de *reducción* y de *Cramer*.

El sistema puede tener solución única, conjunto infinito de soluciones o no tener solución.

Reducción (suma y resta)

Se procede de la misma forma que en los sistemas de ecuaciones con dos variables, es decir, se toman dos de las tres ecuaciones y se elimina una de las variables. Posteriormente, se toma cualquiera de las ecuaciones que se eligieron y en la que no se utilizó se elimina la misma variable, de tal manera que se obtienen dos ecuaciones con dos variables; al hallar la solución del sistema se determina el valor de las dos variables, después se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales, para obtener la tercer variable.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-3y-5z=-19 \\ 3x-4y+z=-2 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{aligned} 2x-3y-5z&=-19 \quad -------(1) \\ 3x-4y+z&=-2 \quad -------(2) \\ x+y+z&=6 \quad -------(3) \end{aligned}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se toman dos ecuaciones, por ejemplo la ecuación $(1)\text{y}(2)$ y por el método de eliminación se elimina *x*.

$$\begin{array}{l}(2x-3y-5z=-19)(-3)\\(3x-4y+z=-2)(2)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}-6x+9y+15z=57\\6x-8y+\ \ 2z=-4\\\hline\end{array}$$

$$y+17z=53-----(A)$$

Se toman las ecuaciones $(1)\text{y}(3)$, se elimina *x* y se obtiene la ecuación (B)

$$\begin{array}{l}(2x-3y-5z=-19)(1)\\(x+y+z=6)(-2)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}2x-3y-5z=-19\\-2x-2y-2z=-12\\\hline\end{array}$$

$$-5y-7z=-31-----(B)$$

Con las ecuaciones $(A)\text{y}(B)$ el sistema resultante es:

$$\begin{cases}y+17z=53\\-5y-7z=-31\end{cases}$$

Se resuelve el sistema que resulta de las ecuaciones $(A)\text{y}(B)$.

$$\begin{array}{l}(y+17z=53)(5)\\(-5y-7z=-31)(1)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}5y+85z=265\\-5y-7z=-31\\\hline\end{array}$$

$$78z=234$$

$$z=\frac{234}{78}$$

$$z=3$$

Se sustituye el valor de $z=3$ en las ecuaciones (A) o (B) para determinar el valor de *y*.

$$\begin{aligned}y+17z&=53\\y+17(3)&=53\\y+51&=53\\y&=53-51\\y&=2\end{aligned}$$

Los valores $z=3$, $y=2$, se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales.

$$x+y+z=6\rightarrow x+2+3=6$$

$$x+5=6$$

$$x=6-5$$

$$x=1$$

Finalmente, la solución del sistema es $x=1$, $y=2$, $z=3$

2 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases}x+2z=6\\3y-5z=-17\\2x+3y=-1\end{cases}$$

Solución

$$\begin{array}{l}x\qquad +2z=6---------(1)\\\quad 3y-5z=-17-------\ (2)\\2x+3y\qquad =-1--------\ (3)\end{array}$$

Se toman las ecuaciones $(2)\text{y}(3)$ y se elimina a *y*.

$$\begin{array}{r}(3y-5z=-17)(-1)\\(2x+3y\qquad =-1)(1)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}-3y+5z=17\\2x+3y\qquad =-1\\\hline\end{array}$$

$$2x\qquad +5z=16------(A)$$

Se toman las ecuaciones (1) y (A) y se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x+2z=6 \\ 2x+5z=16 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (x+2z=6)(-2) \\ (2x+5z=16)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -2x-4z=-12 \\ 2x+5z=16 \\ \hline z=4 \end{array}$$

El valor de $z=4$ se sustituye en cualquiera de las ecuaciones (1) o (A)

$$x+2z=6$$
$$x+2(4)=6$$
$$x+8=6$$
$$x=6-8$$
$$x=-2$$

Para hallar el valor de y, se sustituye $z=4$, en la ecuación (2)

$$3y-5z=-17$$
$$3y-5(4)=-17$$
$$3y-20=-17$$
$$3y=-17+20$$
$$3y=3$$
$$y=\frac{3}{3}$$
$$y=1$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$$

3 Determina el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y-4z=5 \\ 5x-4y-2z=4 \\ 6x-9y-12z=5 \end{cases}$$

Solución

$$2x-3y-4z=5 \text{ --------- } (1)$$
$$5x-4y-2z=4 \text{ --------- } (2)$$
$$6x-9y-12z=5 \text{ --------- } (3)$$

Se toman las ecuaciones (1) y (2) y se elimina x.

$$\begin{array}{l} (2x-3y-4z=5)(-5) \\ (5x-4y-2z=4)(2) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -10x+15y+20z=-25 \\ 10x-8y-4z=8 \\ \hline \end{array}$$

$$7y+16z=-17 \text{ --------- } (A)$$

Se toman las ecuaciones (2) y (3) y se elimina x.

$$\begin{array}{l} (5x-4y-2z=4)(-6) \\ (6x-9y-12z=5)(5) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -30x+24y+12z=-24 \\ 30x-45y-60z=25 \\ \hline \end{array}$$

$$-21y-48z=1 \text{ --------- } (B)$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Con las ecuaciones (A) y (B), se resuelve el sistema de ecuaciones que se forma:

$$\begin{cases} 7y+16z=-17 \\ -21y-48z=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (7y+16z=-17)(3) \\ (-21y-48z=1)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 21y+48z=-51 \\ -21y-48z=1 \\ \hline 0y+\ 0z=-50 \end{array}$$

No hay solución para la ecuación $0y+0z=-50$, por tanto, el conjunto solución es vacío.

4 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x-5y+2z=6 \\ x-3y-4z=5 \\ 6x-10y+4z=12 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{array}{r} 3x-5y+2z=6 - - - - - - - - - - (1) \\ x-3y-4z=5 - - - - - - - - - - (2) \\ 6x-10y+4z=12 - - - - - - - \ (3) \end{array}$$

Se toman las ecuaciones (1) y (2) y se elimina x.

$$\begin{array}{l} (3x-5y+2z=6)(1) \\ (x-3y-4z=5)(-3) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3x-5y+\ 2z=6 \\ -3x+9y+12z=-15 \\ \hline \end{array}$$

$$4y+14z=-9 - - - - - - - - (A)$$

Se toman las ecuaciones (2) y (3) y se elimina x.

$$\begin{array}{l} (x-3y-4z=5)(-6) \\ (6x-10y+4z=12)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -6x+18y+24z=-30 \\ 6x-10y+\ 4z=12 \\ \hline \end{array}$$

$$8y+28z=-18 - - - - - - - - (B)$$

Se resuelve el sistema que forman las ecuaciones (A) y (B).

$$\begin{cases} 4y+14z=-9 \\ 8y+28z=-18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (4y+14z=-9)(-2) \\ (8y+28z=-18)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -8y-28z=18 \\ 8y+28z=-18 \\ \hline 0y+0z=0 \end{array}$$

Por consiguiente, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.

5 Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{6}-\dfrac{3y}{4}-\dfrac{5z}{6}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{2}=\dfrac{13}{6} \\ \dfrac{3x}{2}+\dfrac{3y}{4}-\dfrac{z}{2}=\dfrac{-7}{2} \end{cases}$$

Solución

Se eliminan las fracciones de cada ecuación al multiplicar por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\left(\frac{x}{6}-\frac{3y}{4}-\frac{5z}{6}=\frac{9}{2}\right)(12) \rightarrow 2x-9y-10z=54--------(1)$$

$$\left(\frac{x}{6}-\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=\frac{13}{6}\right)(6) \rightarrow x-2y-3z=13---------(2)$$

$$\left(\frac{3x}{2}+\frac{3y}{4}-\frac{z}{2}=\frac{-7}{2}\right)(4) \rightarrow 6x+3y-2z=-14--------(3)$$

Se toman las ecuaciones (1) y (2) y se elimina x.

$$\begin{array}{l}(2x-9y-10z=54)(-1)\\(x-2y-3z=13)(2)\end{array} \rightarrow \begin{array}{r}-2x+9y+10z=-54\\ 2x-4y-\ \ 6z=26\\ \hline 5y+4z=-28-------(A)\end{array}$$

Se toman las ecuaciones (2) y (3) y se elimina x.

$$\begin{array}{l}(x-2y-3z=13)(-6)\\(6x+3y-2z=-14)(1)\end{array} \rightarrow \begin{array}{r}-6x+12y+18z=-78\\ 6x+\ 3y-\ \ 2z=-14\\ \hline 15y+16z=-92-------(B)\end{array}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones entre (A) y (B)

$$\begin{cases}5y+4z=-28\\15y+16z=-92\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}(5y+4z=-28)(-3)\\(15y+16z=-92)(1)\end{array} \rightarrow \begin{array}{r}-15y-12z=84\\ 15y+16z=-92\\ \hline 4z=-8\\ z=-\frac{8}{4}\\ z=-2\end{array}$$

El valor de z se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned}5y+4z&=-28\\5y+4(-2)&=-28\\5y-8&=-28\\5y&=-28+8\\5y&=-20\\y&=-\frac{20}{5}\\y&=-4\end{aligned}$$

Luego los valores de $y=-4, z=-2$ se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales, para hallar el valor de x.

$$\begin{aligned}x-2y-3z&=13\\x-2(-4)-3(-2)&=13\\x+8+6&=13\\x+14&=13\\x&=13-14\\x&=-1\end{aligned}$$

Por tanto, la solución es:

$$\begin{cases}x=-1\\y=-4\\z=-2\end{cases}$$

Determinantes

Un determinante de tres por tres es un arreglo rectangular de números de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Para hallar el determinante de un arreglo rectangular de números de la forma anterior, se repiten los 2 primeros renglones y su solución está dada por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2) - (a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 + a_1 \cdot b_3 \cdot c_2 + a_3 \cdot b_2 \cdot c_1)$$

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Se aplican las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Ejemplo

Determina la solución del siguiente sistema de ecuaciones por el método de Cramer.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 12 \\ x - y + 4z = 19 \\ 5x - 3y + z = 8 \end{cases}$$

Solución

Se aplican las fórmulas y se hallan los determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \\ 8 & -3 & 1 \\ 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(-12 + 57 + 64) - (38 - 144 + 8)}{(-3 + 3 + 40) - (2 - 36 + 5)} = \frac{207}{69} = 3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 1 & 19 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 1 & 19 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \\ 3 & 12 & -1 \\ 1 & 19 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{(57-8+240)-(12+96-95)}{(-3+3+40)-(2-36+5)}=\frac{276}{69}=4$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 19 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 19 \\ 5 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{(-24-36+190)-(16-171-60)}{(-3+3+40)-(2-36+5)}=\frac{345}{69}=5$$

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones es: $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases}$

EJERCICIO 89

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} 2x-y+5z=16 \\ x-6y+2z=-9 \\ 3x+4y-z=32 \end{cases}$

2. $\begin{cases} d-e-4f=-4 \\ 2d+2e+f=11 \\ d+e+3f=13 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-2y+3z=10 \\ 2x+y-6z=1 \\ 4x-2y-9z=15 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x+5y-z=4 \\ 10y-6x-3z=1 \\ 4z-15y+9x=-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4n-2m-3r=1 \\ m+3n-5r=-4 \\ 3m-5n+r=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{2}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=7 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=5 \\ \frac{4}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=11 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x-2y+z=16 \\ 2x+3y-8z=2 \\ x-y+3z=14 \end{cases}$

8. $\begin{cases} a+b=3 \\ a-c=8 \\ b-2c=4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} m+r=8 \\ 2n-3r=3 \\ 2m+3n-4r=19 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=2(1+2y)-9z \\ y=2(2z-x)-13 \\ z=2(y+4)+3x \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 2x+y-z=5 \\ x+3y-4z=-5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{2}{a}+\frac{3}{b}-\frac{1}{c}=11 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=7 \\ \frac{3}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=8 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Tres profesores compraron libros: uno de ellos pagó $845 por 3 de álgebra, 5 de geometría analítica y 2 de cálculo diferencial; otro pagó $580 por 2 de geometría analítica, 4 de álgebra y uno de cálculo diferencial; el último de ellos pagó $605 por uno de álgebra, 3 de geometría analítica y 3 de cálculo diferencial. ¿Cuál es el precio de cada libro?

Solución

Sea x: costo del libro de álgebra
y: costo del libro de geometría analítica
z: costo del libro de cálculo diferencial

El sistema de ecuaciones que resuelve el problema es: $\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 845 \ldots\ldots (1) \\ 4x + 2y + z = 580 \ldots\ldots (2) \\ x + 3y + 3z = 605 \ldots\ldots (3) \end{cases}$

Se aplica el método de reducción para eliminar z:

Al multiplicar por –2 la ecuación (2) y sumar con la ecuación (1)

$$\begin{array}{r} -8x - 4y - 2z = -1\,160 \\ 3x + 5y + 2z = 845 \\ \hline -5x + y = -315 \end{array}$$

Al multiplicar por –3 la segunda ecuación y sumar la ecuación (3)

$$\begin{array}{r} -12x - 6y - 3z = -1\,740 \\ x + 3y + 3z = 605 \\ \hline -11x - 3y = -1\,135 \end{array}$$

Se realiza un nuevo sistema con las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{r} 3(-5x + y = -315) \\ -11x - 3y = -1\,135 \\ \hline -15x + 3y = -945 \\ -11x - 3y = -1\,135 \\ \hline -26x = -2\,080 \\ x = \dfrac{-2\,080}{-26} \\ x = 80 \end{array}$$

Si $x = 80$, entonces

$$-5(80) + y = -315 \rightarrow -400 + y = -315 \rightarrow y = -315 + 400 = 85$$

Si $x = 80$, $y = 85$, por tanto

$$3(80) + 5(85) + 2z = 845 \rightarrow 240 + 425 + 2z = 845 \rightarrow 2z = 845 - 240 - 425$$
$$= \frac{845 - 240 - 425}{2} = 90$$

Por consiguiente, el libro de álgebra tiene un precio de $80, el de geometría analítica de $85 y el de cálculo diferencial cuesta $90

EJERCICIO 90

Resuelve los siguientes problemas:

1. José compró cierto día 3 paletas, 5 helados y 2 dulces, por todo pagó $28. Al día siguiente, adquirió 4 paletas, 3 helados y 5 dulces con $25 y el último día, una paleta, un helado y un dulce que le costaron $7. ¿Cuál es el costo de cada golosina?

2. Miguel, Fabián y Juan Carlos cierto día fueron a comprar ropa. Miguel compró 3 camisas, 4 pantalones y 3 playeras; Fabián, 5 camisas, 3 pantalones y 4 playeras, y Juan Carlos, 2 camisas, 6 pantalones y una playera. Si pagaron $4 100, $4 600 y $4 000, ¿cuál es el precio de cada prenda?
3. Eduardo, Hugo y Arturo fueron a comprar ropa. Eduardo se compró 3 playeras, 2 pantalones y 5 pares de calcetas y pagó $1 710. Hugo adquirió 2 playeras, 3 pantalones y 4 pares de calcetas con $2 090 y Arturo, 4 playeras, 2 pantalones y 3 pares de calcetas por $1 730. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
4. Un número está formado por 3 dígitos, el dígito de las centenas es la suma de los otros dos, la suma de las decenas y centenas es igual a 7 veces las unidades. Determina el número, de tal manera que si se invierten los dígitos, la diferencia sea 594.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Descomposición de una fracción algebraica en suma de fracciones parciales

Al realizar una suma de fracciones se obtiene la simplificación de la misma, por ejemplo:

$$\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)+1(x+3)}{(x+3)(x+2)}=\frac{2x+4+x+3}{x^2+3x+2x+6}=\frac{3x+7}{x^2+5x+6}$$

Sin embargo, en ocasiones es necesario descomponer una fracción como la suma de sus fracciones parciales, esto es, realizar el proceso inverso.

Caso I. Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y

$Q(x) = (x + x_1)(x + x_2) \cdot \ldots \cdot (x + x_n)$, y ninguno se repite, se puede descomponer en la suma de las fracciones parciales como sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x+x_1}+\frac{B}{x+x_2}+\ldots+\frac{Z}{x+x_n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa $\frac{3x+1}{x^2-x-6}$ como una suma de fracciones parciales.

Solución

Se factoriza el denominador y a cada factor lineal le corresponde una constante como numerador:

$$\frac{3x+1}{x^2-x-6}=\frac{3x+1}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

Se desarrolla la suma de fracciones

$$\frac{3x+1}{(x-3)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

Para que se cumpla esta igualdad se igualan los numeradores, el resultado es el siguiente:

$$3x + 1 = A(x + 2) + B(x - 3)$$
$$3x + 1 = Ax + 2A + Bx - 3B$$

Al agrupar los términos que contienen x y los independientes, resulta:

$$3x + 1 = x(A + B) + 2A - 3B$$

(continúa)

(*continuación*)

Entonces se genera un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\begin{cases} A+B=3 \\ 2A-3B=1 \end{cases}$ que al resolverlo da como resultado $A=2$ y $B=1$

Por tanto, la fracción como suma de parciales es:

$$\frac{3x+1}{x^2-x-6} = \frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+2}$$

2 Expresa $\frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}$ como una suma de fracciones parciales.

Solución

Se descompone en factores el denominador de la fracción:

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2+2x} = \frac{x+4}{x(x+2)(x+1)}$$

A cada denominador le corresponde una constante como sigue:

$$\frac{x+4}{x(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+1}$$

Se resuelve la suma de fracciones

$$\frac{x+4}{x(x+2)(x+1)} = \frac{A(x+2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x+1)}$$

Los numeradores se igualan:

$$\begin{aligned} x+4 &= A(x+2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x+2) \\ x+4 &= A(x^2+3x+2)+B(x^2+x)+C(x^2+2x) \\ x+4 &= Ax^2+3Ax+2A+Bx^2+Bx+Cx^2+2Cx \end{aligned}$$

Se agrupan términos semejantes:

$$x+4 = x^2(A+B+C)+x(3A+B+2C)+2A$$

Al igualar los respectivos coeficientes, se obtiene el siguiente sistema, $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+B+2C=1 \\ 2A=4 \end{cases}$

El cual se resuelve y el resultado es: $A=2$, $B=1$ y $C=-3$

Por tanto, la fracción expresada como suma de fracciones parciales es:

$$\frac{x+4}{x(x+2)(x+1)} = \frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x+1}$$

3 ¿Cuál es la descomposición en fracciones parciales $\frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}$?

Solución

Se descompone el denominador:

$$\frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x} = \frac{4x^2-2x+1}{x(4x^2-1)} = \frac{4x^2-2x+1}{x(2x+1)(2x-1)}$$

a cada factor del denominador le corresponde una constante de la siguiente manera:

$$\frac{4x^2-2x+1}{x(2x+1)(2x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{2x-1}$$

Al resolver la fracción del lado derecho:

$$\frac{4x^2-2x+1}{x(2x+1)(2x-1)}=\frac{A(2x+1)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(2x+1)}{x(2x+1)(2x-1)}$$

Al igualar los numeradores se obtiene:

$$4x^2-2x+1=A(2x+1)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(2x+1)$$
$$4x^2-2x+1=A(4x^2-1)+B(2x^2-x)+C(2x^2+x)$$
$$4x^2-2x+1=4Ax^2-A+2Bx^2-Bx+2Cx^2+Cx$$

Al agrupar términos semejantes, se determina que:

$$4x^2-2x+1=x^2(4A+2B+2C)+x(-B+C)-A$$

Al igualar los coeficientes se obtiene el siguiente sistema, $\begin{cases}4A+2B+2C=4\\-B+C=-2\\-A=1\end{cases}$

Este sistema de ecuaciones se resuelve por cualquier método algebraico, del cual resultarán los siguientes valores, $A=-1$, $B=3$ y $C=1$, por tanto, la descomposición de fracciones parciales es:

$$\frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}=-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x+1}+\frac{1}{2x-1}$$

Caso II. Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y

$Q(x)=(x+x_1)^n(x+x_2)^n\cdot\ldots\cdot(x+x_3)^n$, todo factor que se repite n veces, se descompone en la suma de fracciones parciales como sigue:

$$\frac{A}{(x+x_1)}+\frac{B}{(x+x_1)^2}+\ldots+\frac{Z}{(x+x_1)^n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa la fracción: $\frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2+x}$ como una suma de fracciones parciales.

Solución

Se descompone el denominador en factores:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2+x}=\frac{x^2+x-1}{x(x^2+2x+1)}=\frac{x^2+x-1}{x(x+1)^2}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

A cada denominador le corresponde una constante como numerador:

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

Se resuelve la suma de fracciones:

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

Se igualan los numeradores:

$$x^2+x-1 = A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx$$

Al agrupar términos semejantes se determina que:

$$x^2+x-1 = x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A$$

Se igualan los coeficientes de ambos lados para obtener el siguiente sistema, $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B+C=1 \\ A=-1 \end{cases}$

Que al resolverlo por cualquier método, da como resultado: $A=-1$, $B=2$ y $C=1$, por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2+x} = -\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

2 ¿Cuál es la descomposición como una suma de fracciones parciales de $\frac{8+3x-x^2}{2x^3+11x^2+20x+12}$?

Solución

Se descompone el denominador:

$$\frac{8+3x-x^2}{2x^3+11x^2+20x+12} = \frac{8+3x-x^2}{(2x+3)(x+2)^2}$$

A cada factor lineal le corresponde una constante como numerador,

$$\frac{8+3x-x^2}{(2x+3)(x+2)^2} = \frac{A}{2x+3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

Al resolver la suma de fracciones parciales resulta que:

$$\frac{8+3x-x^2}{(2x+3)(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2+B(2x+3)(x+2)+C(2x+3)}{(2x+3)(x+2)^2}$$

Se desarrollan los productos e igualan los numeradores:

$$8+3x-x^2 = A\left(x^2+4x+4\right)+B\left(2x^2+7x+6\right)+C(2x+3)$$

Ahora, al agrupar términos semejantes,

$$8+3x-x^2 = x^2(A+2B)+x(4A+7B+2C)+4A+6B+3C$$

Se igualan los coeficientes de ambos lados para formar el siguiente sistema, $\begin{cases} A+2B=-1 \\ 4A+7B+2C=3 \\ 4A+6B+3C=8 \end{cases}$

Que al resolverlo por cualquier método se determina que: $A=5$, $B=-3$ y $C=2$, por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{8+3x-x^2}{2x^3+11x^2+20x+12} = \frac{5}{2x+3}-\frac{3}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}$$

EJERCICIO **91**

Descompón en suma de fracciones parciales las siguientes fracciones.

1. $\frac{5x+1}{(x+1)(x-1)}$
2. $\frac{29x-56}{(3x-7)(2x-3)}$
3. $\frac{8}{(5x-4)(5x+4)}$
4. $\frac{x-12}{(x+2)(x-5)}$
5. $\frac{19-4x}{x^2-11x+28}$
6. $\frac{2(2x+7)}{4x^2-1}$
7. $\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$
8. $\frac{5x-13}{6x^2+13x-5}$
9. $\frac{5x+1}{12+x-x^2}$
10. $\frac{-11(x+3)}{14-3x-2x^2}$
11. $\frac{3x-5}{9x^2-12x+4}$
12. $\frac{4x^2+7x-12}{x(x+2)(x-3)}$
13. $\frac{2x^2+7x+14}{(x+1)(x-2)(x+4)}$
14. $\frac{3x^2-5x-17}{(x+3)(x-2)^2}$
15. $\frac{16x^2-48x+15}{2x^3-7x^2+3x}$
16. $\frac{9x^2+4x-4}{x^3+x^2-2x}$
17. $\frac{30-30x-29x^2}{6x^3+5x^2-6x}$
18. $\frac{2x^2-6x-26}{x^3+2x^2-5x-6}$
19. $\frac{4x^2+9x+11}{2x^3-x^2-5x-2}$
20. $\frac{-x^2}{x^3+3x^2+3x+1}$
21. $\frac{-x^3-2x^2+5x-1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$
22. $\frac{2x^3-30x}{x^4-18x^2+81}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Caso III. Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y $Q(x)$ contiene factores de segundo grado y ninguno de ellos se repite, entonces se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{a_1x^2+b_1x+c_1}+...+\frac{Mx+N}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa como una suma de fracciones parciales la siguiente expresión: $\frac{4x^2+6}{x^3+3x}$

Solución

Se factoriza el denominador:

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x} = \frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}$$

El denominador se conforma de un factor lineal y un factor cuadrático, entonces la suma se representa como:

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

Se resuelve la suma de fracciones y se igualan numeradores:

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x}+\frac{(Bx+C)}{x^2+3}=\frac{A(x^2+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+3)}$$

$$4x^2+6=A(x^2+3)+(Bx+C)(x)$$
$$4x^2+6=Ax^2+3A+Bx^2+Cx$$
$$4x^2+6=x^2(A+B)+Cx+3A$$

Para que se cumpla la igualdad, los numeradores deben ser iguales, entonces se forma el siguiente sistema:

$\begin{cases} A+B=4 \\ C=0 \\ 3A=6 \end{cases}$, que al resolverse da: $A=2$, $B=2$ y $C=0$, por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x} = \frac{2}{x}+\frac{2x+0}{x^2+3}=\frac{2}{x}+\frac{2x}{x^2+3}$$

2 Descompón en una suma de fracciones parciales la expresión: $\frac{4x^3-11x^2+17x}{(x^2-3x+1)(x^2+2)}$

Solución

El denominador contiene únicamente factores de segundo grado, por tanto, las fracciones parciales quedan de la siguiente manera:

$$\frac{4x^3-11x^2+17x}{(x^2-3x+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-3x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Al resolver la suma de fracciones e igualando numeradores se obtiene:

$$4x^3-11x^2+17x = (Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2-3x+1)$$
$$4x^3-11x^2+17x = Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx^3-3Cx^2+Cx+Dx^2-3Dx+D$$

Se agrupan términos semejantes:

$$4x^3 - 11x^2 + 17x = x^3(A+C) + x^2(B-3C+D) + x(2A+C-3D) + 2B+D$$

Para que se cumpla la igualdad, los numeradores deben ser iguales, entonces:

$$\begin{aligned} A + C &= 4 \\ B - 3C + D &= -11 \\ 2A + C - 3D &= 17 \\ 2B + D &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se determina que: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ y $D = -4$
Por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{4x^3 - 11x^2 + 17x}{(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 2)} = \frac{x+2}{x^2 - 3x + 1} + \frac{3x - 4}{x^2 + 2}$$

Caso IV. Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y $Q(x)$ contiene factores de segundo grado y alguno de ellos se repite, entonces a cada factor de la forma: $(ax^2 + bx + c)^n$ le corresponde una suma de fracciones:

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \ldots + \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

Ejemplo

Expresa en suma de fracciones parciales la siguiente: $\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^5 + 2x^3 + x}$

Solución

Al factorizar el denominador se obtiene:

$$\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x(x^2+1)^2}$$

La descomposición es:

$$\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Se resuelve la suma de fracciones:

$$\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x) + (Dx+E)(x)(x^2+1)}{x(x^2+1)^2}$$

Se igualan los numeradores y se desarrollan los productos:

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^2 + Cx + Dx^4 + Dx^2 + Ex^3 + Ex$$

Se agrupan también los términos semejantes:

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = x^4(A+D) + x^3(E) + x^2(2A+B+D) + x(C+E) + A$$

(*continúa*)

(*continuación*)

De esta igualdad se forma el sistema de ecuaciones $\begin{cases} A+D=3 \\ E=1 \\ 2A+B+D=4 \\ C+E=6 \\ A=3 \end{cases}$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes valores:

$$A=3,\ B=-2,\ C=5,\ D=0 \text{ y } E=1$$

Por tanto, la descomposición como suma de fracciones parciales es:

$$\frac{3x^4+x^3+4x^2+6x+3}{x^5+2x^3+x} = \frac{3}{x}+\frac{5-2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{x^2+1}$$

EJERCICIO 92

Expresa como una suma de fracciones parciales a las siguientes:

1. $\dfrac{4x^2+x-9}{x^3-3x}$

2. $\dfrac{4x^2-x-1}{3x^3+3x^2+x+1}$

3. $\dfrac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x-2}$

4. $\dfrac{x^2-19}{x^4-2x^2-35}$

5. $\dfrac{3x^2+2x-2}{x^3-1}$

6. $\dfrac{-6x^3+x^2-32x+3}{x^4+8x^2+15}$

7. $\dfrac{x^4-2x^3-4x^2-11x-6}{x^5+x^3-6x}$

8. $\dfrac{5x^2-9x-8}{x^3-5x^2+5x+3}$

9. $\dfrac{11x^3-5x^2-30x-8}{2x^4+3x^2-35}$

10. $\dfrac{-7x^2-42x+24}{x^3+5x^2-3x}$

11. $\dfrac{5x^2-18x-1}{2x^3+4x^2-6x-20}$

12. $\dfrac{x^4+x^3-5x^2-2x+9}{x^5-6x^3+9x}$

13. $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{\left(x^2+x-1\right)^2}$

14. $\dfrac{-5x^4-9x^2+x-7}{x^6+3x^4+3x^2+1}$

15. $\dfrac{2x^4-x^3-9x^2+3x+11}{x^5+x^4-4x^3-4x^2+4x+4}$

16. $\dfrac{2x^4+10x^3+24x^2+27x+16}{x\left(x^2+3x+4\right)^2}$

17. $\dfrac{-x^5+x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x^6+2x^4+x^2}$

18. $\dfrac{4\left(x^2+1\right)}{x^8+4x^6+4x^4}$

19. $\dfrac{3x^5-3x^3+4x^2-6x-5}{\left(x^2-2\right)^2\left(x^2+1\right)}$

20. $\dfrac{2x^5-4x^4+13x^3-3x^2+5x-5}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-x+1\right)^2}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 20

Potenciación

Reseña HISTÓRICA

Exponente de una potencia

El primero que colocó el exponente en una posición elevada con respecto a la línea base fue Nicolás Chuquet en el siglo XV. Sin embargo, lo colocaba directamente en el coeficiente, de modo que $5x^2$, lo escribía como 5^2.

En 1636 James Hume publicó una edición del álgebra de Viète en la que utilizó una notación prácticamente igual a la actual, salvo en el detalle de utilizar números romanos. Así, $5x^2$ lo escribía como $5x^{ii}$.

Sería Descartes quien sustituyó en su obra *Geometrie* los incómodos numerales romanos por los indoarábigos. No deja de ser curioso, sin embargo, que para la potencia cuadrada no utilizara la notación elevada, sino que siguiera escribiendo, como muchos hasta entonces, x^2 como xx.

Estas expresiones son residuos de la época griega, en la cual los productos xx (x^2) o xxx (x^3) sólo se entendían como áreas o volúmenes. Por eso nosotros, cuando calculamos el producto de un número x por sí mismo, decimos que estamos elevando x "al cuadrado", aunque no pensemos en absoluto en calcular el área de un cuadrado de lado x.

Definición

Es la operación en la cual la cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente.

➲ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a ...}_{n \text{ veces}}$, **donde *a* es la base y *n* el exponente.**

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Al desarrollar x^4, se obtiene:

Solución

Al ser el exponente 4, la base x se multiplica 4 veces ella misma:

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

Por consiguiente, cuando se tiene x^4, es lo mismo que si se multiplica 4 veces la base x.

2 ¿Cuál es el resultado de $(-2x)^3$?

Solución

Se multiplica la base por sí misma tres veces, por tanto:

$$(-2x)^3 = (-2x)(-2x)(-2x) = -8x^3$$

Finalmente, se obtiene: $(-2x)^3 = -8x^3$

Teoremas de los exponentes

Si $a, b, m, n \in R$ y $a, b \neq 0$, entonces:

➲ $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

Demostración

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ veces}} \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ veces}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ veces}} = a^{n+m}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $x^3 \cdot x^5$?

Solución

Se aplica el teorema y se obtiene:

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

2 Encuentra el resultado de $(-5m)(8m^3)(-2m^2)$.

Solución

Se multiplican los coeficientes $(-5)(8)(-2)$, después se aplica el teorema y se obtiene:

$$(-5m)(8m^3)(-2m^2) = 80m^{1+3+2} = 80m^6$$

➲ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Demostración

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{\cancel{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m\text{ veces}}}{\underbrace{\cancel{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}}_{n\text{ veces}}} = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m-n\text{ veces}} = a^{m-n}$$

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es el resultado de $\dfrac{m^5}{m^2}$?

Solución

Se aplica el teorema y se obtiene:

$$\frac{m^5}{m^2} = m^{5-2} = m^3$$

2 Encuentra el resultado de: $\dfrac{-27m^7}{-3m^3}$.

Solución

Primero se dividen los coeficientes y después se aplica el teorema:

$$\frac{-27m^7}{-3m^3} = \frac{-27}{-3}m^{7-3} = 9m^4$$

➲ $a^0 = 1$

Demostración

Al aplicar el teorema de división, con $m = n$, resulta que:

$$1 = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $\left(-12m^7\right)^0$?

Solución

Se aplica el teorema y se determina que:

$$\left(-12m^7\right)^0 = 1$$

➲ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Demostración

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $(-3x)^{-2}$?

Solución

Se aplica el teorema y después se desarrolla la potencia:

$$(-3x)^{-2} = \frac{1}{(-3x)^2} = \frac{1}{(-3x)(-3x)} = \frac{1}{9x^2}$$

Por tanto, se tiene que: $(-3x)^{-2} = \frac{1}{9x^2}$

- $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$

Demostración

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n)(a^n)(a^n)\ldots(a^n)}_{m \text{ veces}} = a^{n+n+n+\ldots+n} = a^{n \cdot m}$$

Ejemplo

¿Cuál es una expresión equivalente a $(m^4)^3$?

Solución

Se aplica el teorema y se determina que:

$$(m^4)^3 = m^{(4)(3)} = m^{12}$$

- $\boldsymbol{(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n}$

Demostración

Al aplicar el teorema de multiplicación, con $m = n$, entonces se obtiene:

$$(a \cdot b \cdot c)^n = \underbrace{(a \cdot b \cdot c)(a \cdot b \cdot c)\ldots(a \cdot b \cdot c)}_{n \text{ veces}} = (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)(c \cdot c \cdot \ldots \cdot c) = a^n b^n c^n$$

Ejemplo

Determina una expresión equivalente a: $(x^3 \cdot y^4 \cdot z^2)^4$.

Solución

Al aplicar el teorema se obtiene que: $(x^3 \cdot y^4 \cdot z^2)^4 = x^{(3)(4)} y^{(4)(4)} z^{(2)(4)} = x^{12} \cdot y^{16} \cdot z^8$

- $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Demostración

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}^{n \text{ veces}} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de desarrollar $\left(\frac{m^4 \cdot n^3}{r^2}\right)^5$?

Solución

Aplica el teorema, y determina que:

$$\left(\frac{m^4\cdot n^3}{r^2}\right)^5=\frac{\left(m^4\cdot n^3\right)^5}{\left(r^2\right)^5}=\frac{\left(m^4\right)^5\cdot\left(n^3\right)^5}{\left(r^2\right)^5}=\frac{m^{20}\cdot n^{15}}{r^{10}}$$

➡ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$

Demostración

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de desarrollar $\left(\frac{2x}{3y}\right)^{-2}$?

Solución

Se aplica el teorema y se obtiene que:

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^{-2}=\left(\frac{3y}{2x}\right)^2$$

Luego, al elevar al cuadrado se tiene el desarrollo:

$$\left(\frac{3y}{2x}\right)^2=\frac{(3y)^2}{(2x)^2}=\frac{9y^2}{4x^2}$$

Por tanto, $\left(\frac{2x}{3y}\right)^{-2}=\frac{9y^2}{4x^2}$

EJERCICIO 93

Aplica la definición y desarrolla las siguientes potencias:

1. $\left(3x^2\right)^3$
2. $(-4xy)^2$
3. $\left(\frac{2}{5}a^4\right)^4$
4. $\left(-6x^2y^3\right)^3$
5. $-\left(2a^6\right)^5$
6. $\left(\frac{7}{4}m^{-2}\right)^2$
7. $\left(\frac{6a}{3b}\right)^5$
8. $\left[-(2ax)^2\right]^2$

Simplifica las siguientes expresiones y muestra el resultado sin exponentes negativos:

9. $(3y)\left(-5y^2\right)$
10. $x^3y^4x^{-2}y^3$
11. $x^{\frac{4}{5}}x^{-\frac{2}{5}}x^{\frac{3}{5}}$
12. $\left(-m^3n^{-1}\right)\left(m^{-2}n^2\right)$
13. $\frac{a^5}{a^{-3}}$
14. $\frac{9m^{-4}}{m^2}$
15. $\frac{3a^5b^{-7}}{a^3b^{-6}}$
16. $\frac{m^3n^{-5}}{m^{-2}n^{-2}}$
17. $\frac{3a^{-2}b^2}{17a^2b^3}$
18. $\left(x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{6}}\right)^6$
19. $\left(-\frac{1}{3}m^2\right)^5$
20. $(-2x)^4$

21. $-9x^0$

22. $2(x-5y)^0$

23. $5x^{-3}$

24. $-(6x)^{-2}$

25. $\left(a^{-3}b^2\right)^{-1}$

26. $\left(b\cdot b^2\cdot b^3\right)^{-2}$

27. $\left(z^{-2}\cdot z^3\cdot z^0\right)^{-3}$

28. $\left[(x+2y)^{-3}\right]^{-2}$

29. $\left(2a^3\right)^2(3a)^3$

30. $\left(\frac{4}{3}x^2y^3\right)^3\left(\frac{3}{16x^5}\right)^2$

31. $\frac{\left(4x^3\right)^2}{\left(-2x^5\right)^3}$

32. $\frac{\left(-a^4b^5\right)^4}{\left(a^8b^{10}\right)^2}$

33. $\frac{(ab)^2\left(a^2b^2\right)^3}{\left(a^3b^3\right)^2}$

34. $\frac{\left(6a^4\right)^5}{\left(2a^2\right)^2(3a)^3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simplificación

Se aplican los teoremas de los exponentes, según se presenten en la expresión; esto significa que el orden en que se realicen estará determinado por las operaciones correspondientes, así como por los signos de agrupación que estén involucrados.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica la siguiente expresión y da el resultado con exponentes positivos.

$$\left(x^2y^{-2}\right)^{-3}$$

Solución

Se aplica el teorema $(a\cdot b)^n = a^n\, b^n$ y posteriormente se realiza el producto de los exponentes.

$$\left(x^2y^{-2}\right)^{-3} = \left(x^2\right)^{-3}\left(y^{-2}\right)^{-3} = x^{-6}y^6$$

El elemento con exponente negativo se transforma a potencia positiva y se realiza la multiplicación de fracciones.

$$x^{-6}y^6 = \frac{1}{x^6}\cdot y^6 = \frac{y^6}{x^6}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{y^6}{x^6}$

2 Simplifica la siguiente expresión y elimina los exponentes negativos.

$$\frac{\left(x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Solución

En esta expresión la base involucrada es el binomio x^2+1, por lo que se trabaja únicamente con los exponentes, se simplifica el numerador y después se simplifica la división como sigue:

$$\frac{\left(x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \left(x^2+1\right)^{-1}$$

Al eliminar el exponente negativo la expresión resultante es:

$$\left(x^2+1\right)^{-1} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^1} = \frac{1}{x^2+1}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $\frac{1}{x^2+1}$

3 Simplifica la siguiente expresión:

$$\left(\frac{6x^3y^{-2}z^4}{3x^{-1}y^4z^3}\right)^{-2}$$

Solución

Se realiza la división dentro del paréntesis:

$$\left(\frac{6x^3y^{-2}z^4}{3x^{-1}y^4z^3}\right)^{-2} = \left(2x^{3-(-1)}y^{-2-4}z^{4-3}\right)^{-2} = \left(2x^4y^{-6}z\right)^{-2}$$

Se eleva cada uno de los factores al exponente "–2", aquellos que resulten con exponente negativo se transforman a su expresión equivalente con exponente positivo hasta obtener la simplificación deseada.

$$\left(2x^4y^{-6}z\right)^{-2} = 2^{-2}x^{-8}y^{12}z^{-2} = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{x^8}\cdot y^{12}\cdot\frac{1}{z^2} = \frac{y^{12}}{4x^8z^2}$$

4 Simplifica al máximo la siguiente expresión:

$$\frac{\left(2m^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{5}{6}}\right)^6}{\left(2m^{-2}n^6\right)^{-1}\left(2mn\right)^5}$$

Solución

Se resuelven las potencias para cada uno de los paréntesis:

$$\frac{\left(2m^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{5}{6}}\right)^6}{\left(2m^{-2}n^6\right)^{-1}\left(2mn\right)^5} = \frac{2^6m^{\frac{6}{3}}n^{\frac{30}{6}}}{\left(2^{-1}m^2n^{-6}\right)\left(2^5m^5n^5\right)} = \frac{2^6m^2n^5}{\left(2^{-1}m^2n^{-6}\right)\left(2^5m^5n^5\right)}$$

Se multiplican los factores del denominador y por último se realiza la división:

$$\frac{2^6m^2n^5}{\left(2^{-1}m^2n^{-6}\right)\left(2^5m^5n^5\right)} = \frac{2^6m^2n^5}{2^{-1+5}m^{2+5}n^{-6+5}} = \frac{2^6m^2n^5}{2^4m^7n^{-1}} = 2^{6-4}m^{2-7}n^{5-(-1)} = 2^2m^{-5}n^6$$

El resultado contiene exponentes negativos, entonces se convierte a exponente positivo para obtener la simplificación final:

$$2^2m^{-5}n^6 = 2^2\cdot\frac{1}{m^5}\cdot n^6 = \frac{4n^6}{m^5}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{4n^6}{m^5}$

5 Simplifica la siguiente expresión al máximo y que no contenga exponentes negativos.

$$\left(\frac{\left(x^{-3}y^{-1}z^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{2}y^{4}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{-2}y^{-3}z^{-1}\right)^{-1}}\right)^{3}$$

Solución

Se desarrollan los paréntesis internos al elevar cada uno de los factores al exponente correspondiente:

$$\left(\frac{\left(x^{-3}y^{-1}z^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{2}y^{4}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{-2}y^{-3}z^{-1}\right)^{-1}}\right)^{3}=\left(\frac{\left(x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{2}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}$$

Se resuelve el producto en el numerador de la fracción y se realiza la división:

$$\left(\frac{\left(x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{2}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}=\left(\frac{x^{-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}z}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}=\left(\frac{x^{-\frac{5}{6}}y^{\frac{5}{6}}z}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}=\left(x^{-\frac{5}{6}-2}y^{\frac{5}{6}-3}z^{1-1}\right)^{3}$$

$$=\left(x^{-\frac{17}{6}}y^{-\frac{13}{6}}z^{0}\right)^{3}$$

Se eleva cada uno de los factores a la potencia 3:

$$\left(x^{-\frac{17}{6}}y^{-\frac{13}{6}}\right)^{3}=x^{\left(-\frac{17}{6}\right)(3)}y^{\left(-\frac{13}{6}\right)(3)}=x^{-\frac{17}{2}}y^{-\frac{13}{2}}$$

Los exponentes resultantes son negativos, por lo que se transforman a otro factor equivalente con exponente positivo

$$x^{-\frac{17}{2}}y^{-\frac{13}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{17}{2}}}\cdot\frac{1}{y^{\frac{13}{2}}}=\frac{1}{x^{\frac{17}{2}}y^{\frac{13}{2}}}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $\dfrac{1}{x^{\frac{17}{2}}y^{\frac{13}{2}}}$

6 Reduce a su mínima expresión:

$$\left[\frac{\left(a^{4}b^{7}\right)^{-2}\cdot\left[\left(bc\right)^{7}\right]^{0}}{\left(abc\right)^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{\left(a^{3}b^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}$$

Solución

Se desarrollan los paréntesis internos:

$$\left[\frac{\left(a^{4}b^{7}\right)^{-2}\cdot\left[\left(bc\right)^{7}\right]^{0}}{\left(abc\right)^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{\left(a^{3}b^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}=\left[\frac{a^{-8}b^{-14}}{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{2}}}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}$$

Luego, si una fracción está elevada a un exponente negativo, ésta es igual a su recíproco elevado al exponente positivo, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ entonces:

$$\left[\frac{a^{-8}b^{-14}}{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}b}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1} = \left[\frac{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}{a^{-8}b^{-14}}\right]\cdot\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b}\right)$$

La expresión resultante se simplifica de diversas formas, una de ellas es multiplicar las fracciones y por último realizar la división resultante:

$$\left[\frac{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}{a^{-8}b^{-14}}\right]\cdot\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b}\right) = \frac{a^{-3}b^{-3}c^{-3+\frac{1}{3}}}{a^{-8+\frac{3}{2}}b^{-14+1}} = \frac{a^{-3}b^{-3}c^{-\frac{8}{3}}}{a^{-\frac{13}{2}}b^{-13}} = a^{-3+\frac{13}{2}}b^{-3+13}c^{-\frac{8}{3}} = a^{\frac{7}{2}}b^{10}c^{-\frac{8}{3}}$$

El factor con exponente negativo se transforma en otro equivalente de exponente positivo:

$$a^{\frac{7}{2}}b^{10}c^{-\frac{8}{3}} = a^{\frac{7}{2}}b^{10}\cdot\frac{1}{c^{\frac{8}{3}}} = \frac{a^{\frac{7}{2}}b^{10}}{c^{\frac{8}{3}}}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{a^{\frac{7}{2}}b^{10}}{c^{\frac{8}{3}}}$

7 Reduce a su mínima expresión:

$$\frac{x^{-3}+x^{-2}}{x^{-2}+x^{-1}}$$

Solución

Se transforman cada uno de los sumandos a exponente positivo y se simplifica la fracción compleja resultante:

$$\frac{x^{-3}+x^{-2}}{x^{-2}+x^{-1}} = \frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1+x}{x^3}}{\frac{1+x}{x^2}} = \frac{x^2(1+x)}{x^3(1+x)} = \frac{1}{x}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{1}{x}$

8 Simplifica la siguiente expresión y elimina los exponentes negativos.

$$\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}$$

Solución

Cada uno de los sumandos con exponente negativo se expresa en otro equivalente con exponente positivo:

$$\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Las transformaciones dan como resultado una fracción compleja, la cual al simplificarla se obtiene:

$$\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}{\frac{b+a}{ab}}=\frac{ab\left(b^2-a^2\right)}{a^2b^2(b+a)}=\frac{ab(b+a)(b-a)}{a^2b^2(b+a)}=\frac{b-a}{ab}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $\frac{b-a}{ab}$

EJERCICIO 94

Aplica los teoremas de los exponentes y simplifica cada una de las siguientes expresiones:

1. $\left(x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{2}}\right)^{12}$
2. $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{6}{4}}$
3. $\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{6}}}$
4. $\left(\frac{x^{-3}y^{-1}z^{-2}}{2x^{-3}y^{-1}}\right)^{2}$
5. $\left(\frac{-3x^4y^2}{-6x^6y^{-2}}\right)^{-1}$
6. $\frac{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}c^{-\frac{1}{2}}}$
7. $\frac{\left(x^{-2}y^{-3}\right)^{-2}}{\left(6x^{-2}y^{-1}\right)^{-1}}$
8. $\frac{4a^5b^{-4}}{\left(2a^{-2}b^3\right)^{-2}}$
9. $\left(\frac{8x^3y^{-2}z^4}{4x^{-2}y^4z^{-3}}\right)^{-2}$
10. $\frac{(x-3)^{-2}(x-3)^5}{(x-3)^3}$
11. $\frac{(x+3y)^{\frac{1}{2}}(x+3y)^{-\frac{2}{3}}}{(x+3y)^{-\frac{4}{3}}}$
12. $\left[\frac{\left(x^3y^{-2}\right)^{-1}}{\left(2x^2y^{-3}\right)^{-2}}\right]^{-3}$
13. $\left(\frac{a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}\right)^{-2}$
14. $\frac{\left(5x^2y^{-2}\right)^{-2}\left(5x^{-3}y^2\right)^2}{\left(x^3y^{-2}\right)^{-1}}$
15. $\left[\frac{\left(x^2y^{-\frac{3}{4}}z^{\frac{1}{2}}\right)^4}{\left(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{2}}\right)^{-6}}\right]^{-1}$
16. $\frac{\left(a^4b^{-2}c^6\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{6}}\right)^6}$
17. $\frac{1}{\left(3a^2b^3\right)^{-2}}\cdot\left(2ab^{-2}\right)^{-3}$
18. $\frac{\left(m^8n^{12}\right)^{\frac{3}{4}}}{\left(m^9n^6\right)^{\frac{1}{3}}}$
19. $\left[\left(4x^2y^3\right)^{-2}\left(2x^2y^{-2}\right)^2\right]^{-2}$
20. $\frac{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{4}}\right]^4}{\left(x^2+y^2\right)^{-2}}$
21. $\left[\frac{(x-2y)^{-2}(x-2y)^{-5}}{(x-2y)^{-6}}\right]^{-2}$
22. $\frac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-3}+b^{-3}}$
23. $\frac{x^{-1}y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$
24. $\left(\frac{y^0-y^{-2}}{x^0-y^{-1}}\right)^{-1}$
25. $\left(x^{-2}+y^{-3}\right)\left(x^{-2}-y^{-3}\right)$
26. $\frac{x^2y^2\left(y^{-2}-x^{-2}\right)}{x-y}$
27. $\frac{xy^{-2}+x^{-2}y}{x^{-1}+y^{-1}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Potencia de un binomio

Factorial de un número

A la expresión $r!$ se le denomina "factorial de r" y se define como el producto de todos los números naturales anteriores a r.

$$r! = r(r-1)(r-2)\cdot \ldots \cdot 1 \quad \text{con } r > 0$$

Si $r = 0$, entonces $0! = 1$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de: 4!

Solución

Al aplicar la definición, se obtiene que:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Por tanto, $4! = 24$

2 Determina el resultado de 6!

Solución

Se desarrolla cada uno de los factoriales y se realiza la operación resultante:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Por consiguiente, $6! = 720$

Binomio de Newton

Para un número n el desarrollo de:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

El procedimiento anterior se llama *teorema del binomio de Newton* o fórmula para el binomio de Newton.

Si n es natural, el desarrollo de $(a+b)^n$ cumple con las siguientes características:

a) El primer término es a^n y el último término es b^n.

b) Al desarrollar el binomio se obtienen $(n+1)$ términos.

c) Conforme aumentan los términos, la potencia del primer término a disminuye en 1 y la del segundo término b aumenta en 1.

d) Para obtener el i-ésimo término se utiliza la fórmula:

$$i\text{-ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla: $(x+2y)^4$.

Solución

Se aplica el desarrollo del binomio de Newton, hasta obtener el segundo término elevado al exponente 4:

$$(x+2y)^4=(x)^4+4(x)^{4-1}(2y)^1+\frac{4(4-1)}{2!}(x)^{4-2}(2y)^2+\frac{4(4-1)(4-2)}{3!}(x)^{4-3}(2y)^3+$$
$$+\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{4!}(x)^{4-4}(2y)^4$$

Se desarrollan los factoriales en los denominadores de cada fracción, se desarrollan las potencias y se simplifica al máximo cada uno de los sumandos:

$$=(x)^4+4(x)^3(2y)^1+\frac{4(3)}{2\cdot 1}(x)^2(2y)^2+\frac{4(3)(2)}{3\cdot 2\cdot 1}(x)^1(2y)^3+\frac{4(3)(2)(1)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(x)^0(2y)^4$$
$$=x^4+4(x^3)(2y)+6(x^2)(4y^2)+4(x)(8y^3)+(x^0)(16y^4)$$

Finalmente, se realizan los productos y se obtiene el desarrollo:

$$=x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$$

2 Desarrolla: $(2x^2-3y^2)^5$.

Solución

Se aplica el teorema del binomio de Newton y se tiene que:

$$(2x^2-3y^2)^5=(2x^2)^5+5(2x^2)^{5-1}(-3y^2)^1+\frac{5(5-1)}{2!}(2x^2)^{5-2}(-3y^2)^2+$$
$$+\frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(2x^2)^{5-3}(-3y^2)^3+\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}(2x^2)^{5-4}(-3y^2)^4$$
$$+\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5!}(2x^2)^{5-5}(-3y^2)^5$$

Se simplifican las fracciones y se desarrollan las potencias:

$$=(2x^2)^5+5(2x^2)^4(-3y^2)^1+\frac{5(4)}{2\cdot 1}(2x^2)^3(-3y^2)^2+\frac{5(4)(3)}{3\cdot 2\cdot 1}(2x^2)^2(-3y^2)^3+$$
$$+\frac{5(4)(3)(2)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(2x^2)^1(-3y^2)^4+\frac{5(4)(3)(2)(1)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(2x^2)^0(-3y^2)^5$$
$$=32x^{10}+5(16x^8)(-3y^2)+10(8x^6)(9y^4)+10(4x^4)(-27y^6)+5(2x^2)(81y^8)+(2x^2)^0(-243y^{10})$$

Por último, se realizan los productos y se obtiene el desarrollo:

$$=32x^{10}-240x^8y^2+720x^6y^4-1\,080x^4y^6+810x^2y^8-243y^{10}$$

Si n es entero negativo o fraccionario, el desarrollo de $(a + b)^n$ cumple con las siguientes características:

a) El primer término es a^n y no existe un último término.

b) El número de términos es infinito.

c) El desarrollo de estos binomios recibe el nombre de series.

d) Conforme aumentan los términos la potencia del primer término a disminuye en 1, y la del segundo término b, aumenta en 1.

e) Para obtener el i-ésimo término se utiliza la fórmula:

$$i\text{-ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla: $(x + 1)^{-3}$.

Solución

Se aplica el desarrollo de Newton hasta obtener los términos deseados, en este caso se desarrolla hasta cinco términos

$$(x+1)^{-3} = (x)^{-3} + (-3)(x)^{-3-1}(1) + \frac{(-3)(-3-1)}{2!}(x)^{-3-2}(1)^2$$
$$+ \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)}{3!}(x)^{-3-3}(1)^3 + \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)(-3-3)}{4!}(x)^{-3-4}(1)^4 + ...$$

Se simplifican todos y cada uno de los coeficientes de cada término, así como los exponentes:

$$= (x)^{-3} + (-3)(x)^{-4}(1) + \frac{(-3)(-4)}{2\cdot 1}(x)^{-5}(1)^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3\cdot 2\cdot 1}(x)^{-6}(1)^3 + \frac{(-3)(-4)(-5)(-6)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(x)^{-7}(1)^4 + \ldots$$

$$= x^{-3} - 3(x^{-4})(1) + 6(x^{-5})(1) - 10(x^{-6})(1) + 15(x^{-7})(1) - \ldots$$
$$= x^{-3} - 3x^{-4} + 6x^{-5} - 10x^{-6} + 15x^{-7} - \ldots$$

Como los exponentes son negativos, éstos se expresan en su equivalente positivo, lo que resulta en:

$$= \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{6}{x^5} - \frac{10}{x^6} + \frac{15}{x^7} - ...$$

2 Desarrolla: $(x+2)^{\frac{1}{2}}$.

Solución

Al aplicar el teorema de Newton hasta cinco términos:

$$(x+2)^{\frac{1}{2}} = (x)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)(x)^{\frac{1}{2}-1}(2)^1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(x)^{\frac{1}{2}-2}(2)^2 +$$
$$+ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(x)^{\frac{1}{2}-3}(2)^3 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}(x)^{\frac{1}{2}-4}(2)^4 + ...$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se simplifica cada uno de los sumandos al máximo:

$$= (x)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)(x)^{\frac{1}{2}-1}(2)^1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 1}(x)^{\frac{1}{2}-2}(2)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3\cdot 2\cdot 1}(x)^{\frac{1}{2}-3}(2)^3 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(x)^{\frac{1}{2}-4}(2)^4 + \ldots$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)(2) - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}(4) + \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}(8) - \frac{5}{128}\left(x^{-\frac{7}{2}}\right)(16) + \ldots$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{8}x^{-\frac{7}{2}} + \ldots$$

Por último, se convierten los exponentes negativos a positivos y se obtiene el desarrollo:

$$= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5}{8x^{\frac{7}{2}}} + \ldots$$

EJERCICIO **95**

Desarrolla los siguientes binomios:

1. $(3-2x)^3$
2. $(1+x)^4$
3. $(x-2y)^3$
4. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^3$
5. $(x-1)^6$
6. $(2-x)^4$
7. $(x^2+y^2)^5$
8. $\left(\frac{x}{2}-1\right)^5$
9. $\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)^4$
10. $(x^3+5y^3)^3$
11. $(x^2-1)^{-1}$
12. $(2x-1)^{-3}$
13. $(x-1)^{-4}$
14. $(3x+1)^{\frac{1}{3}}$
15. $(x+2)^{\frac{4}{3}}$
16. $(x-2)^{-\frac{3}{4}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cálculo del *i*-ésimo término

Para determinar el *i*-ésimo término del binomio $(a+b)^n$, se utiliza la siguiente fórmula:

$$i\text{-ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el cuarto término de $(2x+3)^5$.

Solución

En este caso $i = 4$, por tanto, en el numerador sólo habrá tres factores numéricos:

$$\text{Cuarto término} = \frac{5(5-1)(5-2)}{(4-1)!}(2x)^{5-4+1}(3)^{4-1} = \frac{5(4)(3)}{3(2)(1)}(2x)^2(3)^3 = 10(4x^2)(27) = 1\,080x^2$$

Entonces, el cuarto término del binomio $(2x+3)^5$ es: $1\,080x^2$

2 Determina el sexto término de $(x+1)^{\frac{1}{2}}$.

Solución

Para encontrar el sexto término se toma en cuenta que $i = 6$ y, por tanto, sólo se tienen cinco términos en el numerador, luego:

$$\text{Sexto término} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{2}-4\right)}{(6-1)!}(x)^{\frac{1}{2}-6+1}(1)^{6-1} = \frac{7}{256}x^{-\frac{9}{2}}(1)^5 = \frac{7}{256x^{\frac{9}{2}}}$$

Por tanto, el sexto término del binomio $(x+1)^{\frac{1}{2}}$ es: $\frac{7}{256x^{\frac{9}{2}}}$

EJERCICIO 96

Determina el término que se indica en cada uno de los siguientes ejercicios:

1. Tercer término de $(3x+5)^7$
2. Quinto término de $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^8$
3. Cuarto término de $(4xy-7)^6$
4. Sexto término de $(8x+1)^{\frac{1}{3}}$
5. Octavo término de $(3x-5)^{10}$
6. Sexto término de $(x-2)^{-4}$
7. Quinto término de $(x-1)^{-1}$
8. Cuarto término de $(4x+9)^{\frac{1}{2}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Triángulo de Pascal

Al desarrollar el binomio $(a+b)^n$, los elementos tienen como coeficientes:

$$1,\ n,\ \frac{n(n-1)}{2!},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},\ \text{etcétera.}$$

Específicamente:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

y así sucesivamente.

El *triángulo de Pascal* se forma con los coeficientes de los elementos al elevar un binomio a una potencia n con $n \in Z^+$. Entonces se toman los coeficientes de los términos:

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
⋮	⋮

Ahora bien, los extremos de cada potencia siempre son la unidad y los siguientes números de cada potencia se obtienen al sumar dos a dos los dígitos que se tienen en el renglón inmediato superior.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Halla los coeficientes de $(a+b)^5$.

Solución

A este binomio le antecede $(a+b)^4$, cuyos coeficientes son:

$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1

luego se coloca la unidad a los extremos y se suman dos a dos de la siguiente forma:

1 $1+4$ $4+6$ $6+4$ $4+1$ 1

Finalmente, los coeficientes son:

$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1

2 Desarrolla el siguiente binomio $(3x-2y)^4$.

Solución

Al tomar los números del triángulo en la fila de un binomio con potencia 4, se tiene:

$$\begin{aligned}(3x-2y)^4 &= \mathbf{1}(3x)^4+\mathbf{4}(3x)^3(-2y)+\mathbf{6}(3x)^2(-2y)^2+\mathbf{4}(3x)(-2y)^3+\mathbf{1}(-2y)^4\\ &=(81x^4)+4(27x^3)(-2y)+6(9x^2)(4y^2)+4(3x)(-8y^3)+(16y^4)\\ &=81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4\end{aligned}$$

3 Desarrolla el siguiente binomio $(x^2+2y)^6$.

Solución

Se utilizan los coeficientes para la potencia 6 y se obtiene:

$$\begin{aligned}(x^2+2y)^6 &=\\ &=\mathbf{1}(x^2)^6+\mathbf{6}(x^2)^5(2y)+\mathbf{15}(x^2)^4(2y)^2+\mathbf{20}(x^2)^3(2y)^3+\mathbf{15}(x^2)^2(2y)^4+\mathbf{6}(x^2)(2y)^5+\mathbf{1}(2y)^6\\ &=(x^{12})+6(x^{10})(2y)+15(x^8)(4y^2)+20(x^6)(8y^3)+15(x^4)(16y^4)+6(x^2)(32y^5)+(64y^6)\\ &=x^{12}+12x^{10}y+60x^8y^2+160x^6y^3+240x^4y^4+192x^2y^5+64y^6\end{aligned}$$

EJERCICIO 97

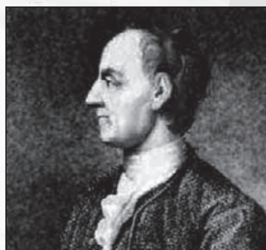
Desarrolla los siguientes binomios con el triángulo de Pascal:

1. $(2x+1)^4$
2. $(3-2y)^7$
3. $(x+1)^8$
4. $(1-x)^6$
5. $(5m-2n)^5$
6. $(a+2b)^8$
7. $(x^2+5y)^6$
8. $\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\right)^7$
9. $(x+y-2)^3$
10. $\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^5$
11. $(x-1)^{12}$
12. $\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\right)^5$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

CAPÍTULO 21
RADICACIÓN

Reseña
HISTÓRICA



El signo radical

Christoph Rudolff (1500-1545), alemán, publica en 1525 el primer tratado de álgebra en alemán vulgar titulado *Coss*. En esta obra aparece, por primera vez, el símbolo Ö, para indicar la raíz cuadrada. La raíz cuadrada de un número se designaba antes del siglo XVI con un punto delante del número.

En el siglo XVIII Leonhard Euler utilizó por primera vez nuestro actual símbolo de raíz, originado de la deformación de la letra "**r**", la primera letra de la palabra *radix* con la que se designaba a la raíz cuadrada.

Radical

La expresión $\sqrt[n]{a}$ recibe el nombre de radical y se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y sólo si } b^n = a$$

Elementos de un radical

Un radical es una expresión algebraica que se forma con los siguientes elementos:

coeficiente, radicando e índice de raíz

Ejemplos

	Coeficiente	Radicando	Índice de raíz
$2\sqrt{3}$	2	3	2
$\sqrt[3]{2xy}$	1	$2xy$	3
$5x\sqrt[4]{3x^2y}$	$5x$	$3x^2y$	4

Raíz principal de un radical

Sea a un número real y n entero positivo mayor a 1:

- **Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$**
- **Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = b$ tal que $b^n = a$**

Ejemplos

$\sqrt{25} = \pm 5$ porque $(5)^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$.

$\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ porque $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

- **Si $a < 0$ y n impar, entonces $\sqrt[n]{a} = b$ con $b < 0$**

Ejemplo

$\sqrt[5]{-1\,024} = -4$ porque $(-4)^5 = -1\,024$.

- **Si $a < 0$ y n par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es número real.**

Ejemplo

$\sqrt{-9}$ no es un número real, ya que no existe un número x, tal que: $x^2 = -9$.

Radical como exponente

Sea $\sqrt[n]{a}$ un número real, entonces este radical se expresa como:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Teoremas

➲ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Demostración

Se expresa el radical $\sqrt[n]{a}$ como exponente, se eleva la expresión y se obtiene:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

Por consiguiente, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Ejemplo

Obtén el resultado de $\left(\sqrt{3}\right)^2$.

Solución

Se aplica el teorema y se determina que:

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

➲ $\sqrt[n]{a^n} = a$ **si** $a < 0$ **y** n **es impar**

Ejemplo

Determina el resultado de $\sqrt[3]{(-2)^3}$.

Solución

Se aplica el teorema y se obtiene:

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

➲ $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ **si** $a < 0$ **y** n **es par**

Ejemplo

Obtén la siguiente raíz: $\sqrt[4]{(-81)^4}$.

Solución

Se aplica el teorema y el resultado es:

$$\sqrt[4]{(-81)^4} = |-81| = 81$$

➲ **Sea el radical** $\sqrt[n]{a^m}$ **la expresión equivalente es** $a^{\frac{m}{n}}$**, donde el índice es el denominador de la fracción y el exponente del radicando el numerador.**

Demostración

El radical se expresa como exponente fraccionario y se multiplican los exponentes:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa $\sqrt[5]{x^4}$ con exponente fraccionario.

Solución

Al dividir el exponente del radicando por el índice de la raíz resulta:

$$\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$$

2 Expresa $\sqrt{m}$ con exponente fraccionario.

Solución

En este caso se trata de una raíz cuadrada y el exponente de la base es 1, por tanto, el índice es 2, entonces:

$$\sqrt{m} = \sqrt[2]{m^1} = m^{\frac{1}{2}}$$

3 Expresa el radical $\sqrt[5]{(a+b)^3}$ con exponente fraccionario.

Solución

Se divide el exponente por el índice y resulta:

$$\sqrt[5]{(a+b)^3}=(a+b)^{\frac{3}{5}}$$

4 Expresa el radical $\sqrt[3]{x^4+y^4}$ con exponente fraccionario.

Solución

El radicando es un polinomio que se toma como un solo elemento, esto es:

$$\sqrt[3]{x^4+y^4}=\sqrt[3]{\left(x^4+y^4\right)^1}$$

Se aplica la división del exponente entre el índice y se obtiene:

$$\sqrt[3]{x^4+y^4}=\sqrt[3]{\left(x^4+y^4\right)^1}=\left(x^4+y^4\right)^{\frac{1}{3}}$$

EJERCICIO 98

Representa en forma de exponente fraccionario los siguientes radicales:

1. $\sqrt{m^5}$
2. $\sqrt[7]{x^2}$
3. $\sqrt[3]{y^4}$
4. $\sqrt[5]{a^2}$
5. $\sqrt{b^{11}}$
6. $\sqrt{5x}$
7. $\sqrt[6]{(2x)^5}$
8. $\sqrt[4]{\left(3y^2\right)^3}$
9. $\sqrt{(2xy)^9}$
10. $\sqrt[9]{\left(x^2y\right)^2}$
11. $\sqrt[8]{x^4y^4}$
12. $\sqrt[3]{x^6+y^6}$
13. $\sqrt{x^7-y^7}$
14. $\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^4}$
15. $\sqrt[5]{(x+2y)^{11}}$
16. $\sqrt[5]{a^9}-\sqrt[7]{b^3}$
17. $\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^5}$
18. $\sqrt[4]{m^7}\,\sqrt[5]{n^3}$
19. $\sqrt{m(n+p)^3}$
20. $\sqrt[3]{a^2m^{13}}\,\sqrt[4]{n^7}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Representación de un exponente fraccionario como radical

Dada la expresión $a^{\frac{m}{n}}$ su representación como un radical es: $\sqrt[n]{a^m}$, donde el numerador es el exponente del radical y el denominador el índice de la raíz.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en forma de radical: $y^{\frac{1}{3}}$.

Solución

El exponente del radicando es la unidad y el índice de la raíz es 3, por tanto:

$$y^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{y^1}=\sqrt[3]{y}$$

2 Escribe como radical: $4(m+n)^{\frac{2}{5}}$.

Solución

El exponente del radicando es 2 y el índice de la raíz es 5, el coeficiente 4 permanece igual, por lo que resulta:

$$4(m+n)^{\frac{2}{5}} = 4\sqrt[5]{(m+n)^2}$$

3 Transforma a radical la siguiente expresión: $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$.

Solución

Se transforma a radical cada uno de los sumandos y se obtiene:

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$$

EJERCICIO 99

Representa en forma de radical.

1. $2^{\frac{1}{3}}$	5. $(2xy^2)^{\frac{3}{4}}$	9. $\frac{3}{4}z^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{4}}$	13. $(2x+y)^{\frac{4}{5}}$
2. $5^{\frac{4}{7}}$	6. $(x^3y)^{\frac{1}{2}}$	10. $m^{\frac{2}{5}} - n^{\frac{1}{3}}$	14. $(m+n)^{\frac{1}{2}}$
3. $m^{\frac{2}{3}}$	7. $7y^{\frac{2}{5}}$	11. $a^{\frac{1}{7}} + b^{\frac{1}{7}}$	15. $(a^3+b^3)^{\frac{2}{3}}$
4. $(3y)^{\frac{11}{2}}$	8. $3a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{8}{7}}$	12. $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{4}}$	16. $(m^{-1}-n^{-2})^{\frac{3}{7}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teoremas

Los teoremas de los exponentes también se aplican a los radicales, ya que se expresan como exponentes fraccionarios.

- $\sqrt[n]{\boldsymbol{a \cdot b \cdot c}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{c}}$

Demostración

Se expresa el radical como exponente fraccionario y se aplica el teorema correspondiente de exponentes para obtener:

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = (a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

Ejemplo

Realiza: $\sqrt[3]{2x^2y}$.

Solución

Se aplica el teorema y se determina que:

$$\sqrt[3]{2x^2y} = \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{y}$$

➡ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Demostración

Se expresa el radical como exponente fraccionario y se aplica el teorema: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$, para demostrar que:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo

Efectúa: $\sqrt{\dfrac{5a}{3}}$.

Solución

Se aplica el teorema para la división y después el del producto para obtener como resultado:

$$\sqrt{\frac{5a}{3}}=\frac{\sqrt{5a}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$$

➡ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

Demostración

Al aplicar los teoremas de los exponentes, se demuestra que:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

Ejemplo

Desarrolla: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3x}}$.

Solución

Con los respectivos teoremas se determina que:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{3x}}=\sqrt[(3)(4)]{3x}=\sqrt[12]{3x}=\sqrt[12]{3}\,\sqrt[12]{x}$$

Cálculo de raíces

Para obtener raíces de cantidades numéricas o expresiones algebraicas, se aplica la fórmula como se ilustra en los siguientes ejemplos:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén: $\sqrt{16}$.

Solución

Se descompone el radicando en sus factores primos y se aplica la fórmula anterior para obtener como resultado:

$$\sqrt{16}=\sqrt{2^4}=2^{\frac{4}{2}}=2^2=4$$

2 Obtén el resultado de: $\sqrt[5]{-243}$.

Solución

Se expresa el radicando de la siguiente manera:

$$-243=(-3)^5$$

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$$\sqrt[5]{-243}=\sqrt[5]{(-3)^5}=(-3)^{\frac{5}{5}}=-3$$

3 Determina la raíz de: $\sqrt[3]{64x^3}$.

Solución

Se expresa cada uno de los elementos del radicando de la siguiente manera:

$$64x^3=2^6x^3$$

Se aplica el respectivo teorema de radicales para obtener como resultado:

$$\sqrt[3]{64x^3}=\sqrt[3]{2^6x^3}=\sqrt[3]{2^6}\sqrt[3]{x^3}=2^{\frac{6}{3}}x^{\frac{3}{3}}=2^2x=4x$$

4 Efectúa la siguiente operación: $\sqrt[5]{\dfrac{32x^5}{243y^{10}}}$.

Solución

Se descomponen los coeficientes en factores primos y se aplican los respectivos teoremas para obtener:

$$\sqrt[5]{\frac{32x^5}{243y^{10}}}=\sqrt[5]{\frac{2^5x^5}{3^5y^{10}}}=\frac{\sqrt[5]{2^5x^5}}{\sqrt[5]{3^5y^{10}}}=\frac{\sqrt[5]{2^5}\sqrt[5]{x^5}}{\sqrt[5]{3^5}\sqrt[5]{y^{10}}}=\frac{2^{\frac{5}{5}}x^{\frac{5}{5}}}{3^{\frac{5}{5}}y^{\frac{10}{5}}}=\frac{2x}{3y^2}$$

5 Encuentra el resultado de: $\dfrac{3x}{5y^2}\sqrt{\dfrac{25y^4}{81x^2}}$.

Solución

Se aplica el teorema de la división y se extrae la raíz:

$$\frac{3x}{5y^2}\sqrt{\frac{25y^4}{81x^2}}=\frac{3x}{5y^2}\sqrt{\frac{5^2y^4}{3^4x^2}}=\frac{3x}{5y^2}\left(\frac{5^{\frac{2}{2}}y^{\frac{4}{2}}}{3^{\frac{4}{2}}x^{\frac{2}{2}}}\right)=\frac{3x}{5y^2}\left(\frac{5y^2}{3^2x}\right)$$

Se multiplican las expresiones y se simplifica el resultado para finalmente obtener:

$$=\frac{15xy^2}{45xy^2}=\frac{1}{3}$$

6 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{(1-3x)^6}$?

Solución

Se aplica la fórmula para obtener como resultado:

$$\sqrt[3]{(1-3x)^6}=(1-3x)^{\frac{6}{3}}=(1-3x)^2$$

7 Obtén el resultado de $\sqrt{1-8x^2y^2+16x^4y^4}$.

Solución

Se factoriza la expresión:

$$1-8x^2y^2+16x^4y^4=\left(1-4x^2y^2\right)^2$$

Se aplica la fórmula para extraer la raíz:

$$\sqrt{1-8x^2y^2+16x^4y^4}=\sqrt{\left(1-4x^2y^2\right)^2}=\left(1-4x^2y^2\right)^{\frac{2}{2}}=\left|1-4x^2y^2\right|$$

Por tanto, la raíz de la expresión es: $\left|1-4x^2y^2\right|$

EJERCICIO 100

Determina las siguientes raíces:

1. $\sqrt{729}$
2. $\sqrt[3]{8}$
3. $\sqrt[4]{81}$
4. $\sqrt{196}$
5. $\sqrt[4]{256}$
6. $\sqrt{\frac{81}{16}}$
7. $\sqrt[3]{216}$
8. $4\sqrt[5]{-32}$
9. $\sqrt[3]{-64}$
10. $\sqrt{4x^2y^4}$
11. $\sqrt[3]{27m^6n^9}$
12. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{216x^{12}}$
13. $xy^2\sqrt[4]{16x^8y^{12}}$
14. $m^4n^3\sqrt[5]{\frac{32}{m^5n^{10}}}$
15. $\frac{y^{2n}}{x^m}\sqrt{\frac{25x^{2m}}{y^{8n}}}$
16. $\sqrt{25m^{4-2x}n^{8y-6}}$
17. $\frac{2}{x}\sqrt[3]{\left(x+x^2\right)^3}$
18. $\frac{\sqrt{x^4-2x^2y^2+y^4}}{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}$
19. $\frac{3x}{2x-10y}\sqrt{x^2-10xy+25y^2}$
20. $\sqrt{\frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2y^2}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simplificación

Un radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m \geq n$, se puede simplificar expresando a^m como un producto de bases donde el exponente de una de ellas es múltiplo de n.

EJEMPLOS

1 Simplifica el siguiente radical: $\sqrt[3]{x^{13}}$.

Solución

El radicando se descompone en factores, de la siguiente manera:

$$x^{13}=x^{12}x$$

Se aplica el teorema de radicales para el producto y se obtiene:

$$\sqrt[3]{x^{13}}=\sqrt[3]{x^{12}x}=\sqrt[3]{x^{12}}\sqrt[3]{x}=x^{\frac{12}{3}}\sqrt[3]{x}=x^4\sqrt[3]{x}$$

2 Reduce la siguiente expresión: $\sqrt{72x^3y^4z^5}$.

Solución

El coeficiente 72 se descompone en sus factores primos y las bases se expresan como:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \qquad x^3 = x^2x \qquad z^5 = z^4z$$

Se aplican los teoremas correspondientes y el radical se simplifica como sigue:

$$\sqrt{72x^3y^4z^5} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 x^2 x y^4 z^4 z} = 2^{\frac{2}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{2}} x^{\frac{2}{2}} y^{\frac{4}{2}} z^{\frac{4}{2}} \sqrt{2xz} = 6xy^2z^2\sqrt{2xz}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $6xy^2z^2\sqrt{2xz}$

3 Simplifica: $\frac{1}{2}\sqrt[3]{128x^6y^5z}$.

Solución

Se descompone 128 en factores primos y la base y se expresa de esta manera:

$$128 = 2^7 = 2^6 \cdot 2 \qquad y^5 = y^3y^2$$

Se procede a simplificar la expresión:

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{128x^6y^5z} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^6 \cdot 2x^6y^3y^2z} = \frac{1}{2}\left(2^{\frac{6}{3}} x^{\frac{6}{3}} y^{\frac{3}{3}} \sqrt[3]{2y^2z}\right) = \frac{1}{2}\left(2^2x^2y\sqrt[3]{2y^2z}\right) = 2x^2y\sqrt[3]{2y^2z}$$

Finalmente, el resultado es: $2x^2y\sqrt[3]{2y^2z}$

4 Simplifica la expresión: $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{54a^4b^6c^7}{8x^4}}$.

Solución

Se descompone cada uno de los elementos que conforman el radicando y se simplifica para obtener como resultado:

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{54a^4b^6c^7}{8x^4}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3^3a^3ab^6c^6c}{2^3x^3x}} = \frac{2}{3}\left(\frac{3^{\frac{3}{3}}a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}c^{\frac{6}{3}}}{2^{\frac{3}{3}}x^{\frac{3}{3}}}\sqrt[3]{\frac{2ac}{x}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3ab^2c^2}{2x}\sqrt[3]{\frac{2ac}{x}}\right)$$

$$= \frac{ab^2c^2}{x}\sqrt[3]{\frac{2ac}{x}}$$

EJERCICIO 101

Simplifica los siguientes radicales:

1. $\sqrt{x^3}$
2. $\sqrt{27x^2y^7}$
3. $\sqrt{64m^3n^2z^4}$
4. $\sqrt[3]{27m^5n^{15}}$
5. $\sqrt[3]{x^5y^4z^6}$
6. $\sqrt[4]{625x^5y^8}$
7. $3\sqrt{50a^4b^3}$
8. $5\sqrt{9p^4q^7}$
9. $2\sqrt[4]{243x^5y^4z}$
10. $5\sqrt[4]{80a^3b^7c^4}$
11. $2\sqrt[5]{729m^8n^{12}}$
12. $2x\sqrt[3]{x^4y^5z^9}$

13. $-3m\sqrt[4]{128m^9n^{14}}$
14. $\frac{1}{3}\sqrt{18a^5}$
15. $\frac{5}{2}\sqrt[5]{32a^6b^4}$
16. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{160m^4n^9p^2}$
17. $\frac{1}{3x}\sqrt[3]{27x^6y^4}$
18. $\frac{2}{3x^2y}\sqrt[4]{81x^5y^4}$
19. $\sqrt{\frac{18x^3}{2y^2}}$
20. $\sqrt[3]{\frac{16a^4b^6}{3m^5}}$
21. $\sqrt[4]{\frac{x^7y^5}{16z^{12}}}$
22. $\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{2a^5b^3}{27cd^7}}$
23. $\frac{3x}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{48x^4}}$
24. $\frac{x}{y}\sqrt[4]{\frac{80y^4}{81x^6}}$
25. $\sqrt{9m^3-18m^2n}$
26. $\sqrt{16x^5+40x^3y^3+25xy^6}$
27. $\sqrt[3]{27a^7b^3-54a^4b^4}$
28. $\sqrt[4]{(m^2-2mn+n^2)^3}$
29. $\sqrt[5]{243(x+y)^7(x-y)^7}$
30. $\frac{\sqrt{4-4m+m^2}}{\sqrt[3]{(2-m)^5}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Introducción de factores

Se escribe el factor o los factores que se desean introducir en el radical, elevados a un exponente igual al índice del radical.

$$a^m \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\left(a^m\right)^n b}$$

EJEMPLOS

1 Introduce el coeficiente del radical $3\sqrt{2}$ a la raíz.

Solución

El coeficiente se introduce en el radical elevado al cuadrado:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{(3)^2 \cdot 2}$$

Se realizan las operaciones correspondientes y se obtiene:

$$= \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

Por tanto: $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$

2 Introduce en la raíz $2x\sqrt[3]{y}$ el coeficiente.

Solución

Se coloca dentro del radical el coeficiente $2x$ elevado al exponente 3:

$$2x\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{(2x)^3 \cdot y}$$

Se desarrolla la potencia y se realiza el producto para obtener como resultado:

$$= \sqrt[3]{\left(8x^3\right) \cdot y} = \sqrt[3]{8x^3y}$$

3 Introduce los factores en el radical $2x^2y\sqrt[4]{xy^2}$.

Solución

Se coloca el coeficiente dentro de la raíz con exponente 4:

$$2x^2y\sqrt[4]{xy^2}=\sqrt[4]{\left(2x^2y\right)^4xy^2}$$

Se desarrolla la potencia y se realiza la multiplicación:

$$=\sqrt[4]{16x^8y^4xy^2}=\sqrt[4]{16x^9y^6}$$

Por tanto, el resultado es: $\sqrt[4]{16x^9y^6}$

4 Introduce el coeficiente en el radical: $\frac{3a}{b^2}\sqrt[3]{\frac{2b}{a}}$.

Solución

La fracción entra elevada al índice del radical, se realizan las operaciones y se obtiene:

$$\frac{3a}{b^2}\sqrt[3]{\frac{2b}{a}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3a}{b^2}\right)^3\frac{2b}{a}}=\sqrt[3]{\frac{27a^3}{b^6}\frac{2b}{a}}=\sqrt[3]{\frac{54a^3b}{ab^6}}=\sqrt[3]{\frac{54a^2}{b^5}}$$

5 Introduce $3a$ en el radical de la expresión: $\frac{3a}{\sqrt{2a^3x}}$.

Solución

Se siguen los mismos pasos que en los ejemplos anteriores y se obtiene como resultado:

$$\frac{3a}{\sqrt{2a^3x}}=\sqrt{\frac{(3a)^2}{2a^3x}}=\sqrt{\frac{9a^2}{2a^3x}}=\sqrt{\frac{9}{2ax}}$$

6 Introduce el coeficiente del radical $\frac{1}{x-y}\sqrt{x^2-y^2}$ a la raíz.

Solución

El coeficiente se introduce y se eleva al cuadrado y la fracción resultante se simplifica:

$$\frac{1}{x-y}\sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2}\left(x^2-y^2\right)}=\sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}}=\sqrt{\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}}=\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$$

EJERCICIO 102

Introduce a la raíz los factores:

1. $3\sqrt{5}$
2. $5\sqrt{7}$
3. $4\sqrt[3]{2}$
4. $\frac{5}{4}\sqrt{2}$
5. $\frac{2}{3}\sqrt[5]{3}$
6. $x\sqrt{x}$
7. $2x\sqrt[3]{x^2}$
8. $m^3n\sqrt[4]{mn}$
9. $xy^2\sqrt[4]{xy}$
10. $5a^2b^3c\sqrt{2ac}$
11. $\frac{1}{2a}\sqrt[3]{2a^2}$
12. $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{4b}{5a}}$

13. $\frac{3y^2}{4x}\sqrt[4]{\frac{2x^2}{3y}}$

14. $\frac{3ax}{\sqrt{3a}}$

15. $\frac{2x}{\sqrt[3]{2x^2}}$

16. $(2a+b)\sqrt{ab}$

17. $\frac{3a}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a^2}}$

18. $\frac{x+1}{x-1}\sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$

19. $\frac{1}{x-2}\sqrt[3]{x^3-8}$

20. $\frac{2a^2x}{x+a}\sqrt{\frac{x^2+a^2+2ax}{2ax}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Estas operaciones se efectúan si y sólo si el índice del radical y el radicando son iguales (radicales semejantes).

$$a\sqrt[n]{d} + b\sqrt[n]{d} - c\sqrt[n]{d} = (a+b-c)\sqrt[n]{d}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente operación: $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$.

Solución

Los radicales son semejantes, por tanto, se realiza la operación únicamente con los coeficientes y se obtiene como resultado:

$$3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=(3+4)\sqrt{5}=7\sqrt{5}$$

2 Simplifica la siguiente operación: $5\sqrt{3x}+6\sqrt{3x}-10\sqrt{3x}$.

Solución

Los radicales son semejantes, entonces se realiza la operación con los coeficientes y el resultado es:

$$5\sqrt{3x}+6\sqrt{3x}-10\sqrt{3x}=(5+6-10)\sqrt{3x}=\sqrt{3x}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{6}-\sqrt[4]{5}$?

Solución

Se agrupan los radicales semejantes:

$$\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{6}-\sqrt[4]{5}=\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{5}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

Se realiza la reducción:

$$=\left(\frac{2}{3}-1\right)\sqrt[4]{5}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{6}=-\frac{1}{3}\sqrt[4]{5}+\frac{1}{4}\sqrt{6}$$

Finalmente, el resultado es: $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{5}+\frac{1}{4}\sqrt{6}$

4 Reduce la siguiente expresión: $3y\sqrt{2x}-2x\sqrt{3y}+5y\sqrt{2x}+7x\sqrt{3y}$.

Solución

Se agrupan los términos semejantes y se simplifican para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}3y\sqrt{2x}-2x\sqrt{3y}+5y\sqrt{2x}+7x\sqrt{3y} &= 3y\sqrt{2x}+5y\sqrt{2x}-2x\sqrt{3y}+7x\sqrt{3y}\\ &=(3y+5y)\sqrt{2x}+(-2x+7x)\sqrt{3y}\\ &=8y\sqrt{2x}+5x\sqrt{3y}\end{aligned}$$

5 Simplifica la siguiente expresión: $3\sqrt{20}+4\sqrt{12}-2\sqrt{45}-\sqrt{75}$.

Solución

Los radicales no son semejantes, entonces se efectúan las simplificaciones de cada radical:

$$\sqrt{20}=\sqrt{2^2\cdot 5}=2\sqrt{5}\qquad \sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}\qquad \sqrt{45}=\sqrt{3^2\cdot 5}=3\sqrt{5}\qquad \sqrt{75}=\sqrt{5^2\cdot 3}=5\sqrt{3}$$

Se reemplazan los radicales y se realiza la reducción para obtener:

$$\begin{aligned}3\sqrt{20}+4\sqrt{12}-2\sqrt{45}-\sqrt{75} &= 3\left(2\sqrt{5}\right)+4\left(2\sqrt{3}\right)-2\left(3\sqrt{5}\right)-5\sqrt{3}\\ &=6\sqrt{5}+8\sqrt{3}-6\sqrt{5}-5\sqrt{3}=(6-6)\sqrt{5}+(8-5)\sqrt{3}=3\sqrt{3}\end{aligned}$$

6 Efectúa la siguiente operación: $\sqrt{18x^2y^3}+x\sqrt{32y^3}-5\sqrt{2x^2y^3}$.

Solución

Se simplifica cada uno de los radicales y se realiza la operación, el resultado es:

$$\begin{aligned}\sqrt{18x^2y^3}+x\sqrt{32y^3}-5\sqrt{2x^2y^3} &= \sqrt{3^2\cdot 2x^2y^2y}+x\sqrt{2^4\cdot 2y^2y}-5\sqrt{2x^2y^2y}\\ &=3xy\sqrt{2y}+2^2xy\sqrt{2y}-5xy\sqrt{2y}\\ &=3xy\sqrt{2y}+4xy\sqrt{2y}-5xy\sqrt{2y}=2xy\sqrt{2y}\end{aligned}$$

7 Simplifica $a\sqrt{12ab}+\sqrt{98b^3c}-5\sqrt{3a^3b}-b\sqrt{18bc}+a\sqrt{3ab}$.

Solución

Se simplifica cada uno de los radicales:

$$\begin{aligned}&=a\sqrt{2^2\cdot 3ab}+\sqrt{2\cdot 7^2b^2bc}-5\sqrt{3a^2ab}-b\sqrt{2\cdot 3^2bc}+a\sqrt{3ab}\\ &=a\left(2\sqrt{3ab}\right)+7b\sqrt{2bc}-5\left(a\sqrt{3ab}\right)-b\left(3\sqrt{2bc}\right)+a\sqrt{3ab}\\ &=2a\sqrt{3ab}+7b\sqrt{2bc}-5a\sqrt{3ab}-3b\sqrt{2bc}+a\sqrt{3ab}\end{aligned}$$

Se agrupan los términos semejantes y se reducen para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}&=2a\sqrt{3ab}-5a\sqrt{3ab}+a\sqrt{3ab}+7b\sqrt{2bc}-3b\sqrt{2bc}\\ &=-2a\sqrt{3ab}+4b\sqrt{2bc}\end{aligned}$$

EJERCICIO 103

Realiza las siguientes operaciones con radicales:

1. $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}$
2. $2\sqrt[3]{3}-7\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}$
3. $4\sqrt{7}-8\sqrt{7}+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}$
4. $3\sqrt{5}+2\sqrt{7}-4\sqrt{5}+6\sqrt{7}$
5. $2\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{3}-2\sqrt{2}-10\sqrt{3}-\sqrt{2}$
6. $\frac{3}{4}\sqrt{10}-\frac{1}{6}\sqrt{13}+\frac{1}{2}\sqrt{10}+\frac{2}{3}\sqrt{13}$
7. $\frac{\sqrt{5}}{12}-\frac{3\sqrt{6}}{8}+\frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{3\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}$
8. $6\sqrt[3]{m}-10\sqrt[3]{m}$
9. $\frac{4}{3}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{13}{6}\sqrt{x}$
10. $5\sqrt[4]{xy}-2\sqrt[4]{xy}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{xy}$
11. $\sqrt{28}+\sqrt{175}-\sqrt{63}$
12. $2\sqrt{18}+5\sqrt{50}-4\sqrt{2}$
13. $3\sqrt{75}+2\sqrt{12}-4\sqrt{243}$
14. $2\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{20}-\sqrt{8}$
15. $2\sqrt{72}-4\sqrt{18}+5\sqrt{12}-3\sqrt{48}$
16. $2\sqrt{98}-3\sqrt{80}-\sqrt{338}+\sqrt{20}$
17. $3\sqrt{405}-2\sqrt{99}+2\sqrt{500}-4\sqrt{1331}$
18. $\frac{1}{5}\sqrt{450}-\frac{1}{4}\sqrt{800}-\frac{2}{5}\sqrt{320}+\sqrt{80}$
19. $\sqrt{343a^4}+a^2\sqrt{175}-3\sqrt{7a^4}$
20. $a\sqrt{4b}+\sqrt{a^2b}+\sqrt{25a^2b}$
21. $\sqrt[3]{24x^4}+4x\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{375x^4}$
22. $\sqrt[4]{32x^8}-4x^2\sqrt[4]{512}$
23. $2a\sqrt{xy^2}-3\sqrt{a^2xy^2}+4y\sqrt{a^2x}$
24. $\sqrt{2a^2b^3}+a\sqrt{\frac{243}{4}b^3}+b\sqrt{\frac{50}{36}a^2b}-\sqrt{\frac{75}{16}a^2b^3}$
25. $a^2b\sqrt{c}+\frac{1}{4}a^2\sqrt{b^2c}-\frac{1}{3}b\sqrt{a^4c}+\frac{1}{2}a^2b\sqrt{c}$
26. $\frac{\sqrt[4]{2a^9b^5}}{6}-\frac{b\sqrt[4]{162a^9b}}{4}+a^2\sqrt[4]{\frac{2ab^5}{16}}-\frac{7a^2b\sqrt[4]{2ab}}{8}$
27. $\sqrt{49x^2y}-\sqrt{50x^4y}+x\sqrt{9y}-2x\sqrt{2x^2y}$
28. $\sqrt{x^3y^5}-\sqrt{48x^5y^2}-xy\sqrt{4xy^3}+y\sqrt{27x^5}$
29. $3x\sqrt{2y}+\sqrt{75xy^2}-2\sqrt{2x^2y}-\sqrt{3xy^2}$
30. $2a\sqrt{50b^2c}+5c\sqrt{27a^2b}-3\sqrt{32a^2b^2c}+\sqrt{3a^2bc^2}$
31. $3\sqrt[3]{8x^3y^2}-5\sqrt[3]{4xy^3}-2x\sqrt[3]{64y^2}+y\sqrt[3]{32x}$
32. $15b\sqrt[4]{5a^6b^3}+6a\sqrt[4]{3a^5b^{14}}-5\sqrt[4]{5a^6b^7}-6\sqrt[4]{48a^9b^{14}}$
33. $\frac{1}{3}\sqrt{20a^3}+\frac{1}{6}\sqrt{3ab^3}-\frac{1}{3}a\sqrt{5a}-b\sqrt{\frac{3}{4}ab}$
34. $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{y}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4y^5}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{x^3y}+\frac{2}{3}xy\sqrt[3]{xy^2}$
35. $\frac{5ab}{3}\sqrt{\frac{2a^5}{9b}}+\frac{1}{3}a\sqrt{\frac{5ab^6}{12}}-a^2b\sqrt{\frac{8a^3}{9b}}+2\sqrt{\frac{5a^3b^6}{48}}$
36. $\sqrt{16a-32}+\sqrt{25a-50}-\sqrt{9a-18}$
37. $\sqrt{x^3+2x^2}+3x\sqrt{x+2}-5\sqrt{x^2(x+2)}$
38 $9\sqrt{x^3y^2-3x^2y^3}-2xy\sqrt{4x-12y}+5x\sqrt{xy^2-3y^3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Con índices iguales. Cuando los índices de los radicales son iguales, se multiplican los radicandos y se simplifica, de ser posible, el resultado.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Multiplica y simplifica la siguiente expresión: $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$.

Solución

Se multiplican los radicandos y el radical resultante se simplifica, el resultado es:

$$\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{(8)(2)}=\sqrt{16}=\sqrt{2^4}=\left(2^4\right)^{\frac{1}{2}}=2^2=4$$

2 Realiza la siguiente multiplicación: $\sqrt[3]{9xy^2}\cdot\sqrt[3]{9x^4y}$.

Solución

Se realiza el producto de los términos internos de los radicales y el resultado se simplifica:

$$\sqrt[3]{9xy^2}\cdot\sqrt[3]{9x^4y}=\sqrt[3]{\left(9xy^2\right)\left(9x^4y\right)}=\sqrt[3]{81x^5y^3}=\sqrt[3]{3^4x^5y^3}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3x^3x^2y^3}=3xy\,\sqrt[3]{3x^2}$$

3 Efectúa el siguiente producto: $\frac{xy}{4}\cdot\sqrt{6x^3y^5}\cdot\sqrt{8xy^4}$.

Solución

Se realiza el producto de los radicales y el resultado se multiplica por el coeficiente para obtener como resultado:

$$\frac{xy}{4}\sqrt{6x^3y^5}\sqrt{8xy^4}=\frac{xy}{4}\sqrt{\left(6x^3y^5\right)\left(8xy^4\right)}=\frac{xy}{4}\sqrt{48x^4y^9}=\frac{xy}{4}\left(2^2x^2y^4\sqrt{3y}\right)=x^3y^5\sqrt{3y}$$

4 Realiza la siguiente operación: $\frac{2}{3}\sqrt{xy}\left(\frac{3}{4}x\sqrt{xy^3}-\frac{1}{2}y\sqrt{x^2y}\right)$.

Solución

Se realiza el producto del monomio por cada uno de los términos del binomio:

$$\frac{2}{3}\sqrt{xy}\left(\frac{3}{4}x\sqrt{xy^3}-\frac{1}{2}y\sqrt{x^2y}\right)=\left(\frac{2}{3}\sqrt{xy}\right)\left(\frac{3}{4}x\sqrt{xy^3}\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{xy}\right)\left(\frac{1}{2}y\sqrt{x^2y}\right)$$
$$=\frac{6}{12}x\sqrt{x^2y^4}-\frac{2}{6}y\sqrt{x^3y^2}$$

Se simplifican los radicales y el resultado final es:

$$=\frac{1}{2}x\left(xy^2\right)-\frac{1}{3}y\left(xy\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{3}xy^2\sqrt{x}$$

EJERCICIO 104

Efectúa y simplifica las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$
2. $\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}$
3. $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{6}$
4. $\left(3\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{15}\right)$
5. $\sqrt{xy^3}\cdot\sqrt{xy}$
6. $\sqrt[3]{x^2y^4}\cdot\sqrt[3]{x^2y}$
7. $\frac{2}{3}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{x^5}$
8. $\left(2\sqrt{3ab}\right)\left(3\sqrt{6a^3b^2}\right)$
9. $\left(\frac{2}{3}\sqrt{xy^2}\right)\left(\sqrt{27x^2y^5}\right)$
10. $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{a^5}$
11. $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{2a^2}\cdot\sqrt[4]{8a^4}$
12. $\left(-4\sqrt[3]{2a^2b^5}\right)\left(2\sqrt[3]{3ab^2}\right)$
13. $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{3a^3}\cdot\sqrt{6a^{-1}}$
14. $\left(2\sqrt[4]{x^3}\right)\left(\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt[4]{x^3}\right)$
15. $\left(-2\sqrt{3ab}\right)\left(\sqrt{6a^2b}\right)\left(\sqrt{a^3b^5}\right)$

16. $\left(\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3a}{x}}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{6a^3}{x^3}}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$

17. $\sqrt{\frac{3am}{2x}}\sqrt{\frac{8x^3}{a^3m^5}}$

18. $\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-4\right)$

19. $\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}\right)$

20. $\sqrt{x}\left(\frac{4}{3}\sqrt{8x^3}-\sqrt{x}\right)$

21. $\left(\sqrt{3}-4\right)^2$

22. $\left(7\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(7\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

23. $\left(\sqrt{2m}+n\right)\left(\sqrt{2m}-4n\right)$

24. $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$

25. $\sqrt{x+y}\cdot\sqrt{x^2-y^2}$

26. $\sqrt{x+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{y}}$

27. $\sqrt{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-x}$

28. $\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\sqrt[3]{3x^2-6xy+3y^2}$

29. $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+y}}\sqrt{(x+y)^2}$

30. $\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{3}}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Con índices diferentes

Para multiplicar radicales con índices diferentes se busca un índice común, que resulta del mínimo común múltiplo de los índices de los radicales y recibe el nombre de *mínimo común índice*.

EJEMPLOS

1 Realiza la siguiente operación: $\sqrt[3]{5x^2}\sqrt{3x}$.

Solución

Los índices de las raíces son 3 y 2 respectivamente, se busca el índice común:

$$\begin{array}{c|c} 3,\ 2 & 2 \\ 3,\ 1 & 3 \\ 1,\ 1 & \end{array}$$

el mínimo común índice es 6

Se transforman las raíces a un índice 6, de la siguiente manera:

$$\sqrt[3]{5x^2}=\sqrt[(3)(2)]{\left(5x^2\right)^2}=\sqrt[6]{5^2x^4} \qquad \sqrt{3x}=\sqrt[(2)(3)]{(3x)^3}=\sqrt[6]{3^3x^3}$$

Se efectúa la multiplicación, se simplifica el radical y se obtiene como resultado:

$$\sqrt[6]{5^2x^4}\sqrt[6]{3^3x^3}=\sqrt[6]{\left(5^2x^4\right)\left(3^3x^3\right)}=\sqrt[6]{5^2\cdot3^3\cdot x^7}=\sqrt[6]{5^2\cdot3^3\cdot x^6x}=x\sqrt[6]{675x}$$

2 Realiza la siguiente operación: $\sqrt[4]{x^3y}\sqrt{xy}$.

Solución

Se busca el mínimo común índice de 4 y 2

$$\begin{array}{c|c} 4,\ 2 & 2 \\ 2,\ 1 & 2 \\ 1,\ 1 & \end{array}$$

mínimo común índice = 4

Se transforman las raíces a índice 4 y se realiza la multiplicación:

$$\sqrt[4]{x^3y}\sqrt{xy}=\sqrt[4]{x^3y}\sqrt[(2)(2)]{(xy)^2}=\sqrt[4]{x^3y}\sqrt[4]{x^2y^2}=\sqrt[4]{\left(x^3y\right)\left(x^2y^2\right)}=\sqrt[4]{x^5y^3}=x\sqrt[4]{xy^3}$$

EJERCICIO 105

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[6]{2}$
2. $\sqrt[6]{x^5}\,\sqrt[3]{x^2}$
3. $\sqrt{x}\,\sqrt[16]{x^7}$
4. $\sqrt{3xy^2}\,\sqrt[3]{2x^3y}$
5. $3x\sqrt{x^3y}\,\sqrt[4]{xy^2}$
6. $\sqrt{2ab}\,\sqrt[4]{a^3b}$
7. $\sqrt[3]{3x^2}\,\sqrt{2x}$
8. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4xy}\right)\left(\sqrt{2xy}\right)$
9. $\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a}\,\sqrt[4]{a}$
10. $\sqrt[6]{x^4}\,\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt{x}$
11. $\sqrt[12]{y^5}\,\sqrt{y}\,\sqrt[4]{y}$
12. $\frac{1}{y^2}\sqrt[4]{2y}\,\sqrt[3]{xy^2}\,\sqrt[12]{2y^5}$
13. $\left(\frac{n}{2m}\sqrt[3]{2m^2n}\right)\left(\frac{3}{n^2}\sqrt[9]{m^4n^8}\right)$
14. $\left(\frac{3x}{4y}\sqrt[5]{4x^3y^2}\right)\left(\sqrt{4xy^2}\right)$
15. $\sqrt[3]{x}\,\sqrt[4]{y}\,\sqrt[6]{z}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

Con índices iguales

Se realiza la división de los radicandos y se simplifica el resultado.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

EJEMPLOS

1 Resuelve la siguiente operación: $\frac{\sqrt[3]{81x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}}$.

Solución

Se hace la división y el resultado se simplifica para obtener:

$$\frac{\sqrt[3]{81x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}} = \sqrt[3]{\frac{81x^5}{3x^2}} = \sqrt[3]{27x^3} = \sqrt[3]{3^3x^3} = 3x$$

2 Efectúa la siguiente operación: $\frac{\sqrt{128a^3b^5}}{\sqrt{8a^2b}}$.

Solución

Se dividen las expresiones, se simplifica el resultado y se obtiene que:

$$\frac{\sqrt{128a^3b^5}}{\sqrt{8a^2b}} = \sqrt{\frac{128a^3b^5}{8a^2b}} = \sqrt{16ab^4} = \sqrt{2^4ab^4} = 2^2b^2\sqrt{a} = 4b^2\sqrt{a}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\frac{\sqrt[3]{135x^9y^{12}z}}{\sqrt[3]{320x^2y^2z^4}}$?

Solución

Los coeficientes de las expresiones se simplifican y se realiza la división con las bases:

$$\frac{\sqrt[3]{135x^9y^{12}z}}{\sqrt[3]{320x^2y^2z^4}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}x^7y^{10}z^{-3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}x^7y^{10}\frac{1}{z^3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}\frac{x^7y^{10}}{z^3}}$$

Se simplifica el radical para obtener finalmente:

$$= \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^6}\frac{x^6xy^9y}{z^3}} = \frac{3}{2^2}\frac{x^2y^3}{z}\sqrt[3]{xy} = \frac{3x^2y^3}{4z}\sqrt[3]{xy}$$

4 Obtén: $\dfrac{\sqrt[4]{8^{-2}a^5b^{-3}c^5}}{\sqrt[4]{4a^{-3}bc^{-7}}}$.

Solución

Se descomponen los coeficientes en sus factores primos y se aplican los respectivos teoremas de exponentes:

$$\frac{\sqrt[4]{8^{-2}a^5b^{-3}c^5}}{\sqrt[4]{4a^{-3}bc^{-7}}} = \sqrt[4]{\frac{\left(2^3\right)^{-2}a^5b^{-3}c^5}{2^2a^{-3}bc^{-7}}} = \sqrt[4]{\frac{2^{-6}a^5b^{-3}c^5}{2^2a^{-3}bc^{-7}}} = \sqrt[4]{2^{-6-2}a^{5-(-3)}b^{-3-1}c^{5-(-7)}}$$

$$= \sqrt[4]{2^{-8}a^8b^{-4}c^{12}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^8}a^8\frac{1}{b^4}c^{12}} = \sqrt[4]{\frac{a^8c^{12}}{2^8b^4}} = \frac{a^2c^3}{2^2b} = \frac{a^2c^3}{4b}$$

Por consiguiente, el resultado es: $\dfrac{a^2c^3}{4b}$

EJERCICIO 106

Realiza los siguientes cocientes de radicales:

1. $\dfrac{\sqrt[4]{m^6n^5}}{\sqrt[4]{m^4n}}$
2. $\dfrac{\sqrt[6]{x^8y^{15}}}{\sqrt[6]{xy^2}}$
3. $\dfrac{\sqrt{45a^7b^4c^3}}{\sqrt{5ac}}$
4. $\dfrac{\sqrt{128x^5y^4}}{\sqrt{8x^4y^2}}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{162x^7y^6}}{\sqrt[3]{2xy}}$
6. $\dfrac{\sqrt[4]{3888a^5b^6}}{\sqrt[4]{3ab^2}}$
7. $\dfrac{\sqrt{4a^7b}}{\sqrt{25ab^9}}$
8. $\dfrac{\sqrt{567m^4x^6}}{\sqrt{7x^2}}$
9. $\dfrac{\sqrt{9m^{-5}n^{-1}}}{\sqrt{16m^{-1}n^{-13}}}$
10. $\dfrac{\sqrt[3]{16z^{-4}w^{-8}}}{\sqrt[3]{54z^{-1}w^{-2}}}$
11. $\dfrac{\sqrt{50z^3x^3}}{\sqrt{18x^3z^{-1}}}$
12. $\dfrac{\sqrt{44u^4v^6}}{\sqrt{275u^{-2}v^2}}$
13. $\dfrac{\sqrt{112b^{-2}a}}{\sqrt{63b^2a^{-3}}}$
14. $\dfrac{\sqrt{1404x^4y^{-3}}}{\sqrt{624x^{-2}y^5}}$
15. $\dfrac{\sqrt{68m^{-3}n^{-2}}}{\sqrt{153m^3n^2p^{-8}}}$
16. $\dfrac{\sqrt{216mn^{-2}p^{-2}}}{\sqrt{54mn^{-6}p^2}}$
17. $\dfrac{\sqrt[3]{243y^{\frac{3}{2}}x^{-2}}}{\sqrt[3]{72y^{-\frac{4}{6}}x}}$
18. $\dfrac{\sqrt[5]{3\,125y^4z^7}}{\sqrt[5]{32y^{-6}z^2}}$
19. $\dfrac{\sqrt[3]{-375m^{-2}n^{-2}}}{\sqrt[3]{192m^4n^{-7}}}$
20. $\dfrac{\sqrt[3]{72x^4y^{-2}}}{\sqrt[3]{576x^{-8}y^{-14}}}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Con índices diferentes

Se transforman los radicales a un índice común y se realiza la división.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente división: $\dfrac{\sqrt{128}}{\sqrt[3]{16}}$.

Solución

El mínimo común índice de 2 y 3 es 6, se expresa cada uno de los radicales con este índice:

$$\sqrt{128} = \sqrt{2^7} = \sqrt[(2)(3)]{\left(2^7\right)^3} = \sqrt[6]{2^{21}} \qquad \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[(3)(2)]{\left(2^4\right)^2} = \sqrt[6]{2^8}$$

Se remplazan los radicales y se efectúa la división:

$$\frac{\sqrt{128}}{\sqrt[3]{16}} = \frac{\sqrt[6]{2^{21}}}{\sqrt[6]{2^8}} = \sqrt[6]{\frac{2^{21}}{2^8}} = \sqrt[6]{2^{13}} = 2^2\sqrt[6]{2} = 4\sqrt[6]{2}$$

2 Simplifica: $\frac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[4]{x^3y}}$.

Solución

Se encuentra el índice común de 8 y 4, se transforman los radicales y se obtiene:

$$\frac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[4]{x^3y}}=\frac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[(2)(4)]{\left(x^3y\right)^2}}=\frac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[8]{x^6y^2}}=\sqrt[8]{\frac{x^3y^{-2}}{x^6y^2}}=\sqrt[8]{\frac{1}{x^3y^4}}=\frac{\sqrt[8]{1}}{\sqrt[8]{x^3y^4}}=\frac{1}{\sqrt[8]{x^3y^4}}$$

EJERCICIO 107

Efectúa las siguientes divisiones:

1. $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{6}}$
2. $\frac{\sqrt{4y^2}}{\sqrt[3]{2y^4}}$
3. $\frac{\sqrt[3]{12x^3y}}{\sqrt{6x^2}}$
4. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{8ab}\div\frac{1}{12}\sqrt{4a^2}$
5. $\frac{\sqrt[3]{2a^2b}}{\sqrt[5]{a^3b^2}}$
6. $\frac{1}{6}\sqrt{3a}\div\frac{1}{12}\sqrt[6]{24a^4}$
7. $\sqrt[3]{5a^4}\div\sqrt[9]{125a^2}$
8. $\frac{\sqrt{12a^3b^2}}{\sqrt[3]{4ab}}$
9. $\frac{x\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^3y}}$
10. $\frac{\sqrt[4]{xy^2}}{\sqrt{x^3y}}$
11. $\frac{\sqrt[3]{16x^2y}}{\sqrt{4xy^2}}$
12. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n+1]{x}}$
13. $\frac{\sqrt[n]{(x+1)^{n+1}}}{\sqrt[n+1]{(x+1)^{n+2}}}$
14. $\frac{\sqrt[6]{(x-1)^3}}{\sqrt[3]{x-1}}$
15. $\frac{\sqrt[4]{(a-b)^5}}{\sqrt[6]{(a-b)^5}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Racionalización

Racionalización del denominador de una fracción

Esta operación transforma al denominador en una cantidad racional.

- **Denominador monomio.** En una fracción de la forma $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ con $m<n$ se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m+m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Racionaliza el denominador de: $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

Solución

El factor, por el que se multiplica el numerador y el denominador, resulta de la expresión $\sqrt[3]{2}$ y es igual a: $\sqrt[3]{2^{3-1}}=\sqrt[3]{2^2}$. Se realiza la multiplicación y se obtiene:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

2 Racionaliza el denominador de: $\frac{3xy}{\sqrt[4]{5xy}}$.

Solución

El factor que multiplica la expresión es $\sqrt[4]{(5xy)^{4-1}} = \sqrt[4]{(5xy)^3}$

Al realizar la multiplicación, se determina que:

$$\frac{3xy}{\sqrt[4]{5xy}} = \frac{3xy}{\sqrt[4]{5xy}} \cdot \frac{\sqrt[4]{(5xy)^3}}{\sqrt[4]{(5xy)^3}} = \frac{3xy\sqrt[4]{(5xy)^3}}{\sqrt[4]{(5xy)^4}} = \frac{3xy\sqrt[4]{(5xy)^3}}{5xy} = \frac{3}{5}\sqrt[4]{5^3x^3y^3} = \frac{3}{5}\sqrt[4]{125x^3y^3}$$

3 Racionaliza el denominador de la expresión $\sqrt[3]{\frac{3}{4x}}$.

Solución

Se separa la expresión como el cociente de raíces, se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[3]{2x^2}$ y se racionaliza para obtener como resultado:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4x}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2x}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^{3-2}x^{3-1}}}{\sqrt[3]{2^{3-2}x^{3-1}}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{2^3x^3}} = \frac{\sqrt[3]{6x^2}}{2x} = \frac{1}{2x}\sqrt[3]{6x^2}$$

- **Denominador binomio.** Una expresión de la forma $\frac{c}{a \pm b}$ se racionaliza multiplicando al numerador y denominador por el conjugado del denominador, esto es:

Si el denominador es de la forma $a + b$, entonces el conjugado es $a - b$.
Si el denominador es de la forma $a - b$, entonces el conjugado es $a + b$.

El producto de binomios conjugados es una diferencia de cuadrados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En la multiplicación aplican las leyes de los exponentes y los radicales para simplificar las expresiones, como se muestra a continuación en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Racionaliza el numerador de la expresión: $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$.

Solución

El conjugado de $\sqrt{5}-2$ es $\sqrt{5}+2$ que multiplica al numerador y denominador:

$$\frac{3}{\sqrt{5}-2} = \frac{3}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{3\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-(2)^2} = \frac{3\sqrt{5}+6}{5-4} = \frac{3\sqrt{5}+6}{1} = 3\sqrt{5}+6$$

Entonces, el resultado de la racionalización es: $3\sqrt{5}+6$

2 Racionaliza el denominador de la expresión: $\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}+3\sqrt{2y}}$.

Solución

El conjugado del denominador es $\sqrt{3x}-3\sqrt{2y}$, al multiplicar el numerador y el denominador se reduce la expresión y el resultado es:

$$\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}+3\sqrt{2y}}=\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}+3\sqrt{2y}}\cdot\frac{\sqrt{3x}-3\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}-3\sqrt{2y}}=\frac{\left(\sqrt{3x}\right)^2-3\sqrt{6xy}-\sqrt{6xy}+3\left(\sqrt{2y}\right)^2}{\left(\sqrt{3x}\right)^2-\left(3\sqrt{2y}\right)^2}$$

$$=\frac{3x-4\sqrt{6xy}+3(2y)}{3x-9(2y)}$$

$$=\frac{3x-4\sqrt{6xy}+6y}{3x-18y}$$

Al final, el resultado de la racionalización es: $\dfrac{3x-4\sqrt{6xy}+6y}{3x-18y}$

Para racionalizar una expresión, cuyo índice del radical es 3, se multiplica por una expresión que dé como resultado una suma o diferencia de cubos.

Si el denominador es de la forma $(a+b)$, su conjugado es (a^2-ab+b^2).
Si el denominador es de la forma $(a-b)$, su conjugado es (a^2+ab+b^2).

Los resultados de la multiplicación son los siguientes:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \qquad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

Ejemplo

Racionaliza el denominador de la expresión: $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Solución

Entonces, el conjugado del denominador $\sqrt[3]{x}-1$ es:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x}\right)(1)+(1)^2 \text{ o bien } \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, resulta una expresión equivalente que carece de raíces en el denominador.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{2}{\sqrt[3]{x}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-(1)^3}=\frac{2\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+2}{x-1}$$

EJERCICIO 108

Racionaliza el denominador en las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
2. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
3. $\sqrt[3]{\dfrac{25}{18}}$
4. $\dfrac{3x}{\sqrt[3]{x^2}}$
5. $\dfrac{6x^2y}{\sqrt{3xy}}$
6. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2xy}}$
7. $\dfrac{3a}{\sqrt[5]{2a}}$
8. $\dfrac{3a^2}{\sqrt[3]{9a^4b}}$

9. $\sqrt{\frac{3y^2}{8x^3y}}$

10. $\sqrt[4]{\frac{16ab^3}{25a^2b^5}}$

11. $\frac{-1}{1-2\sqrt{3}}$

12. $\frac{2}{3-\sqrt{2}}$

13. $\frac{\sqrt{5x}}{1-\sqrt{5x}}$

14. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

15. $\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2x}}{2\sqrt{3x}-\sqrt{2x}}$

16. $\frac{3a-2b}{\sqrt{3a}-\sqrt{2b}}$

17. $\frac{1-x^2}{1+\sqrt{x}}$

18. $\frac{2xy}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

19. $\frac{1-x}{\sqrt[3]{x}-1}$

20. $\frac{3a+b}{\sqrt[3]{3a}+\sqrt[3]{b}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Racionalización del numerador de una fracción

Esta operación permite transformar el numerador en una cantidad racional.

Sea la fracción $\frac{\sqrt[n]{b^m}}{a}$, la racionalización del numerador es:

$$\frac{\sqrt[n]{b^m}}{a}=\frac{\sqrt[n]{b^m}}{a}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}}{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{b^n}}{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{b}{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Racionaliza el numerador en la expresión: $\frac{\sqrt{5x}}{3x}$.

Solución

El factor por el cual se multiplicará tanto numerador como denominador es $\sqrt{5x}$

$$\frac{\sqrt{5x}}{3x}=\frac{\sqrt{5x}}{3x}\cdot\frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}}=\frac{\sqrt{5^2x^2}}{3x\sqrt{5x}}=\frac{5x}{3x\sqrt{5x}}=\frac{5}{3\sqrt{5x}}$$

2 Racionaliza el numerador en la expresión: $\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}}{4x^2-9y^2}$.

Solución

Se factoriza el denominador y se multiplica por el conjugado de la expresión $\sqrt{2x}-\sqrt{3y}$ para obtener:

$$\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}}{4x^2-9y^2}=\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}}{(2x+3y)(2x-3y)}\cdot\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{3y}}{\sqrt{2x}+\sqrt{3y}}=\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^2-\left(\sqrt{3y}\right)^2}{(2x+3y)(2x-3y)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\right)}$$

$$=\frac{2x-3y}{(2x+3y)(2x-3y)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\right)}$$

$$=\frac{1}{(2x+3y)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\right)}$$

3 Racionaliza la expresión: $\sqrt{x}+\sqrt{3}$.

Solución

Se multiplica la expresión por su conjugado, tanto en el numerador como en el denominador, en este caso $\sqrt{x}-\sqrt{3}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

4 Racionaliza el numerador en la expresión: $\dfrac{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}}{y+2}$.

Solución

Debido a que las raíces son cúbicas, se toma el conjugado de la expresión: $\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}$ como $\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}$

Por tanto:

$$\frac{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}}{y+2}=\frac{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}}{y+2}\cdot\frac{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}}=\frac{\left(\sqrt[3]{y}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{(y+2)\left(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}\right)}$$

$$=\frac{y+2}{(y+2)\left(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}}$$

EJERCICIO 109

Racionaliza los numeradores de las siguientes fracciones:

1. $\sqrt{3}$
2. $\dfrac{5\sqrt{8}}{2}$
3. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$
4. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{xy}}{2xy^2}$
6. $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{3x}$
7. $\dfrac{3\sqrt{6x}}{12x}$
8. $\dfrac{\sqrt[3]{2x^2}}{4x}$
9. $\dfrac{\sqrt[5]{16x^3}}{x^2}$
10. $\dfrac{\sqrt{3x^3}}{6xy}$
11. $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}$
12. $\dfrac{5-\sqrt{2}}{23}$
13. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
14. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{x}}{x^2-9}$
15. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$
16. $\dfrac{\sqrt{5x}-\sqrt{6y}}{10x-12y}$
17. $\sqrt{x}-\sqrt{5}$
18. $\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}$
19. $\dfrac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{a-8b}$
20. $\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{y}}{y^2-4}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 22
NÚMEROS COMPLEJOS

Reseña HISTÓRICA



Los números complejos

- En el siglo XVI Rafaello Bombelli fue uno de los primeros en admitir la utilidad de que los números negativos tuviesen raíces cuadradas. Fue el primero en escribir las reglas de suma, resta y producto de los complejos.
- En 1777 el matemático suizo Leonhard Euler simbolizó la raíz cuadrada de −1 con la letra *i* (por imaginario), introdujo la forma binómica $i^2 = -1$ y con él definitivamente se introducen los imaginarios a la matemática.
- Gauss, en su tesis doctoral de 1799, demostró su famoso teorema fundamental del álgebra: todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja, y estableció en 1831 la interpretación geométrica de los complejos: $x + yi \rightarrow (x, y)$.
- Otros términos que han sido usados para referirse a los números complejos son: "sofisticados" por Cardano, "sin sentido" por Néper, "inexplicables" por Girard, "incomprensibles" por Huygens e "imposibles" (diversos autores).

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Números imaginarios

El conjunto de los números imaginarios surge de la necesidad de obtener la raíz cuadrada de un número negativo para lo cual se define como unidad imaginaria: $i = \sqrt{-1}$.

Número imaginario puro

Se denomina así a los números de la forma bi donde b es un número real y $b \neq 0$.

Ejemplos

Las siguientes cantidades son números imaginarios puros:

$$2i\,,\ -4i\,,\ \frac{6}{5}i\,,\ \sqrt{3}\,i$$

En los siguientes ejemplos se ilustra cómo obtener números imaginarios puros:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de: $\sqrt{-25}$.

Solución

Se expresa el radicando como: $-25 = 25(-1)$ y se aplican los teoremas correspondientes de radicales:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25(-1)} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$$

Se sustituye $\sqrt{-1} = i$ para obtener:

$$\sqrt{-25} = 5\sqrt{-1} = 5i$$

2 ¿Cuál es el resultado de $2 - \sqrt{-\frac{25}{16}}$?

Solución

Se aplica el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior y se obtiene como resultado:

$$2 - \sqrt{-\frac{25}{16}} = 2 - \sqrt{\frac{25}{16}(-1)} = 2 - \sqrt{\frac{25}{16}}\sqrt{-1} = 2 - \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}i = 2 - \frac{5}{4}i$$

EJERCICIO 110

Representa las siguientes raíces en términos de la unidad imaginaria i:

1. $\sqrt{-16}$
2. $\sqrt{-36}$
3. $\sqrt{-49}$
4. $\sqrt{-121}$
5. $\sqrt{-625}$
6. $\sqrt{-8}$
7. $\sqrt{-50}$
8. $\sqrt{-54}$
9. $\sqrt{-125}$
10. $\sqrt{-162}$
11. $\sqrt{-\frac{12}{49}}$
12. $\sqrt{-\frac{75}{4}}$
13. $3 + \sqrt{-36}$
14. $2 - \sqrt{-112}$
15. $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{-45}$
16. $\frac{4}{5} - \frac{2}{7}\sqrt{-98}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Para realizar estas operaciones se suman o restan los coeficientes de i:

$$ai + bi - ci = (a + b - c)i$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: $\sqrt{-36} + 4\sqrt{-9}$.

Solución

Se obtienen los números imaginarios puros:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = 6\sqrt{-1} = 6i \qquad \sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = 3\sqrt{-1} = 3i$$

Se remplazan los radicales y se realiza la operación para obtener como resultado:

$$\sqrt{-36} + 4\sqrt{-9} = 6i + 4(3i) = 6i + 12i = (6 + 12)i = 18i$$

2 ¿Cuál es el resultado de: $\sqrt{-5} + \frac{2}{3}\sqrt{-45} - \frac{1}{2}\sqrt{-20}$?

Solución

Se expresan las raíces en términos de la unidad imaginaria:

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5(-1)} = \sqrt{5}i \qquad \sqrt{-45} = \sqrt{3^2 \cdot 5(-1)} = 3\sqrt{5}i \qquad \sqrt{-20} = \sqrt{2^2 \cdot 5(-1)} = 2\sqrt{5}i$$

Se sustituyen los números y se realizan las operaciones:

$$\begin{aligned}\sqrt{-5} + \frac{2}{3}\sqrt{-45} - \frac{1}{2}\sqrt{-20} &= \sqrt{5}i + \frac{2}{3}\left(3\sqrt{5}i\right) - \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}i\right)\\ &= \sqrt{5}i + 2\sqrt{5}i - \sqrt{5}i\\ &= \left(\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5}\right) i\\ &= 2\sqrt{5}\, i\end{aligned}$$

3 Determina el resultado de: $\frac{1}{2}\sqrt{-4} + \frac{2}{5}\sqrt{-9} - \frac{1}{3}\sqrt{-25}$.

Solución

Se extraen las raíces, se multiplican por los coeficientes y se realiza la operación para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{-4} + \frac{2}{5}\sqrt{-9} - \frac{1}{3}\sqrt{-25} &= \frac{1}{2}(2i) + \frac{2}{5}(3i) - \frac{1}{3}(5i) = i + \frac{6}{5}i - \frac{5}{3}i\\ &= \left(1 + \frac{6}{5} - \frac{5}{3}\right)i = \frac{8}{15}i\end{aligned}$$

4 Realiza la siguiente operación: $\sqrt{-72} + \sqrt{-48} - \sqrt{-162} - \sqrt{-300}$.

Solución

Se expresa cada uno de los radicales en términos de la unidad imaginaria:

$$\sqrt{-72} = \sqrt{36 \cdot 2} \cdot \sqrt{-1} = 6\sqrt{2}i \qquad \sqrt{-48} = \sqrt{16 \cdot 3} \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{3}i$$
$$\sqrt{-162} = \sqrt{81 \cdot 2} \cdot \sqrt{-1} = 9\sqrt{2}i \qquad \sqrt{-300} = \sqrt{100 \cdot 3} \cdot \sqrt{-1} = 10\sqrt{3}i$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se sustituye y se procede a efectuar la operación:

$$\begin{aligned}\sqrt{-72}+\sqrt{-48}-\sqrt{-162}-\sqrt{-300} &= 6\sqrt{2}i+4\sqrt{3}i-9\sqrt{2}i-10\sqrt{3}i\\ &= 6\sqrt{2}i-9\sqrt{2}i+4\sqrt{3}i-10\sqrt{3}i\\ &= \left(6\sqrt{2}-9\sqrt{2}\right)i+\left(4\sqrt{3}-10\sqrt{3}\right)i\\ &= -3\sqrt{2}i-6\sqrt{3}i\\ &= \left(-3\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right)i \text{ o } = -3\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)i\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado de la operación es: $\left(-3\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right)i$ o $=-3\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)i$

EJERCICIO 111

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{-9}+3\sqrt{-4}$
2. $\sqrt{-16}+\sqrt{25}-\sqrt{-9}-\sqrt{4}$
3. $\sqrt{-4}-3\sqrt{-1}+4\sqrt{-9}-5\sqrt{-16}$
4. $3\sqrt{-16}-\frac{1}{2}\sqrt{-64}+\sqrt{-9}$
5. $\sqrt{-54}+\sqrt{-150}-\sqrt{-24}$
6. $3\sqrt{-2}+2\sqrt{-8}-\sqrt{-32}-\sqrt{-18}$
7. $\sqrt{-18}+\sqrt{-75}-\sqrt{-98}-\sqrt{-12}$
8. $\frac{2}{3}\sqrt{-27}+\frac{1}{2}\sqrt{-50}-\frac{3}{4}\sqrt{-12}$
9. $\frac{1}{2}\sqrt{4}\,i+3\sqrt{9}-\frac{1}{5}\sqrt{-100}+2$
10. $13-\sqrt{(9)(4)}+4\sqrt{-25}-20i$
11. $\sqrt{-x^2}+x\sqrt{-9}-\sqrt{-16x^2}$
12. $\sqrt{-18x^3}+x\sqrt{-8x}-5x\sqrt{-2x}$
13. $\sqrt[8]{-6\,561}+\sqrt[8]{-256}$
14. $\sqrt[4]{-\frac{16}{81}x^5}+\frac{5}{4}x\sqrt[4]{-x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Potencias de *i*

Se obtienen al elevar la unidad imaginaria $i=\sqrt{-1}$ a la n-ésima potencia, con $n \in N$.

$$i^1 = i \qquad i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1 \qquad i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i \qquad i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$$

Para las potencias mayores que 4, los resultados son equivalentes a los anteriores; con el fin de poder determinarlos, la potencia se descompone de la siguiente manera:

$$i^n = i^{4m+k} = i^k \text{ con } n = 4m+k$$

Donde n, m y $k \in N$, además $n > 4$ y $k < 4$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de i^{13}?

Solución

La potencia i^{13} se representa como sigue:

$$i^{13} = i^{12+1} = i^{4(3)+1}$$

Se aplica la fórmula anterior y se obtiene:

$$i^{13} = i^{4(3)+1} = i^1 = i$$

Por tanto, se deduce que: $i^{13} = i$

2 Obtén el resultado de: $i^6 + 2i^9 - i^{11}$.

Solución

Se obtienen los valores de las potencias de i:

$$i^6 = i^{4(1)+2} = i^2 = -1 \qquad i^9 = i^{4(2)+1} = i^1 = i \qquad i^{11} = i^{4(2)+3} = i^3 = -i$$

Al sustituir estas equivalencias y realizar las operaciones se determina que:

$$i^6 + 2i^9 - i^{11} = -1 + 2i - (-i) = -1 + 2i + i = -1 + 3i$$

EJERCICIO 112

Desarrolla las potencias y simplifica las operaciones:

1. i^{14}
2. i^{15}
3. $3i^{31}$
4. i^{58}
5. i^{65}
6. $2i^3 + 3i^5$
7. $i^8 - i^9 + i^{10}$
8. $i^4 + i^3 - 3i^{16} + 4i^5$
9. $2i^{17} + 3i^{21} - i^5$
10. $i^{55} - i^{34} + i^{77}$
11. $i^9 - 2i^{12} + i^{15} - 3i^{23}$
12. $i^{100} - i^{24}$
13. $i^2 + i^4 + i^6 + i^8 + ... + i^{2n}$ si n es impar
14. $i^3 + i^5 + i^7 + i^9 + ... + i^{2n+1}$ si n es par o impar
15. Halla el resultado de: $i + i^2 + i^3 + ... + i^{100}$
16. Verifica la siguiente igualdad: $i^{n+1} + i^{n+2} = -i^n + i^{n+1}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación y división

Para realizar estas operaciones, los radicales se tienen que expresar en términos de i, posteriormente se aplican las siguientes fórmulas:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}\ , \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Para números imaginarios la operación $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} \neq \sqrt{(-2)(-2)}$, ya que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ y $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ sólo son verdaderas si a y b son positivos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de: $\sqrt{\frac{-9}{16}} \cdot \sqrt{-4}$.

Solución

Se expresan las raíces en términos de i, para después realizar la operación:

$$\sqrt{\frac{-9}{16}} \cdot \sqrt{-4} = \left(\frac{3}{4}i\right)(2i) = \frac{6}{4}i^2 = \frac{3}{2}(-1) = -\frac{3}{2}$$

2 Efectúa el producto de: $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-28} \cdot \sqrt{-\frac{4}{7}}$.

Solución

Se expresan las raíces en términos de i, se realiza el producto y el resultado es:

$$\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-28} \cdot \sqrt{-\frac{4}{7}} = (3i)(2\sqrt{7}\,i)\left(\frac{2}{\sqrt{7}}i\right) = \frac{12\sqrt{7}}{\sqrt{7}}i^3 = 12(-i) = -12i$$

3 Efectúa $\frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}$.

Solución

Se obtienen las raíces:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25(-1)} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5i \qquad \sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

Se sustituyen las equivalencias y se determina que:

$$\frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}} = \frac{5i}{2i} = \frac{5}{2}$$

4 Obtén el cociente de: $\frac{\sqrt{-48} + \sqrt{-75} - \sqrt{-147}}{\sqrt{-12}}$.

Solución

Se simplifican los radicales, se realiza la división y se obtiene como resultado:

$$\frac{\sqrt{-48} + \sqrt{-75} - \sqrt{-147}}{\sqrt{-12}} = \frac{4\sqrt{3}i + 5\sqrt{3}i - 7\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} = \frac{2\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} = 1$$

5 Simplifica la siguiente expresión: $\frac{i^4 - 2i^2 + 1}{i^3 - i^5}$.

Solución

Se sustituyen las equivalencias de cada potencia y se simplifica:

$$\frac{i^4 - 2i^2 + 1}{i^3 - i^5} = \frac{(1) - 2(-1) + 1}{(-i) - (i)} = \frac{1 + 2 + 1}{-2i} = \frac{4}{-2i} = -\frac{2}{i}$$

EJERCICIO 113

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-27}$
2. $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-18}\cdot\sqrt{-3}$
3. $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-6}$
4. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{-4}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{-9}\right)$
5. $\frac{1}{8}\sqrt{-16}\cdot\sqrt{-9}-\frac{1}{4}\sqrt{-25}$
6. $\sqrt{-\frac{16}{25}}\cdot\sqrt{-\frac{81}{4}}$
7. $\sqrt{-25}\left(3\sqrt{-4}+2\sqrt{-9}\right)$
8. $\sqrt{-18}\left(\sqrt{-2}+\sqrt{-3}\right)$
9. $\frac{\sqrt{-144}}{\sqrt{9}}$
10. $\frac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-4}}$
11. $\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-75}}$
12. $\frac{\sqrt{-8}-\sqrt{-64}}{\sqrt{-4}}$
13. $\frac{\sqrt{-4}+\sqrt{-49}}{\sqrt{100}}$
14. $\frac{\sqrt{-5}+\sqrt{-45}+\sqrt{-20}}{\sqrt{-125}}$
15. $\left(\sqrt{-8}+\sqrt{-18}-\sqrt{-50}\right)\div\sqrt{-32}$
16. $\left(i^3+i^5\right)\div(1-i)$
17. $\frac{1}{i^4-2i^2+1}$
18. $\frac{i^n\cdot i^{2n+2}}{i^{2n}}$
19. $\frac{i^{n+2}+i^{n-2}}{\sqrt[n+1]{i^{n^2-2n-3}}}$
20. $\frac{i+i^2+i^3+\ldots+i^{1001}}{i+i^2+i^3+\ldots+i^{999}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Números complejos

Se forman por una parte real y una imaginaria.

Son de la forma $z = a + bi$, con $a, b \in R$, donde:

$$a = \text{Re}(z) \text{ parte real } \text{ y } b = \text{Im}(z) \text{ parte imaginaria}$$

Un número complejo se representa de las siguientes formas:

forma rectangular o binomial	**forma cartesiana**
$z = a + bi$	$z = (a, b)$
$z = a$	$z = (a, 0)$
$z = bi$	$z = (0, b)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en forma cartesiana los números complejos: $z_1 = -4 + 5i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 8$.

Solución

	Forma cartesiana
$z_1 = -4 + 5i$	$z_1 = (-4, 5)$
$z_2 = 2i$	$z_2 = (0, 2)$
$z_3 = 8$	$z_3 = (8, 0)$

2 Representa en forma binomial o rectangular los siguientes números complejos: $z_1 = (3,-1)$, $z_2 = (2,0)$ y $z_3 = (0,-3)$.

Solución

	Forma binomial
$z_1 = (3, -1)$	$z_1 = 3 - i$
$z_2 = (2, 0)$	$z_2 = 2$
$z_3 = (0, -3)$	$z_3 = -3i$

EJERCICIO 114

Representa los siguientes números complejos en su forma binomial o cartesiana, según sea el caso:

1. $2 + 3i$
2. $(-1,5)$
3. $7i$
4. $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}i$
5. $5 - 2i$
6. $\left(\frac{1}{2},-\frac{6}{7}\right)$
7. $(0,-2)$
8. $-\frac{1}{3}$
9. $(3,0)$
10. $5-\frac{2}{11}i$
11. $\left(\frac{5}{2},-8\right)$
12. $1 - i$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Sean los números complejos $z = a + bi$, $w = c + di$

Se define:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i = (a + c, b + d) \qquad z - w = (a - c) + (b - d)i = (a - c, b - d)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean los números complejos $z = 2 + 3i$ y $w = -4 + 6i$, realiza: $(z + w)$ y $(z - w)$.

Solución

Se aplica la fórmula para la suma y la resta, para obtener:

$$z + w = (2 + 3i) + (-4 + 6i) = (2 + (-4)) + (3 + 6)i = -2 + 9i$$
$$z - w = (2 + 3i) - (-4 + 6i) = (2 - (-4)) + (3 - 6)i = 6 - 3i$$

2 ¿Cuál es el resultado de $(4 - 2i) + (-3 + 4i)$?

Solución

Se aplica la fórmula de la resta y se obtiene:

$$(4 - 2i) + (-3 + 4i) = (4 + (-3)) + (-2 + 4)i = 1 + 2i = (1, 2)$$

3 Efectúa la siguiente operación: (–5, –4) – (–6, 1).

Solución

Se representan ambos complejos en su forma rectangular y se realiza la operación:

$$(-5,-4)-(-6,1)=(-5-4i)-(-6+i)=(-5-(-6))+(-4-1)\,i=1-5i$$

Este resultado también se representa como (1, –5)

4 Resuelve: $\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}i\right)+\left(-2,\frac{1}{3}\right)$.

Solución

Se expresa el segundo sumando en su forma rectangular y se efectúa la suma:

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}i\right)+\left(-2,\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}i\right)+\left(-2+\frac{1}{3}i\right)=\left(\frac{3}{2}-2\right)+\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)i$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}i \quad \text{o} \quad \left(-\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right)$$

Por consiguiente, el resultado es: $-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}i$ o $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right)$

Multiplicación por un escalar

Para efectuar la operación se multiplica el escalar por la parte real e imaginaria del número complejo como lo indica la siguiente fórmula:

$$c(a+bi)=ac+bci$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la operación: $3(2-5i)$.

Solución

Se realiza la multiplicación de 3 por ambos elementos del número complejo:

$$3(2-5i)=3(2)-3(5i)=6-15i$$

Por tanto, el resultado de la operación es: $6-15i$

2 Obtén el resultado de: $3(7-4i)-2(-3+2i)$.

Solución

Se realiza el producto de los escalares por los números complejos:

$$3(7-4i)-2(-3+2i)=((3)(7)-(3)(4)i)+((-2)(-3)+(-2)(2)i)$$
$$=(21-12i)+(6-4i)$$
$$=(21+6)+(-12-4)i$$
$$=27-16i$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\frac{3}{4}(2-5i)+\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{2}i\right)$?

Solución

Se multiplican los coeficientes, se agrupan los términos semejantes y se reducen:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}(2-5i)+\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{2}i\right)&=\left(\frac{3}{4}(2)+\frac{3}{4}(-5i)\right)+\left(\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}i\right)\right)\\&=\left(\frac{6}{4}-\frac{15}{4}i\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}i\right)\\&=\left(\frac{6}{4}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{15}{4}+\frac{1}{4}\right)i\\&=3-\frac{7}{2}i\end{aligned}$$

Por consiguiente, el resultado es: $3-\frac{7}{2}i$

EJERCICIO **115**

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $(3, 2)+(7, -1)$
2. $(-2, 5)-(-3, 5)$
3. $(1, -3)+(-3, -2)$
4. $(0, -6)-(-5, 0)$
5. $\left(\frac{4}{5},-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4},\frac{1}{6}\right)$
6. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$
7. $\left(\frac{4}{5},0\right)+\left(0,-\frac{1}{2}\right)$
8. $\left(\sqrt{2},-3\right)-(0,\ 2)$
9. $\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)-(0,\ 0)$
10. Si $z=2+3i$ y $z_1=5-4i$, encuentra $z+z_1$
11. Si $z_1=3-2i$ y $z_2=3+2i$, obtén z_1+z_2
12. Si $z_1=4-5i$ y $z_2=4-5i$, encuentra z_1-z_2
13. Si $w=3-4i$ y $w_1=2+7i$, realiza w_1-w
14. Si $z=1-i$, $z_1=1+i$ y $z_2=i$, encuentra z_1-z+z_2
15. Si $z_1=7-3i$ y $z_2=4-\frac{1}{2}i$, calcula z_1+z_2
16. Si $z=2-3i$, $z_1=10i$ y $z_2=2+3i$, realiza $z+z_2-z_1$

17. Si $z_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{6}i$ y $z_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right)$, encuentra $z_1 + z_2$

18. Si $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ y $z_3 = \frac{1}{4} - 2i$, obtén $z_1 - (z_2 + z_3)$

19. Si $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 5i$ y $z_3 = 1 + 3i$, encuentra $z_1 - z_2 + z_3$

20. Si $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -4 - i$ y $z_3 = -2 - 3i$, ¿cuál es el resultado de $2z_1 - 3z_2 + z_3$?

21. Si $z_1 = 7 + 4i$, $z_2 = 6 - 2i$ y $z_3 = -3 - 3i$. Efectúa: $z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{2}{3}z_3$

22. Si $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$, $z_2 = 4 - \frac{2}{3}i$ y $z_3 = 1 + \frac{3}{2}i$. Efectúa: $4z_1 - \frac{3}{4}z_2 + 5z_3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, se define el producto como:

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente operación: $(3 - 2i)(-4 + 5i)$.

Solución

Se observa que: $a = 3$, $b = -2$, $c = -4$ y $d = 5$, aplicando la definición se obtiene:

$$\begin{aligned}(3 - 2i)(-4 + 5i) &= [(3)(-4) - (-2)(5)] + [(3)(5) + (-2)(-4)]i \\ &= (-12 + 10) + (15 + 8)i \\ &= -2 + 23i \quad \text{o} \quad (-2, 23)\end{aligned}$$

2 Halla el resultado de: $(2 - 5i)(2 + 5i)$.

Solución

Se identifican los valores

$$a = 2 \quad b = -5 \quad c = 2 \quad d = 5$$

Se aplica la definición: $(ac - bd) + (ad + bc)i$, para determinar que:

$$\begin{aligned}(2 - 5i)(2 + 5i) &= [(2)(2) - (-5)(5)] + [(2)(5) + (-5)(2)]i \\ &= (4 + 25) + (10 - 10)i \\ &= 29 + 0i \;\; \text{o} \;\; (29, 0)\end{aligned}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{1}{2} + 3i\right)\left(2 - \frac{3}{5}i\right)$?

Solución

Al aplicar la definición se obtiene:

$$\left(\frac{1}{2} + 3i\right)\left(2 - \frac{3}{5}i\right) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)(2) - (3)\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) + (3)(2)\right]i$$

(continúa)

(*continuación*)

$$=\left[1+\frac{9}{5}\right]+\left[-\frac{3}{10}+6\right]i$$
$$=\frac{14}{5}+\frac{57}{10}i$$

EJERCICIO 116

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $(3-4i)(-3-2i)$
2. $(2, 3)(1, -1)$
3. $(2, 0)(3, 2)$
4. $(1-i)(2, -1)$
5. $(1+2i)^2$
6. $(\sqrt{2},\sqrt{3})(\sqrt{2},\sqrt{3})$
7. Si $z=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ y $w=(2,3)$, determina $z\cdot w$
8. Si $z_1=\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ y $z_2=(0,\sqrt{2})$, efectúa $z_1\cdot z_2$
9. Si $w=6-2i$ y $w_1=3i$, encuentra $w\cdot w_1$
10. Si $z=(4,-1)$, $z_1=(2,-3)$ y $z_2=(-1,1)$ obtén $z_2(z+z_1)$
11. Si $z=1-3i$, $w=\left(\frac{1}{3},0\right)$ y $v=2+i$, determina $z(w-v)$
12. Si $z=(1,2)$, $z_1=(2,0)$ y $z_2=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, encuentra $z\cdot z_1-4z_2$
13. Si $z=1-3i$, determina z^2
14. Si $w=\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{4}\right)$, efectúa w^2
15. Si $z_1=3+2i$ y $z_2=1-3i$, encuentra $(z_1\cdot z_2)^2$
16. Si $z=1+i$ y $w=1-i$, realiza $z^2\cdot w^2$
17. Si $z=2i-3$, $w=1-2i$ y $v=4+3i$, realiza la operación: $2z-3w+v$
18. Si $z_1=6-3i$, $z_2=4+2i$ y $z_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$, determina: $\left(\frac{1}{3}z_1+\frac{1}{2}z_2-6z_3\right)^2$
19. Prueba que si $z=a+bi$ y $w=a-bi$, entonces $z\cdot w=\text{Re}(z)^2+\text{Im}(z)^2$
20. Prueba que si $z_1=1+i$ y $z_2=1-i$, entonces $z_1^n\cdot z_2^n=\left[\text{Re}(z_1)+\text{Re}(z_2)\right]^n$
21. Prueba que si $w=(1,1)$ entonces $w^{2n}=(-1)^{\frac{n}{2}}(2,0)^n$ con n par $\in N$
22. Prueba que si $w=(1,1)$ entonces $w^{2n}=(0,2)^n$ con n impar $\in N$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

División

Sean los complejos $z = a + bi$, $w = x + yi$, la división $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{x+yi}$

Se define como:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{x+yi} = \left(\frac{ax+by}{x^2+y^2}\right) + \left(\frac{bx-ay}{x^2+y^2}\right)i$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente operación: $\frac{6+4i}{3-5i}$.

Solución

Se identifican los valores:

$$a=6 \quad b=4 \quad x=3 \quad y=-5$$

Se aplica la definición:

$$\frac{6+4i}{3-5i} = \left[\frac{(6)(3)+(4)(-5)}{(3)^2+(-5)^2}\right] + \left[\frac{(4)(3)-(6)(-5)}{(3)^2+(-5)^2}\right]i = \frac{(18)+(-20)}{9+25} + \frac{(12)-(-30)}{9+25}i$$

$$= \frac{18-20}{9+25} + \frac{12+30}{9+25}i$$

$$= -\frac{2}{34} + \frac{42}{34}i$$

$$= -\frac{1}{17} + \frac{21}{17}i$$

Por tanto, $\frac{6+4i}{3-5i} = -\frac{1}{17} + \frac{21}{17}i$ o $\left(-\frac{1}{17}, \frac{21}{17}\right)$

2 Halla el resultado de: $\frac{4-i}{2+3i}$.

Solución

Los valores de $a=4$, $b=-1$, $x=2$, $y=3$, se aplica la definición:

$$\frac{4-i}{2+3i} = \left[\frac{(4)(2)+(-1)(3)}{(2)^2+(3)^2}\right] + \left[\frac{(-1)(2)-(4)(3)}{(2)^2+(3)^2}\right]i = \frac{(8)+(-3)}{4+9} + \frac{(-2)-(12)}{4+9}i$$

$$= \frac{8-3}{4+9} + \frac{-2-12}{4+9}i$$

$$= \frac{5}{13} + \frac{-14}{13}i$$

$$= \frac{5}{13} - \frac{14}{13}i$$

Por consiguiente, $\frac{4-i}{2+3i} = \frac{5}{13} - \frac{14}{13}i$, el cual en su forma cartesiana es $\left(\frac{5}{13}, -\frac{14}{13}\right)$

3 Realiza la siguiente operación: $\frac{2}{3-i}$.

Solución

Se obtienen los respectivos valores:

$$a=2 \qquad b=0 \qquad x=3 \qquad y=-1$$

Sustituyendo en la definición, se obtiene:

$$\frac{2}{3-i}=\left(\frac{(2)(3)+(0)(-1)}{(3)^2+(-1)^2}\right)+\left(\frac{(0)(3)-(2)(-1)}{(3)^2+(-1)^2}\right)i=\left(\frac{6}{10}\right)+\left(\frac{2}{10}\right)i=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

4 Determina el resultado de: $\frac{i}{1+i}$.

Solución

Al aplicar la definición se obtiene:

$$\frac{i}{1+i}=\left[\frac{(0)(1)+(1)(1)}{(1)^2+(1)^2}\right]+\left[\frac{(1)(1)-(0)(1)}{(1)^2+(1)^2}\right]i=\frac{0+1}{1+1}+\frac{1-0}{1+1}i=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Por tanto, $\frac{i}{1+i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

EJERCICIO 117

Efectúa las siguientes operaciones:

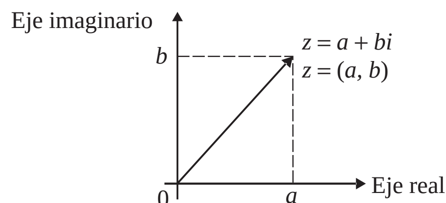
1. $\frac{i}{1-2i}$
2. $\frac{3-2i}{3+2i}$
3. $\frac{1-3i}{i}$
4. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$
5. $\frac{1-2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}$
6. $\frac{2}{1-i}$
7. $\frac{2-i}{1-i}$
8. Si $z_1=3+2i$ y $z_2=1-2i$, encuentra $\frac{z_1}{z_2}$
9. Si $z_1=3+2i$ y $z=1-i$, realiza $\frac{z_1}{z^2}$
10. Si $z=1-7i$ y $w=1+2i$, determina $\frac{z}{w}$
11. Si $z=4-3i$ y $w=1+2i$, efectúa $\frac{w}{z}$
12. Si $z=1-3i$ y $w=2+7i$, ¿cuál es el resultado de $\frac{w^2}{z}$?
13. Si $z_1=3-i$, $z_2=1+i$ y $z_3=\sqrt{2}+i$, realiza $\frac{z_1+z_2}{z_3}$
14. Si $z_1=2+i$, $z_2=1+2i$, $z_3=3-2i$ y $z_4=-2+3i$, efectúa: $\frac{z_1-z_2}{z_3+z_4}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Representación gráfica

Para representar en el plano cartesiano cualquier número complejo de la forma $z=a+bi$, se ubica a la *parte real* en el eje horizontal (eje real) y a la *parte imaginaria* en el eje vertical (eje imaginario).

Sea el número complejo $z = a + bi$, entonces su representación gráfica es:



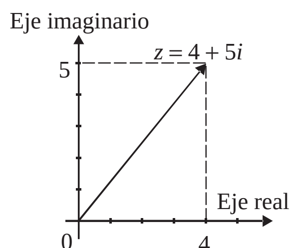
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Grafica el siguiente número complejo: $z = 4 + 5i$.

Solución

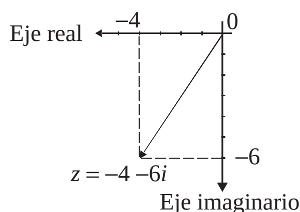
Se convierte en la forma cartesiana $z = (4, 5)$, y su gráfica es:



2 Grafica: $z_2 = -4 - 6i$.

Solución

Se ubica el punto $(-4, -6)$ en el plano y se une con el origen mediante un segmento de recta, y se obtiene la representación gráfica de z_2:



EJERCICIO 118

Grafica los siguientes números complejos:

1. $z_1 = -6 + 5i$
2. $z_2 = (3, -4)$
3. $z_3 = (-1, -2)$
4. $z_4 = -2 + 4i$
5. $z_5 = 5 - 2i$
6. $z_6 = (6, 2)$
7. $w = (1, 2) + (-3, -5)$
8. $z = (-4, 6) - (1, -3)$
9. $v = (2, 3)(1, -1)$
10. $w_1 = \dfrac{1+i}{1-i}$
11. $w_2 = (3, -1)(2, 0) - (-1, -1)$
12. $w_3 = \dfrac{(1, 2) - (2, -1)}{(0, 1)}$

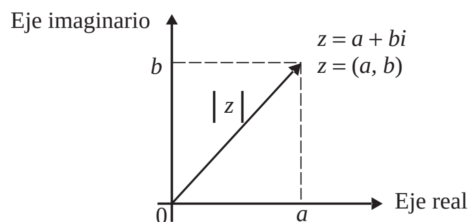
 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Valor absoluto o módulo

El módulo de un complejo es la distancia que existe del origen al punto que determina el número complejo. Su magnitud está dada por la fórmula:

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{[\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

y su representación gráfica es:



Propiedades del valor absoluto

Sean los números complejos z y z_1, entonces:

1. $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$
2. $|z+z_1| \leq |z| + |z_1|$
3. $|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el módulo de $z = 3 - 4i$.

Solución

Se sustituye $a = 3$ y $b = -4$ en la fórmula y se obtiene como resultado:

$$|z| = |3-4i| = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

El resultado indica que existen 5 unidades del origen al punto $z = (3, -4)$

2 ¿Cuál es el módulo del número complejo $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$?

Solución

Se sustituyen los valores y se obtiene:

$$|z_2| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

3 Determina el valor absoluto del número complejo $z_4 = (1, 7)$.

Solución

Se sustituyen los valores en la fórmula y resulta que el módulo de z_4 es:

$$|z_4| = \sqrt{(1)^2+(7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

4 Para $z = 3 + 4i$ y $w = 2 - i$, prueba que $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Solución

Se obtiene $|z+w|$

$$|z+w| = |(3+4i)+(2-i)| = |5+3i| = \sqrt{(5)^2+(3)^2} = \sqrt{34}$$

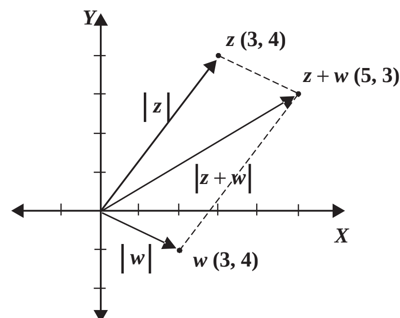
luego,

$$|z|+|w| = |3+4i|+|2-i| = \sqrt{(3)^2+(4)^2} + \sqrt{(2)^2+(-1)^2} = 5 + \sqrt{5}$$

Por tanto, se comprueba que:

$$|z+w| \leq |z|+|w|$$
$$\sqrt{34} \leq 5 + \sqrt{5}$$

Las magnitudes de los números complejos en el plano cartesiano se representan de la siguiente manera:



Conjugado

El conjugado del complejo $z = a + bi$, se define como:

$$\bar{z} = a - bi$$

Ejemplos

Complejo	Conjugado
$3 + 7i$	$3 - 7i$
$-4 - 8i$	$-4 + 8i$
-3	-3
$-4i$	$4i$

Teorema: sea $z = a + bi$ entonces $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Propiedades

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces:

1. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
3. $\bar{z} + z = 2\,\text{Re}(z)$
4. $\bar{z} - z = -2\,\text{Im}(z)$
5. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
6. Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Demostraciones

1. Se determina la suma de los complejos z y w:

$$z + w = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

Luego el conjugado de $z + w$ se define como:

$$\overline{z+w} = (a+c)-(b+d)i$$

Se desarrolla la operación, asociando como se observa y se determina que:

$$\overline{z+w} = (a + c) - (b + d)i = (a + c) + (-b - d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z} + \overline{w}$$

2. El producto de los complejos z y w es:

$$z \cdot w = (a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Luego, el conjugado de $z \cdot w$ se define como:

$$\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

Se desarrolla la operación y se agrupan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(ac - bd) - (ad + bc)i &= (ac - bd) + (-ad - bc)i \\ &= (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)(c))i \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \overline{z} \cdot \overline{w}\end{aligned}$$

3. Se determina la suma del complejo z y su conjugado $\overline{z}$:

$$\overline{z} - z = (a - bi) + (a + bi) = (a + a) + (-b + b)i = 2a + 0i = 2a$$

Pero a es la parte real del complejo z, por lo tanto

$$\overline{z} + z = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

4. Se obtiene la diferencia del conjugado $\overline{z}$ y el complejo z:

$$\overline{z} - z = (a - bi) - (a + bi) = (a - a) + (-b - b)i = 0a - 2bi = -2bi$$

Pero bi es la parte imaginaria de z, entonces:

$$\overline{z} - z = 2\,\mathrm{Im}(z)$$

5. Se obtiene el valor absoluto de z y se eleva al cuadrado:

$$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2$$

Pero si $z = a + bi$ entonces $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ por lo tanto:

$$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2 = z \cdot \overline{z}$$

6. Siendo $z = a + bi$, se realiza la división $\frac{1}{z}$ obteniendo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} = \frac{1+0i}{a+bi} = \left[\frac{(1)(a)+(0)(b)}{a^2+b^2}\right]+\left[\frac{(0)(a)-(1)(b)}{a^2+b^2}\right]i &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i \\ &= \frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\end{aligned}$$

El denominador de cada término es el mismo, entonces se tiene que:

$$\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Pero $\bar{z} = a - bi$ y $|z|^2 = a^2 + b^2$, entonces se obtiene:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $z = 2 + 3i$ y $w = -1 + i$, determina $\dfrac{\overline{z+w}}{\overline{z \cdot w}}$.

Solución

Se aplican las propiedades de los complejos:

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} = (2-3i) + (-1-i) = (2-1) + (-3-1)i = 1-4i$$
$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} = (2-3i)(-1-i) = -5+i$$

Luego,

$$\frac{\overline{z+w}}{\overline{z \cdot w}} = \frac{1-4i}{-5+i} = -\frac{9}{26} + \frac{19}{26}i$$

2 Si $z = -4 + i$ y $w = -2 + 5i$, determina $\dfrac{z \cdot \bar{z}}{(\bar{w}+w)(\bar{z}-z)}$

Solución

Se aplican las propiedades de los complejos y se obtiene:

$$\frac{z \cdot \bar{z}}{(\bar{w}+w)(\bar{z}-z)} = \frac{|z|^2}{[2\text{Re}(w)]\cdot[-2\text{Im}(z)]}$$

Se sustituyen el valor absoluto de z, el número real de w y el número imaginario de z:

$$\frac{|z|^2}{[2\text{Re}(w)]\cdot[-2\text{Im}(z)]} = \frac{(-4)^2+(1)^2}{[2(-2)]\cdot[-2(i)]} = \frac{17}{(-4)(-2i)} = \frac{17}{8i}$$

Se realiza la división:

$$\frac{17}{8i} = \frac{17}{8}\cdot\frac{1}{i}$$

Pero $\dfrac{1}{i} = \dfrac{\bar{i}}{|i|^2} = \dfrac{-i}{(0)^2+(1)^2} = -i$, entonces se obtiene::

$$= \frac{17}{8}(-i) = -\frac{17}{8}i$$

EJERCICIO 119

Encuentra el valor absoluto o módulo de los siguientes números complejos:

1. $2+3i$
2. $5-4i$
3. $4-5i$
4. $3i$
5. $1-2i$
6. $6-7i$
7. $\frac{1}{2}+\sqrt{2}\,i$
8. $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$
9. $\left(\sqrt{2},0\right)$
10. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},5\right)$
11. $\frac{4}{3}-2i$
12. $\sqrt{2}-3\,i$

Determina el conjugado de los siguientes números complejos:

13. $5+4i$
14. $(-5,0)$
15. $1+i$
16. $5i$
17. $\frac{1}{2}i$
18. $(2,1)$
19. $(0,-3)$
20. $-\frac{3}{7}-\frac{2}{5}i$
21. $-2+6i$
22. $(-1,-1)$
23. $-2+\frac{11}{4}i$
24. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

Sean los números complejos $z = 2i + 1$, $z_1 = 4 - 2i$ y $z_2 = (5,1)$ demuestra que:

25. $|z+z_1| \le |z|+|z_1|$
26. $|z\cdot z_1| = |z|\cdot|z_1|$
27. $|z_1+z_2+z| \le |z_1+z_2|+|z|$
28. $|(z_1+z_2)(z)| = |z_1+z_2|\cdot|z|$
29. $|z\cdot z_1\cdot z_2| = |z|\cdot|z_1|\cdot|z_2|$
30. $|z_1\cdot z_2|+|z_2\cdot z| \le |z_2|\left(|z_1|+|z|\right)$

Nota: Estas demostraciones no se incluyen en las soluciones.

Sean los complejos $z = 2 - 3i$, $w = 1 + i$ y $v = 2 - i$, determina:

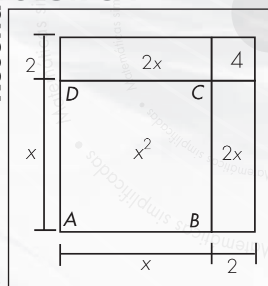
31. $\overline{z+w}$
32. $\overline{w+v}-\overline{z-w}$
33. $\overline{z\cdot v}$
34. $\overline{w\cdot v}-\overline{z\cdot v}$
35. $\left(\overline{w}-w\right)\left(\overline{v}-v\right)$
36. $\left(z\cdot\overline{z}\right)-\left(\overline{w}\cdot w\right)$
37. $\left(\overline{v}-v\right)\left(\overline{z+w}\right)$
38. $\left(\overline{z-w}\right)\left(\overline{w-v}\right)$
39. $\dfrac{\overline{z+w}}{\overline{w+v}}$
40. $\dfrac{v\cdot\overline{v}}{z-\overline{z}}$
41. $\dfrac{\overline{z\cdot w}}{\overline{z+w}}$
42. $\dfrac{\overline{v}}{|v|^2}$
43. $\dfrac{\overline{v+w}}{|v+w|^2}$
44. $\dfrac{v\cdot\overline{v}}{\left(\overline{w}-w\right)\left(\overline{z}-z\right)}$
45. $\dfrac{\overline{w+z}-\overline{v+w}}{\left(z\cdot\overline{z}\right)-\left(v\cdot\overline{v}\right)}$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Capítulo 23

Ecuaciones de segundo grado

Reseña HISTÓRICA



Área = $x^2 + 2x + 2x + 4$
$= x^2 + 4x + 4$

En la reseña del capítulo 2 se mencionó a al-Khwarizmi y su método geométrico para resolver ecuaciones de segundo grado, que se conoce como método de completar el cuadrado y consiste en lo siguiente:

Ejemplo

Sea la ecuación $x^2 + 4x = 45$

- Se comienza por construir un cuadrado de lado x, $ABCD$, cuya área será x^2.
- Se prolonga el lado AB y AD en 2 unidades, resultan 2 rectángulos; la suma de dichas áreas es $2x + 2x = 4x$, que da como resultado el segundo término de la ecuación.
- La figura se completa con un cuadrado de 2 unidades por lado, cuya área es $2 \cdot 2 = 4$ unidades cuadradas.
- El área total del cuadrado es $x^2 + 4x + 4$.
- Se suman 4 unidades cuadradas en ambos términos y se resuelve la ecuación.

$$x^2 + 4x = 45$$
$$x^2 + 4x + 4 = 45 + 4$$
$$(x + 2)^2 = 49$$

Por tanto, una solución es $x = 5$.

Definición

La ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$, es una ecuación de segundo grado; al término ax^2 se le llama cuadrático, a bx lineal, c es el término independiente y se clasifican de la siguiente forma:

Ecuaciones de segundo grado
- Completas: $ax^2 + bx + c = 0$
- Incompletas:
  - Mixtas: $ax^2 + bx = 0$, con $c = 0$
  - Puras: $ax^2 + c = 0$, con $b = 0$

Solución de una ecuación de segundo grado completa

Las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones, también se denominan raíces.

Existen tres métodos para resolver una ecuación de segundo grado:

- **Completando el trinomio cuadrado perfecto**

Para completar el trinomio cuadrado perfecto se suman, en ambos miembros de la igualdad, el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal de la ecuación $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación: $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Solución

Se dejan los términos en x en el primer miembro de la ecuación.

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x^2 + 4x = -3$$

Se suma $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ en ambos miembros $\quad x^2 + 4x + 4 = -3 + 4$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto $\quad (x+2)^2 = 1$

Se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros $\quad x + 2 = \pm\sqrt{1}$

$$x + 2 = \pm 1$$

Se despeja a la incógnita $\quad x = -2 \pm 1$

de la igualdad se obtienen los valores de x,

$$x_1 = -2 + 1 = -1 \text{ o } x_2 = -2 - 1 = -3$$

Por tanto, las soluciones o raíces de la ecuación son: $x_1 = -1$ o $x_2 = -3$

2 Determina las raíces de la ecuación: $x^2 - 6x - 27 = 0$.

Solución

Se dejan los términos en x en el primer miembro y se procede a completar el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 - 6x - 27 = 0 \rightarrow x^2 - 6x = 27$$

se suma $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ en ambos miembros $\quad x^2 - 6x + 9 = 27 + 9$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto $\quad (x-3)^2 = 36$

se aplica raíz cuadrada en ambos miembros, $\quad x - 3 = \pm\sqrt{36}$

$$x - 3 = \pm 6$$

de la igualdad se obtienen los valores de x,

$$x_1 = 3+6 = 9 \text{ o } x_2 = 3-6 = -3$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son: $x_1 = 9$ o $x_2 = -3$

3 Encuentra las raíces de la ecuación: $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Solución

El término independiente se coloca del lado derecho del signo igual y se procede a completar el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 5x = 6$$

Se suma $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ en ambos miembros $\qquad x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 6 + \frac{25}{4}$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto $\qquad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

Se aplica raíz cuadrada $\qquad x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{49}{4}}$

$$x - \frac{5}{2} = \pm\frac{7}{2}$$

de la igualdad se obtienen los valores de x,

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \text{ o } x_2 = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = -1 \text{ o } x_2 = 6$$

4 Determina las soluciones de la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Solución

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \rightarrow x^2 + 4x = -5$$
$$x^2 + 4x + 4 = -5 + 4$$
$$(x+2)^2 = -1$$
$$x + 2 = \pm\sqrt{-1}$$
$$x + 2 = \pm i$$
$$x = -2 \pm i$$

de la igualdad se obtienen los valores de x, que son los números complejos:

$$x_1 = -2 + i \text{ o } x_1 = -2 - i$$

5 Resuelve la ecuación $2x^2 + 7x + 3 = 0$.

Solución

Se divide la ecuación entre 2 y se completa el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$$

Se suma $\left(\frac{\frac{7}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$ en ambos miembros $\qquad x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{49}{16}$

(*continúa*)

(*continuación*)

se factoriza el miembro izquierdo, $\left(x+\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

se aplica raíz cuadrada en ambos miembros. $x+\frac{7}{4}=\pm\frac{5}{4}$

$$x=-\frac{7}{4}\pm\frac{5}{4}$$

Finalmente, las raíces de la ecuación son: $x_1=-\frac{1}{2}$ o $x_2=-3$

6 Determina las soluciones de la ecuación $3x^2-5x+2=0$.

Solución

Se dividen ambos miembros de la igualdad entre el coeficiente del término cuadrático, que en este caso es 3,

$$3x^2-5x+2=0 \rightarrow x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0$$

En la ecuación resultante se completa el trinomio cuadrado perfecto y se despeja x.

$$x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0 \rightarrow x^2-\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}=-\frac{2}{3}+\frac{25}{36}$$

$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

$$x-\frac{5}{6}=\pm\sqrt{\frac{1}{36}}$$

$$x-\frac{5}{6}=\pm\frac{1}{6}$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son: $x_1=1$ o $x_2=\frac{2}{3}$

7 Encuentra las raíces de la ecuación $6x^2-11xy+3y^2=0$, con "y" como una constante.

Solución

Se divide la ecuación entre 6 y se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2-\frac{11}{6}xy+\frac{3}{6}y^2=0 \rightarrow x^2-\frac{11}{6}xy=-\frac{3}{6}y^2$$

$$x^2-\frac{11}{6}xy+\frac{121}{144}y^2=-\frac{3}{6}y^2+\frac{121}{144}y^2$$

$$\left(x-\frac{11}{12}y\right)^2=\frac{49}{144}y^2$$

$$x-\frac{11}{12}y=\pm\frac{7}{12}y$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación son:

$$x_1=\frac{7}{12}y+\frac{11}{12}y=\frac{18}{12}y=\frac{3}{2}y\,,\quad x_2=-\frac{7}{12}y+\frac{11}{12}y=\frac{4}{12}y=\frac{1}{3}y$$

EJERCICIO 120

Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado y completa el trinomio cuadrado perfecto, donde *x*, *y*, *z* y *w* son variables y *a*, *b* constantes.

1. $x^2 + 5x + 4 = 0$
2. $6x - 27 = -x^2$
3. $x^2 + 11x + 30 = 0$
4. $y^2 + 10 = 6y$
5. $w^2 - 40 = 3w$
6. $z^2 - 30 = 13z$
7. $x^2 - 10x + 24 = 0$
8. $x^2 + 8x = 240$
9. $2x + 5 = -x^2$
10. $3x^2 = x + 2$
11. $2x^2 + 5x + 2 = 0$
12. $10w^2 - 13w - 3 = 0$
13. $-3x^2 + 7x + 6 = 0$
14. $36x = 13 + 36x^2$
15. $4x^2 + 5bx = -b^2$
16. $-32aw - 15a^2 = -7w^2$
17. $x^2 + 3bx - 10b^2 = 0$
18. $b^2x^2 = bx + 30$
19. $a^2y^2 + 3aby + 2b^2 = 0$
20. $27ay - 14y^2 = 10a^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fórmula general

Deducción de la fórmula general para ecuaciones de segundo grado

Sea la ecuación general de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La ecuación se divide entre a,

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

El término independiente se coloca en el segundo miembro

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

se completa el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

se factoriza el lado izquierdo, y se realiza la resta en el segundo miembro

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

se realiza el despeje para x,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se obtiene la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, las soluciones o raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Solución

Se identifican los valores de a, b y c de acuerdo con la ecuación dada.

$$a = 3,\ b = -5,\ c = -2$$

Se sustituyen en la fórmula general.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Para concluir, las raíces son:

$$x_1 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ o } x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

2 Determina las raíces de la ecuación $2x^2 - 3x = 0$.

Solución

De acuerdo con la ecuación: $a = 2$, $b = -3$, $c = 0$, los valores se sustituyen en la fórmula general,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(0)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-0}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{3 \pm 3}{4}$$

Por tanto, las raíces son: $x_1 = \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ o $x_2 = \frac{3-3}{4} = \frac{0}{4} = 0$

3 Encuentra las soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$.

Solución

De acuerdo con la ecuación: $a = 1$, $b = 0$, $c = -9$, se sustituyen los valores en la fórmula general,

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{-0 \pm \sqrt{0+36}}{2} = \frac{\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

Por consiguiente, las soluciones son: $x_1 = -3$ o $x_2 = 3$

4 Determina las raíces de la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Solución

De acuerdo con la ecuación: $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$, los valores se sustituyen en la fórmula general,

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

Finalmente, las raíces de la ecuación son: $x_1 = -2 + i$, $x_2 = -2 - i$

EJERCICIO **121**

Emplea la fórmula general y encuentra las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 15 = 8x$
2. $x^2 = x + 6$
3. $x^2 + 6x = -8$
4. $x^2 - 2x - 15 = 0$
5. $4x^2 - 20x + 25 = 0$
6. $6x^2 + 13x - 5 = 0$
7. $5y^2 - 2y - 3 = 0$
8. $x^2 - 6x + 2 = 0$

9. $x^2 + 2x - 5 = 0$
10. $x^2 - 4x + 5 = 0$
11. $4x^2 = -4x - 17$
12. $36y^2 - 24y = -85$
13. $w^2 - 5w = 0$
14. $\frac{1}{3}z^2 + \frac{5}{6}z = 0$
15. $y^2 - \frac{1}{3}ay = 0$
16. $ax^2 - bx = 0$
17. $x^2 - 25 = 0$
18. $x^2 - \frac{1}{4} = 0$
19. $a^2x^2 + b^2 = 0$
20. $a^2w^2 - 16 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Propiedades de las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado

La expresión $I = b^2 - 4ac$ es el discriminante de una ecuación de segundo grado, y permite determinar si las raíces son reales o imaginarias.

1. Si $I > 0$, las raíces son reales y diferentes.
2. Si $I = 0$, entonces, las raíces son reales e iguales y su valor es: $x = -\frac{b}{2a}$.
3. Si $I < 0$, entonces, las raíces son complejas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el carácter de las raíces de la ecuación $20x^2 - x - 1 = 0$.

Solución

Al sustituir los valores de $a = 20$, $b = -1$, $c = -1$ en el discriminante, se obtiene:

$$I = (-1)^2 - 4(20)(-1) = 1 + 80 = 81$$

De acuerdo con el resultado $I > 0$, se deduce que la ecuación tiene 2 soluciones reales y diferentes.

2 Encuentra el carácter de las raíces de la ecuación $4y^2 - 8y + 7 = 0$.

Solución

Al sustituir los valores de $a = 4$, $b = -8$, $c = 7$ en el discriminante, se determina que:

$$I = (-8)^2 - 4(4)(7) = 64 - 112 = -48$$

En este caso $I < 0$, por tanto, las raíces son complejas.

EJERCICIO **122**

Determina el carácter de las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$
2. $x^2 + 6x + 16 = 0$
3. $\frac{4}{3}x^2 - 4x + \frac{10}{3} = 0$
4. $36x^2 - 60x + 25 = 0$
5. $4x^2 - 3x = 0$
6. $x^2 + 81 = 0$
7. $x^2 + 4x - 5 = 0$
8. $w^2 - 2w + 5 = 0$
9. $\sqrt{6}y^2 - \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)y - 1 = 0$
10. $x^2 + 6x + 9 = 0$
11. $x^2 - 4x + 5 = 0$
12. $\frac{1}{5}x^2 + 2x + 5 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Factorización

Otra forma de resolver una ecuación de segundo grado es factorizando la expresión e igualando a cero cada factor, para posteriormente despejar a la incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Solución

Con la forma $x^2 + bx + c$ se factoriza el trinomio.

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x - 5)(x - 2) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$x - 5 = 0 \text{ o } x - 2 = 0$$
$$x = 5 \text{ o } x = 2$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son: $x_1 = 5$ o $x_2 = 2$

2 Determina para x la ecuación $x^2 + 11ax + 10a^2 = 0$.

Solución

Se factoriza el trinomio.

$$x^2 + 11ax + 10a^2 = 0$$
$$(x + 10a)(x + a) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación,

$$x + 10a = 0 \text{ o } x + a = 0$$
$$x = -10a \text{ o } x = -a$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación son: $x_1 = -10a$ o $x_2 = -a$

3 Resuelve la ecuación $6x^2 - 7x - 3 = 0$.

Solución

Con la forma $ax^2 + bx + c$ se factoriza la expresión

$$6x^2 - 7x - 3 = 0 \rightarrow \frac{6\left(6x^2 - 7x - 3\right)}{6} = 0$$
$$\frac{36x^2 - 7\left(6x\right) - 18}{6} = 0$$
$$\frac{\left(6x - 9\right)\left(6x + 2\right)}{6} = 0$$

El denominador se descompone en sus factores primos $(6 = 3 \cdot 2)$

$$\frac{\left(6x - 9\right)\left(6x + 2\right)}{3 \cdot 2} = 0$$

Se realiza la simplificación

$$(2x - 3)(3x + 1) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$2x - 3 = 0 \text{ o } 3x + 1 = 0$$
$$2x = 3 \text{ o } 3x = -1$$

Por tanto, las raíces o soluciones de la ecuación son: $x_1 = \frac{3}{2}$ o $x_2 = -\frac{1}{3}$

4 Determina las raíces de la ecuación $3x^2 + 19x - 14 = 0$.

Solución

Se aplica el factor por agrupación de términos y se factoriza la expresión.

$$3x^2 + 19x - 14 = 0$$

Se descompone $19x$ en $21x - 2x$, $\quad 3x^2 + 21x - 2x - 14 = 0$

Se agrupan términos y se factoriza $\quad 3x(x + 7) - 2(x + 7) = 0$

$$(3x - 2)(x + 7) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$3x - 2 = 0 \text{ o } x + 7 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ o } x = -7$$

Finalmente, las raíces son: $x_1 = \frac{2}{3}$ o $x_2 = -7$

5 Determina las soluciones de la ecuación $x^2 - 3\sqrt{2}x - 8 = 0$.

Solución

Se factoriza el trinomio,

$$x^2 - 3\sqrt{2}x - 8 = 0$$

$$\left(x - 4\sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$x - 4\sqrt{2} = 0, \text{ o } x + \sqrt{2} = 0$$

$$x = 4\sqrt{2} \text{ o } x = -\sqrt{2}$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 4\sqrt{2}$ o $x_2 = -\sqrt{2}$

EJERCICIO 123

Emplea el método factorización y resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 5x - 6 = 0$
2. $x^2 + 11x + 24 = 0$
3. $y^2 - y - 20 = 0$
4. $x^2 = x + 90$
5. $-w^2 + 5w - 4 = 0$
6. $3y^2 - 11y + 10 = 0$
7. $3x^2 - x - 2 = 0$
8. $2y^2 = 4 - 7y$
9. $3x^2 - 6 = 7x$
10. $14x^2 - 33x - 5 = 0$
11. $20x^2 + 3x - 2 = 0$
12. $5z^2 = 17z - 14$
13. $10w^2 = 7w + 6$
14. $14x^2 + 17x - 6 = 0$
15. $-2x^2 = 7x - 15$
16. $6x^2 + 11bx = 10b^2$
17. $2x^2 + 2a^2b^2 = 5abx$
18. $a^2x^2 - 2ax - 3 = 0$
19. $a^2x^2 + abx = 6b^2$
20. $z^2 - \sqrt{3}z = 6$
21. $x^2 - 2\sqrt{3}x = 45$
22. $x^2 = 7\sqrt{7}x - 70$
23. $5y^2 + \frac{17}{6}y + \frac{1}{6} = 0$
24. $x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{6} = 0$
25. $w^2 - \frac{1}{15}w - \frac{2}{15} = 0$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Solución de una ecuación de segundo grado incompleta

Mixtas

Tiene la forma $ax^2 + bx = 0$; para obtener las raíces de la expresión se aplica el factor común, y una de sus raíces siempre es cero.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x = 0$.

Solución

Se factoriza por factor común.

$$x^2 - 5x = 0$$
$$x(x - 5) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación de primer grado.

$$x = 0 \text{ o } x - 5 = 0$$
$$x = 5$$

Finalmente, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = 0 \text{ o } x_2 = 5$$

2 Determina las raíces de la ecuación $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = -16$.

Solución

Se desarrollan los productos notables y se simplifica la expresión:

$$(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = -16$$
$$x^2 - 6x + 9 - (4x^2 + 20x + 25) + 16 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 - 4x^2 - 20x - 25 + 16 = 0$$
$$-3x^2 - 26x = 0$$

Se aplica factorización por factor común.

$$x(-3x - 26) = 0$$

Se iguala a cero cada factor.

$$x = 0 \text{ o } -3x - 26 = 0$$
$$-3x = 26$$
$$x = -\frac{26}{3}$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = 0 \text{ o } x_2 = -\frac{26}{3}$$

EJERCICIO 124

Encuentra las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 6x = 0$
2. $4x^2 - 8x = 0$
3. $5x - x^2 = 0$
4. $3x^2 + 2x = 0$
5. $x^2 - x = 0$
6. $7x^2 - 5x = 0$
7. $\frac{x-9}{6} + \frac{3}{2} - \frac{x^2}{3} = 0$
8. $(y+4)^2 = (4-y)(4+y)$
9. $\frac{x+4}{x+2} = \frac{8}{4-x}$
10. $5(x+3) - 5(x^2-1) = x^2 + 7(3-x) - 1$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Puras

Son de la forma $ax^2 + c = 0$, para obtener sus raíces o soluciones se despeja x o se factoriza la expresión.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $x^2 - 9 = 0$.

Solución

Se realiza el despeje para obtener los siguientes valores de x,

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

Por tanto $x_1 = 3$ o $x_2 = -3$

2 Encuentra las soluciones de la ecuación $\frac{2x-3}{x-3} = \frac{x-2}{x-1}$.

Solución

Se eliminan los denominadores y se simplifica la expresión,

$$\frac{2x-3}{x-3} = \frac{x-2}{x-1} \quad \rightarrow \quad (2x-3)(x-1) = (x-2)(x-3)$$
$$2x^2 - 2x - 3x + 3 = x^2 - 3x - 2x + 6$$
$$2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x + 2x - 6 = 0$$
$$x^2 - 3 = 0$$

se despeja a x,

$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son: $x_1 = \sqrt{3}$ o $x_2 = -\sqrt{3}$

3 ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $4x^2 - 1 = 0$?

Solución

Se factoriza la expresión como una diferencia de cuadrados, se iguala a cero cada factor y se despeja x.

$$4x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (2x-1)(2x+1) = 0$$
$$2x - 1 = 0 \; ; \; 2x + 1 = 0$$
$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ o } x_2 = -\frac{1}{2}$$

4 Encuentra las soluciones de la ecuación $x^2 + 4 = 0$.

Solución

$$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$$
$$x = \pm 2i$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = 2i \text{ o } x_2 = -2i$$

5 Encuentra las soluciones de la ecuación $2x^2 + 162 = 0$.

Solución

$$2x^2 + 162 = 0 \rightarrow 2x^2 = -162$$
$$x^2 = -81$$

Se extrae raíz cuadrada a ambos miembros $\quad x = \pm\sqrt{-81}$

$$x = \pm 9i$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = -9i \text{ o } x_2 = 9i$$

EJERCICIO 125

Determina las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 4 = 0$
2. $1 - x^2 = 0$
3. $w^2 - 100 = 0$
4. $3x^2 - 192 = 0$
5. $4y^2 - 12 = 0$
6. $16x^2 - a^2 = 0$
7. $25z^2 - 36 = 0$
8. $135 = (2y + 3)(2y - 3)$
9. $(w + 2)(2w - 1) = (w - 2)(w + 5) + 15$
10. $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-3}{2x-3}$
11. $3\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{x - \frac{1}{3}}$
12. $2 + \frac{3}{(2x+1)(2x-1)} = 3$
13. $y^2 + 16 = 0$
14. $w^2 + 25 = 0$
15. $x^2 + 1 = 0$

 Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Existen diversos problemas cuya solución se obtiene al plantear y resolver una ecuación de segundo grado.

1 La suma de dos números es 18 y la de sus cuadrados es 180, ¿cuáles son los números?

Solución

Primer número: x
Segundo número: $18 - x$

Ecuación:

$$x^2 + (18 - x)^2 = 180$$
$$x^2 + 324 - 36x + x^2 - 180 = 0$$
$$2x^2 - 36x + 144 = 0 \quad \text{al dividir entre 2}$$
$$x^2 - 18x + 72 = 0 \quad \text{se resuelve la ecuación}$$
$$(x - 12)(x - 6) = 0 \quad \text{se factoriza}$$
$$x - 12 = 0 \text{ o } x - 6 = 0 \quad \text{cada factor se iguala con cero}$$
$$x = 12 \text{ o } x = 6$$

Finalmente, tenemos que los números son 12 y 6

2 En t segundos la altura h, en metros sobre el nivel del suelo, de un proyectil está dada por la ecuación $h = 80t - 5t^2$, ¿cuánto tardará el proyectil en llegar a 320 m sobre el nivel del suelo?

Solución

Con la ecuación $h = 80t - 5t^2$, se obtiene la altura del proyectil en cualquier instante.

Para determinar el tiempo que tarda el proyectil en tener una altura de 320 m, este valor se evalúa en la ecuación dada, es decir:

$$h = 80t - 5t^2$$
$$320 = 80t - 5t^2$$

Se obtiene una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve para t

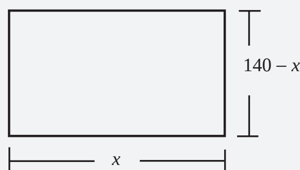
$$320 = 80t - 5t^2 \quad \text{se iguala con cero}$$
$$5t^2 - 80t + 320 = 0 \quad \text{se divide entre 5}$$
$$t^2 - 16t + 64 = 0$$
$$(t - 8)^2 = 0 \quad \text{se factoriza}$$
$$t - 8 = 0 \quad \text{se extrae raíz en ambos miembros}$$
$$t = 8 \quad \text{se obtiene el valor de } t$$

por tanto, el proyectil tardará 8 segundos en estar a 320 m sobre el nivel del suelo.

3 Determina las dimensiones de un rectángulo, si su perímetro es de 280 m y su área es de 4 000 m^2.

Solución

2(base) + 2(altura) = perímetro
$2x$ + 2(altura) = 280
x + (altura) = 140
altura = $140 - x$



El área de un rectángulo es el producto de la base por la altura:

$$\text{Área: } x(140 - x) = 4\,000$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado.

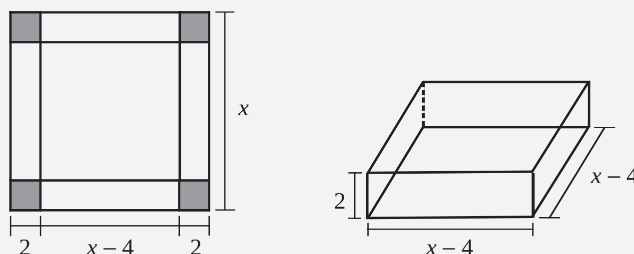
$$x(140 - x) = 4\,000$$
$$140x - x^2 - 4\,000 = 0$$
$$-x^2 + 140x - 4\,000 = 0 \quad \text{al multiplicar por } -1$$
$$x^2 - 140x + 4\,000 = 0 \quad \text{se obtiene una ecuación de segundo grado}$$
$$(x - 40)(x - 100) = 0 \quad \text{se resuelve la ecuación y se obtiene:}$$
$$x - 40 = 0 \text{ o } x - 100 = 0$$
$$x = 40 \text{ o } x = 100$$

De acuerdo con lo anterior, las dimensiones del rectángulo son 40 y 100 metros.

4 A partir de una pieza cuadrada de hoja de lata, se desea construir una caja con base cuadrada y sin tapa, quitando cuadrados en las esquinas de 2 cm por lado y doblando hacia arriba los lados; si la caja debe tener 98 cm^3, ¿cuáles son las dimensiones de la pieza de hoja de lata que deberá usarse?

Solución

Se construye una figura con los datos que se proporcionaron.



El volumen de la caja es:

$V = (\text{Alto})(\text{Largo})(\text{Ancho})$
$V = 2(x - 4)(x - 4) = 2(x - 4)^2 = 2(x^2 - 8x + 16) = 2x^2 - 16x + 32$, entonces
$V = 98 = 2x^2 - 16x + 32$, se obtiene una ecuación de segundo grado.

Se resuelve la ecuación:

$$2x^2 - 16x + 32 = 98$$
$$2x^2 - 16x + 32 - 98 = 0$$
$$2x^2 - 16x - 66 = 0 \quad \text{se divide entre 2}$$
$$x^2 - 8x - 33 = 0 \quad \text{se factoriza}$$
$$(x - 11)(x + 3) = 0$$

Los valores son: $x = 11$ o $x = -3$, la longitud de los lados de la hoja de lata no pueden ser negativos. Finalmente, la longitud del cuadrado es de 11 cm por lado.

5 Un comerciante compró determinado número de pelotas con \$720 y vendió algunas, excepto 18, ganó \$6 en cada una. Sabía que con el dinero de la venta podría haber comprado 3 pelotas más que antes, calcula el precio de cada pelota.

Solución

Precio de compra de cada pelota: x

Número de pelotas: $\frac{720}{x}$

Precio de venta de cada pelota: $x+6$

Total de la venta: $\left(\frac{720}{x}-18\right)(x+6)$

Número de pelotas compradas con el total de la venta: $\frac{720}{x}+3$

Costo de la compra de 3 pelotas más: $x\left(\frac{720}{x}+3\right)$

Ecuación:

$$\left(\frac{720}{x}-18\right)(x+6) = x\left(\frac{720}{x}+3\right)$$

$$\left(\frac{720-18x}{x}\right)(x+6)=x\left(\frac{720+3x}{x}\right)$$

$$\frac{(720-18x)(x+6)}{x}=\frac{x(720+3x)}{x}$$

$$720x+4\ 320-18x^2-108x=720x+3x^2$$

$$21x^2+108x-4\ 320=0 \qquad \text{al dividir entre 3}$$

$$7x^2+36x-1\ 440=0$$

Se aplica la fórmula general,

$$x=\frac{-(36)\pm\sqrt{(36)^2-4(7)(-1\ 440)}}{2(7)}=\frac{-36\pm\sqrt{41\ 616}}{14}=\frac{-36\pm 204}{14}$$

Entonces, las soluciones son:

$$x_1=\frac{-36-204}{14}=-\frac{240}{14}=-\frac{120}{7} \quad \text{o} \quad x_2=\frac{-36+204}{14}=\frac{168}{14}=12$$

Las raíces de la ecuación son: $x_1=-\frac{120}{7}$ o $x_2=12$, pero el precio de un artículo no puede ser negativo, por tanto, el precio de cada pelota es $12.

EJERCICIO **126**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra 2 números enteros que sumen 42 y cuyo producto sea 405.
2. Encuentra 2 números naturales que su producto sea 360 y el cociente del mayor entre el menor sea $\frac{5}{2}$.
3. Encuentra 3 números consecutivos impares, cuya suma de sus cuadrados sea 83.
4. Encuentra 3 números enteros consecutivos pares, cuya suma de sus cuadrados sea 596.

5. La suma de un número y su recíproco es $\frac{26}{5}$. Halla los números.

6. La suma de 2 números es 25 y la suma de sus recíprocos es $\frac{1}{4}$. Encuentra los números.

7. Un agricultor tiene necesidad de cercar 25 000 m^2 de su parcela; dicha propiedad es rectangular y colinda con un río, por lo que no necesita cercar ese lado. ¿Qué dimensiones tiene el terreno si el propietario dispone de 450 m de cerca?

8. La base de un triángulo es 3 veces su altura. Su área es de 150 m^2, ¿cuáles son las dimensiones de la base y la altura?

9. Encuentra la longitud de los lados de un triángulo rectángulo, cuya superficie es de 6 m^2, perímetro de 12 m e hipotenusa de 5 m.

10. Se desea construir un recipiente, sin tapa, de fondo cuadrado y lados rectangulares, con una altura de 6 m, si el material para el fondo cuesta $800 por metro cuadrado y el de los lados $1 200, ¿cuál es el volumen que se puede obtener con $128 000?

11. Determina las dimensiones de un rectángulo cuya altura es $\frac{1}{3}$ de su base y su área es de 972 cm^2.

12. Alejandro tiene 4 años más que Alfredo y el cuadrado de la edad de Alejandro, aumentado en el cuadrado de la edad de Alfredo, equivalen a 80 años. Encuentra las edades de Alejandro y Alfredo.

13. El cuadrado de un número disminuido en 13 equivale al exceso de 50 sobre el doble del número. Determina dicho número.

14. En cierto parque de la Ciudad de México se desea plantar 195 árboles, de tal manera que el número de éstos por fila exceda en 2 al número de filas. Determina la cantidad de filas, así como el número de árboles por fila.

15. Un productor de conservas en almíbar desea envasar su producto en una lata cilíndrica, cuya altura es de 8 centímetros y su volumen de 128π cm^3. Encuentra el radio de la lata.

16. Mario va a construir una caja sin tapa, cuyo volumen debe ser de 312 cm^3; utilizará una lámina rectangular en la cual cortará cuadrados de 2 centímetros por lado en las esquinas. Si él sabe que la superficie total de la hoja al quitar los cuadrados es de 256 cm^2, ¿cuáles son las dimensiones de dicha hoja?

17. La edad actual de Ricardo son trece medios de la edad de su hijo, el próximo año su edad será igual al cuadrado de la edad de su hijo disminuido en 9 años. Determina la edad actual de Ricardo.

18. Un famoso jugador de béisbol lanza una pelota verticalmente hacia arriba, tan fuerte como le es posible. La altura que alcanza la pelota después de t segundos la determina la ecuación $h = 40t - 8t^2$. ¿Cuánto tiempo le llevará a la pelota regresar al suelo?

19. En t segundos la altura h en pies, sobre el nivel del suelo, de un proyectil está dada por la ecuación $h = 240t - 16t^2$, ¿cuánto tardará el proyectil en llegar a 900 ft sobre el nivel del suelo?

20. Dos llaves llenan un depósito en 6 horas, ¿cuánto tiempo necesitaría cada una, por separado, para llenarlo si una tarda 16 h más que la otra?

21. Una persona gastó $2 000 en regalos, obsequió 30 a sus familiares y amigos, el resto los vendió y ganó $10 por regalo. Una vez vendidos todos los obsequios, se dio cuenta de que podía comprar la misma cantidad inicial de regalos y 5 más. ¿Cuál es el costo de cada presente?

22. Encuentra las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, si su perímetro es de 24 unidades y su área es de 24 unidades cuadradas.

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Función cuadrática

La función cuadrática es una función polinomial de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c y $x \in R$ con $a \neq 0$

Análisis de una función cuadrática

1. La función cuadrática representa una parábola, la cual puede ser cóncava hacia arriba o hacia abajo, depende del coeficiente del término cuadrático.
2. La función toma su valor máximo o mínimo en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, el cual se llama vértice de la parábola.
3. Si $a > 0$, entonces la parábola es cóncava hacia arriba y su vértice representa el punto mínimo de la función.
4. Si $a < 0$, entonces la parábola es cóncava hacia abajo y su vértice representa el punto máximo de la función.
5. Si la gráfica interseca al eje X en 2 puntos, éstos se conocen como soluciones o raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$; si es tangente, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ sólo tiene una raíz cuyo valor es $-\frac{b}{2a}$, en caso de que la función no interseque al eje de las X, entonces las raíces no son reales.

EJEMPLOS

Ejemplos

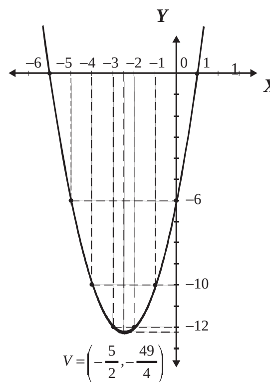
1 Grafica $y = x^2 + 5x - 6$ e indica las raíces.

Solución

Se realiza una tabla con un número suficiente de valores para x, los cuales se sustituyen en la función.

Tabla de valores

x	y
-6	0
-5	-6
-4	-10
-3	-12
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{49}{4}$
-2	-12
-1	-10
0	-6
1	0



La parábola corta el eje de las X en los valores $x = -6$ y $x = 1$

Por tanto, las raíces son: $x = -6$ o $x = 1$

2 Encuentra las coordenadas del vértice, las raíces y traza la gráfica de la parábola: $y = x^2 - 4x + 4$.

Solución

Se identifican los valores de a, b y c y se sustituyen en la fórmula,

$$a = 1,\ b = -4,\ c = 4$$

Se observa que el valor de a es mayor que cero, entonces la parábola es cóncava hacia arriba y su vértice representa un punto mínimo.

Para determinar las coordenadas del vértice se utiliza la fórmula

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

(*continúa*)

(*continuación*)

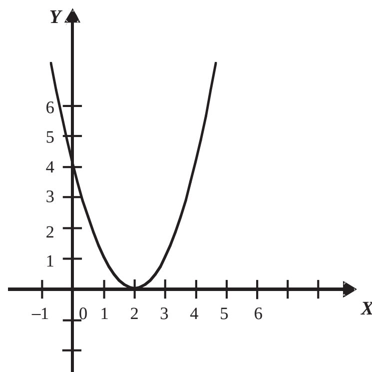
Al sustituir los valores en la fórmula se obtiene:

$$V\left(-\frac{(-4)}{2(1)},\frac{4(1)(4)-(-4)^2}{4(1)}\right)=V(2,0)$$

Se realiza una tabla con un número suficiente de valores para x, los que se sustituirán en la función.

Tabla de valores

x	y
–1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4
5	9



La parábola interseca en un solo punto del eje de las X, es decir, la parábola es tangente al eje X.
Por tanto, la raíz de la ecuación es $x = 2$

3 Determina las coordenadas del vértice, las raíces y traza la gráfica de la parábola: $y = -x^2 + 2x - 4$

Solución

Se identifican los valores de a, b y c y se sustituyen en la fórmula,

$$a = -1,\ b = 2,\ c = -4$$

Se observa que el valor de a es menor que cero, entonces la parábola es cóncava hacia abajo y su vértice representa un punto máximo.

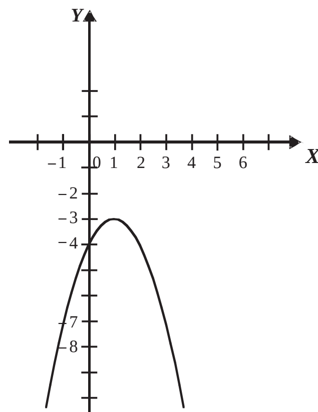
Las coordenadas del vértice son:

$$V\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=V\left(-\frac{(2)}{2(-1)},\frac{4(-1)(-4)-(2)^2}{4(-1)}\right)=V(1,\ -3)$$

Se realiza una tabla con un número suficiente de valores para x, que se sustituyen en la función.

Tabla de valores

x	y
–2	–12
–1	–7
0	–4
1	–3
2	–4
3	–7
4	–12



La parábola no interseca al eje X.
Por consiguiente, las raíces no son reales

EJERCICIO 127

Encuentra las coordenadas del vértice y determina las raíces de las siguientes funciones:

1. $y = 2x^2 - 8x + 6$
2. $y = -2x^2 + 2x + 12$
3. $y = x^2 - x - 20$
4. $y = x^2 + 4x - 3$
5. $y = x^2 + 2x + 5$
6. $y = x^2 - 2x + 1$
7. $y = x^2 - 4x + 13$
8. $y = 10x - 25 - x^2$
9. $y = -9 - x^2$
10. $y = 2x^2 - 6x$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Para encontrar la solución óptima (máximo o mínimo) de un problema, es necesario plantear una función cuadrática; la abscisa del vértice representa el valor que optimiza a la función y la ordenada el valor óptimo.

1 Encuentra 2 números cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Solución

Primer número = x
Segundo número = $20 - x$
Producto = $(x)(20 - x)$
Se obtiene la función $P(x) = (x)(20 - x) = 20x - x^2$

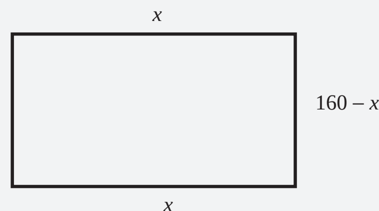
La gráfica de la función representa una parábola cóncava hacia abajo, entonces el vértice será el punto máximo; esto significa que el valor de x en el vértice dará un valor máximo.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-1)} = -\frac{20}{-2} = 10$$

Si x es 10, entonces el valor de $20 - x$, es 10
Por tanto, los valores son 10 y 10

2 Un granjero desea cercar un terreno rectangular y dispone de 320 m de alambre, ¿qué dimensiones debe tener el terreno para que su área sea máxima?

Solución



Se determinan las dimensiones en términos de una variable

2 (base) + 2 (altura) = perímetro
$2x + 2$ (altura) = 320
x + (altura) = 160
altura = $160 - x$

El área es el producto de la base por la altura, se hace el producto y con esto se obtiene la función $A(x)$.

$$A(x) = x(160 - x)$$
$$A(x) = 160x - x^2$$

La ecuación representa una parábola cóncava hacia abajo, por lo que el vértice será el punto máximo; esto significa que el valor de x en el vértice dará un área máxima.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{160}{2(-1)} = -\frac{160}{-2} = 80$$

Se deduce que las dimensiones del terreno son 80 metros de largo por 80 de ancho.

3 Encuentra dos números enteros cuya diferencia es 12 y cuyo producto sea mínimo.

Solución

Primer número: x
Segundo número: $x + 12$
Producto = $(x)\ (x + 12)$
Se obtiene la función $P(x) = (x)\ (x + 12) = x^2 + 12x$

La función representa una parábola cóncava hacia arriba, entonces el vértice será el punto mínimo; esto significa que el valor de x en el vértice dará un valor mínimo.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(12)}{2(1)} = -\frac{12}{2} = -6$$

Si x es -6, entonces el valor de $12 + x$, es 6

Por tanto, los valores son 6 y -6

EJERCICIO 128

Plantea funciones cuadráticas y resuelve los siguientes problemas.

1. Encuentra 2 números cuya suma sea 100 y su producto sea máximo.
2. Encuentra dos números enteros cuya diferencia sea 20 y su producto sea mínimo.
3. La suma de 2 números es 40, ¿cuáles son los números si la suma de sus cuadrados es un valor mínimo?
4. Se quiere cercar un terreno rectangular con 220 metros de alambre. Encuentra las dimensiones del terreno para que su área sea máxima.
5. Se arroja una pelota con una velocidad de 96 pies por segundo, la altura s que alcanza en un tiempo t lo determina la siguiente ecuación: $s = 96t - 32t^2$. Calcula la altura máxima que alcanza.
6. De una hoja rectangular de 76 cm de perímetro se cortan cuadrados de 2 cm por lado para construir una caja sin tapa. Determina las dimensiones de la hoja para obtener el volumen máximo.
7. Una editorial vende a los expendios de revistas una publicación científica a $60 el ejemplar, y cada 50 ejemplares que excedan los 500, el precio de venta disminuye $2, ¿cuántos ejemplares extras debe adquirir un expendio para que la editorial tenga un ingreso máximo?
8. Una juguetería vende x pelotas a p pesos con $p = 150 - 4x$, el costo de producción de x pelotas es $C = 70x - 2x^2$. Determina el número de pelotas que debe vender la juguetería para obtener una ganancia máxima.
9. Un fabricante de lápices distribuye a las papelerías 30 cajas con 100 lápices cada una a un precio de $0.80 por lápiz, y por cada caja que exceda las 30 el precio de venta disminuye en 2 centavos por lápiz. ¿Cuántas cajas debe vender el fabricante a las papelerías para obtener ingresos máximos?
10. Un trozo de alambre de 100 cm se parte en dos trozos, un de ellos se dobla para formar un triángulo equilátero, y el trozo restante se dobla para formar un cuadrado, ¿cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas del triángulo y cuadrado sea mínima?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Relación entre las raíces de una ecuación de segundo grado

Entre los coeficientes y las raíces de una ecuación de segundo grado existen dos relaciones, la suma y el producto.

Sean las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Suma de raíces

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Entonces, la suma de las raíces es:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Producto de raíces

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{(2a)^2}$$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Por tanto, el producto de las raíces es:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Halla el valor de la suma de las raíces de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.

Solución

Se determinan los valores de los coeficientes de la ecuación y se sustituyen en la fórmula.

$$a = 1, b = 1, c = -6$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{1} = -1$$

Por consiguiente, $x_1 + x_2 = -1$

Comprobación

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$

$x_1 + x_2 = -3 + 2 = -1$

2 Encuentra el valor del producto de las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Solución

Se determinan los valores de los coeficientes de la ecuación y se sustituyen en la fórmula.

$$a = 1, b = -6, c = 9$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{9}{1} = 9$$

Por tanto, $x_1 \cdot x_2 = 9$

Comprobación

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$

$(x_1)(x_2) = (3)(3) = 9$

EJERCICIO 129

Determina el valor de la suma y el producto de las raíces mediante la relación entre ellas.

1. $4x^2 - 9 = 0$
2. $x^2 - 25 = 0$
3. $x^2 - x = 0$
4. $3x^2 + 8x = 0$
5. $x^2 - 5x + 6 = 0$
6. $x^2 + 4x + 3 = 0$
7. $-x^2 + x + 12 = 0$
8. $2x^2 + x - 1 = 0$
9. $9x^2 + 27x + 14 = 0$
10. $x^2 + 7ax + 12a^2 = 0$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Deducción de una ecuación de segundo grado dadas las raíces

Sean x_1, x_2, las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, si $a = 1$, entonces

$$x_1 + x_2 = -b \text{ y } x_1 \cdot x_2 = c$$

Por tanto, la ecuación es:

$$x^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de segundo grado, si las raíces son: -3, 5.

Solución

Se determina x_1, x_2, y se sustituyen en la fórmula.

$$x_1 = -3 \text{ o } x_2 = 5$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$x^2 - (-3+5)x + (-3)(5) = 0 \qquad \text{se simplifica}$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación es: $x^2 - 2x - 15 = 0$

2 Encuentra la ecuación de segundo grado, si las raíces son: $1 - 4i$, $1 + 4i$.

Solución

Se determina x_1, x_2, y se sustituyen en la fórmula.

$$x_1 = 1 - 4i \text{ o } x_2 = 1 + 4i$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$x^2 - [(1-4i)+(1+4i)]x + [(1-4i)(1+4i)] = 0$$

Se simplifican las operaciones $\qquad x^2 - 2x + 17 = 0$

Finalmente, la ecuación es: $x^2 - 2x + 17 = 0$

3 Determina la ecuación de segundo grado, si sus raíces son: $\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}$

Solución

Se sustituyen en la fórmula $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{2}{5}$

$$x^2-(x_1+x_2)x+(x_1\cdot x_2)=0$$
$$x^2-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)x+\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)=0$$
$$x^2+\frac{3}{20}x-\frac{2}{20}=0 \qquad \text{se multiplica por 20}$$
$$20x^2+3x-2=0$$

Por consiguiente, la ecuación es:

$$20x^2+3x-2=0$$

EJERCICIO 130

Determina la ecuación de segundo grado, que tiene como raíces los valores dados.

1. 3, –3
2. –7, 0
3. $4i, -4i$
4. 4, 1
5. –5, –3
6. $-2+5i, -2-5i$
7. $\frac{1}{2}, 2$
8. $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{5}$
9. $b, -3b$
10. $2a, 5a$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones con radicales

En este tipo de ecuaciones se recomienda despejar de la expresión un radical, que se eleva al cuadrado la igualdad para que se genere una ecuación de primero o segundo grado; en caso de que existan dos o más radicales, se repite lo anterior.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $\sqrt{x-5}-4=0$.

Solución

Se despeja el radical y se elevan ambos miembros al cuadrado:

$$\sqrt{x-5}=4 \rightarrow \left(\sqrt{x-5}\right)^2=(4)^2 \rightarrow x-5=16 \rightarrow x=16+5$$
$$x=21$$

2 Resuelve $\sqrt{3x^2-4x+1}=x+1$.

Solución

Se elevan ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{3x^2-4x+1}\right)^2=(x+1)^2$$

(continúa)

(*continuación*)

Se realizan las operaciones y se simplifican los términos

$$3x^2-4x+1=x^2+2x+1$$
$$3x^2-4x-x^2-2x-1+1=0$$
$$2x^2-6x=0$$

Se obtiene una ecuación de segundo grado y se factoriza para resolver:

$$2x(x-3)=0$$
$$2x=0 \text{ o } x-3=0$$
$$x=0 \text{ o } x=3$$

Por tanto, las soluciones son: $x = 0$ o $x = 3$

3 Resuelve la siguiente ecuación: $\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}=4$.

Solución

Se despeja uno de los radicales,

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}=4 \;\rightarrow\; \sqrt{x+3}=4-\sqrt{5x-1}$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros,

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=\left(4-\sqrt{5x-1}\right)^2 \rightarrow x+3=16-8\sqrt{5x-1}+\left(\sqrt{5x-1}\right)^2$$
$$x+3=16-8\sqrt{5x-1}+5x-1$$
$$x+3-5x+1-16=-8\sqrt{5x-1}$$
$$-4x-12=-8\sqrt{5x-1}$$

se divide por –4, $\quad x+3=2\sqrt{5x-1}$

Para eliminar la raíz, de nuevo se elevan al cuadrado ambos miembros,

$$(x+3)^2=\left(2\sqrt{5x-1}\right)^2 \rightarrow x^2+6x+9=4(5x-1)$$
$$x^2+6x+9=20x-4$$
$$x^2-14x+13=0$$
$$(x-13)(x-1)=0$$
$$x-13=0 \quad \text{o} \quad x-1=0$$
$$x=13 \quad \text{o} \quad x=1$$

Se sustituyen los valores que se obtienen en la ecuación dada; si la igualdad no se cumple o se obtienen radicandos negativos, entonces la solución no se admite.

Comprobación

Si $x = 13$	Si $x = 1$
$\sqrt{13+3}+\sqrt{5(13)-1}=4$	$\sqrt{1+3}+\sqrt{5(1)-1}=4$
$\sqrt{16}+\sqrt{64}=4$	$\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$
$4+8=4$	$2+2=4$
$12\neq 4$	$4=4$

Por consiguiente, $x = 13$ no es solución, finalmente, $x = 1$ sí es solución.

EJERCICIO 131

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{x}-5=2$
2. $\sqrt{1-x}=3$
3. $\sqrt{2x-4}-3=0$
4. $\sqrt{9-x}=x-3$
5. $7=x+\sqrt{x-1}$
6. $\sqrt{2x+5}-x=1$
7. $2x=5+\sqrt{4-x}$
8. $\sqrt{x+2}+x=10$
9. $\sqrt{4x+13}+2x=1$
10. $\sqrt{3+x}+\sqrt{2x-1}=3$
11. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$
12. $\sqrt{x+3}-\sqrt{8x+1}=-1$
13. $2+4\sqrt{x}=\sqrt{16x+5}$
14. $\sqrt{3x+6}-\sqrt{x+3}=1$
15. $\sqrt{x+1}=\sqrt{4x-3}-1$
16. $\sqrt{2-x}+\sqrt{11+x}=5$
17. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=\sqrt{2}$
18. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=3+\sqrt{10}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de ecuaciones cuadráticas

Geométricamente este tipo de sistemas de ecuaciones se generan cuando se intersecan una recta y una curva con ecuación cuadrática (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) o dos ecuaciones cuadráticas; la solución que satisface ambas ecuaciones son los puntos de intersección.

Procedimiento para la resolución de un sistema de ecuaciones cuadrático-lineal con dos incógnitas

1. De la ecuación lineal se despeja una incógnita.
2. El valor de la incógnita que se despejó se sustituye en la misma incógnita de la ecuación cuadrática, y se obtiene una ecuación cuadrática con una sola incógnita.
3. Se obtienen las soluciones o raíces de la ecuación cuadrática, posteriormente éstos se evalúan en el despeje, obteniendo los puntos de intersección.

Ejemplo

Resuelve el sistema: $\begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x+y-2=0 \end{cases}$

Solución

Se despeja de la ecuación lineal $x+y-2=0$ una de las incógnitas,

$$x=2-y$$

se sustituye en la ecuación cuadrática la incógnita despejada y se resuelve la ecuación:

$$x^2+y^2=10 \quad \rightarrow (2-y)^2+y^2=10$$
$$4-4y+y^2+y^2-10=0$$
$$2y^2-4y-6=0$$
$$y^2-2y-3=0$$
$$(y-3)(y+1)=0$$
$$y=3 \quad \text{o} \quad y=-1$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se sustituyen los valores de $y = 3$, $y = -1$ en $x = 2 - y$, se obtiene:

$$\text{Si } y = 3,\ x = 2 - 3 = -1,\ \text{si } y = -1,\ x = 2 - (-1) = 3$$

Por tanto, la solución del sistema son los puntos:

$$(-1, 3) \text{ y } (3, -1)$$

Procedimiento para la resolución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas

1. Las dos ecuaciones se multiplican por un número, de tal forma que al efectuar la suma de las ecuaciones equivalentes, se elimina una de las dos incógnitas.
2. Se resuelve la ecuación de segundo grado que se obtuvo en el punto anterior.
3. Para concluir, las raíces obtenidas se evalúan en alguna de las dos ecuaciones originales, para obtener los puntos de intersección.

Ejemplo

Resuelve el $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

Solución

Al aplicar el método de reducción, se multiplica por 3 la segunda ecuación,

$$\begin{array}{r} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 9x^2 - 3y^2 = \ \ 9 \\ \hline 10x^2 \qquad = 40 \end{array}$$

al resolver la ecuación, se determina que,

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = -2$$

Estos resultados se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones dadas para encontrar el valor de y.

$$\text{Si } x = 2,\quad y = \sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{3(2)^2 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$\text{Si } x = -2,\quad y = \sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{3(-2)^2 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = \pm 3$$

Finalmente, las soluciones son:

$$(2, 3),\ (2, -3),\ (-2, 3) \text{ y } (-2, -3)$$

Procedimiento para la resolución de un sistema cuadrático mixto

1. Las dos ecuaciones se multiplican por un número, de tal forma que al efectuar la suma de las ecuaciones equivalentes, se elimine el término independiente.
2. Del punto anterior se obtiene una ecuación cuadrática con dos incógnitas igualada a cero, la cual se factoriza.
3. Cada uno de los factores se igualan a cero y se despeja una de las dos incógnitas, quedando una en función de la otra.
4. Los despejes anteriores se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones originales, lo que genera una ecuación de segundo grado con una incógnita.
5. Se determinan las raíces de la ecuación de segundo grado y se evalúan en su respectiva igualdad obtenida en el paso 3, finalmente se obtienen los puntos de intersección.

Ejemplo

Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2a^2 - 3ab + b^2 = 15 \\ a^2 - 2ab + b^2 = 9 \end{cases}$$

Solución

Se elimina el término independiente,

$$\begin{array}{r} 3\left(2a^2 - 3ab + b^2 = 15\right) \\ -5\left(a^2 - 2ab + b^2 = 9\right) \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 6a^2 - 9ab + 3b^2 = 45 \\ -5a^2 + 10ab - 5b^2 = -45 \\ \hline a^2 + ab - 2b^2 = 0 \end{array}$$

La ecuación resultante se resuelve para a:

$$(a+2b)(a-b) = 0$$
$$a = -2b \quad \text{o} \quad a = b$$

Se sustituye en la segunda ecuación y se resuelve para b, y se determina que,

$$\text{si } a = -2b, \text{ entonces } (-2b)^2 - 2(-2b)(b) + b^2 = 9$$
$$9b^2 = 9$$
$$b = \pm 1$$

$$\text{si } a = b, \text{ entonces } (b)^2 - 2(b)(b) + b^2 = 9$$
$$0 \neq 9$$

Para $a = b$, la ecuación es inconsistente.
Se calculan los valores de a sustituyendo $b = 1$ y $b = -1$, en la relación,

$$a = -2b$$

Por consiguiente, las soluciones en el orden (a, b) son:

$$(-2, 1), (2, -1)$$

EJERCICIO 132

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x^2 - 4y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ a + b = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 9 \\ x + y = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy = 8 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19 \\ x - y = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -w^2 + wz - z^2 + 7 = 0 \\ w = 2z - 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} b^2 + 3a^2 = 57 \\ -a^2 - 3b^2 = -43 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 9x^2 - 2y^2 = 1 \\ 9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} a^2 - b^2 = -28 \\ a^2 + b^2 = 36 \end{cases}$

10. $\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 49 \\ a^2 - ab - 2b^2 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+\frac{7}{2}xy-\frac{1}{2}y^2=42 \\ x^2+xy+2y^2=32 \end{cases}$

12. $\begin{cases} a^2+2b^2=27 \\ -b^2-ab=-6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} w^2+2wz+z^2=4 \\ w^2+3wz-4=0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} a^2-2ab-b^2=-7 \\ a^2-3ab+b^2=-5 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3w^2+2wz+2z^2=18 \\ 6w^2+3wz+2z^2=24 \end{cases}$

16. $\begin{cases} a^2-ab=-\frac{1}{4}b^2 \\ 3a^2-b^2+9=0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 6m^2-6mn+3n^2-15=0 \\ m^2+\frac{7}{2}n^2=\frac{60}{8} \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2p^2-3pq+q^2=15 \\ \frac{1}{3}p^2-\frac{2}{3}pq+\frac{1}{3}q^2=3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 10r^2-15rs-5s^2-10=0 \\ -r^2+\frac{5}{3}rs-\frac{1}{3}s^2=-1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} ab+6a^2=10 \\ 8a^2-6ab-4b^2+80=0 \end{cases}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 24

DESIGUALDADES

Reseña HISTÓRICA



Thomas Harriot (1560-1621)

Ingresó a la Universidad de Oxford en el año 1577, cuando tenía 17 años de edad.

Fue un excelente astrónomo y el primer inglés que tuvo un telescopio, además, uno de los primeros que observó y habló de las manchas solares con lo que rompió en definitiva con la antigua concepción de la perfección solar.

A lo largo de su vida escribió miles de páginas detallando sus estudios y observaciones en campos tan diversos como la óptica, la química, la balística, la astronomía y las matemáticas. Diez años después de su muerte editaron su tratado sobre ecuaciones, en el que se pone de manifiesto su destreza en la resolución de algunas ecuaciones de tercer y cuarto grados.

En este tratado de álgebra se dan algunas novedades en la notación. Una de ellas es el empleo de los signos **menor que** y **mayor que** empleados en la actualidad. Muchos matemáticos, por tanto, le han atribuido la paternidad de los signos **$<$** y **$>$**.

Thomas Harriot (1560-1621)

Definición

Es la relación de orden que existe entre dos cantidades y se representa con los símbolos menor que (<) y mayor que (>).

Dada la expresión $3x - 2 < 8$, donde x es una variable, su solución es encontrar el conjunto de valores que la satisfagan, si esto ocurre recibe el nombre de conjunto solución de la desigualdad.

Ejemplo

Verifica cuál de los siguientes elementos del conjunto $\{-3, 2, 4, 5\}$, son soluciones de la desigualdad $3x - 2 < 8$.

Solución

Se sustituye cada valor en la desigualdad:

Para $x = -3$

$$3(-3) - 2 < 8$$
$$-9 - 2 < 8$$
$$-11 < 8 \quad \text{Desigualdad verdadera}$$

Para $x = 2$

$$3(2) - 2 < 8$$
$$6 - 2 < 8$$
$$4 < 8 \quad \text{Desigualdad verdadera}$$

Para $x = 4$

$$3(4) - 2 < 8$$
$$12 - 2 < 8$$
$$10 < 8 \quad \text{Desigualdad falsa}$$

Para $x = 5$

$$3(5) - 2 < 8$$
$$15 - 2 < 8$$
$$13 < 8 \quad \text{Desigualdad falsa}$$

En este ejemplo los valores que hicieron verdadera la desigualdad son soluciones de la expresión.

Propiedades de las desigualdades

Sean $a, b, c \in R$.

1. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$
2. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$
3. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
4. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Tabla de desigualdades

Desigualdad	Intervalo	Gráfica 1	Gráfica 2
$x > a$	(a, ∞)	a ∞	a ∞
$x < a$	$(-\infty, a)$	−∞ a	−∞ a
$x \geq a$	$[a, \infty)$	a ∞	a ∞
$x \leq a$	$(-\infty, a]$	−∞ a	−∞ a
$a < x < b$	(a, b)	a b	a b
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	a b	a b
$a < x \leq b$	$(a, b]$	a b	a b
$a \leq x < b$	$[a, b)$	a b	a b
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$	−∞ 0 ∞	

Nota: (a, b) es un intervalo abierto, $[a, b]$ es cerrado y $(a, b]$ o $[a, b)$ semiabierto o semicerrado.

Desigualdad lineal con una variable

Para determinar el conjunto solución de una desigualdad, se procede de la misma manera como en una ecuación lineal: se despeja la variable y se toman en consideración las propiedades de las desigualdades.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la desigualdad $6x - 10 > 3x + 5$.

Solución

Al despejar x se agrupan todos los términos que contengan la variable en uno de sus miembros, y los términos independientes en el otro, finalmente, se simplifica.

$$6x - 10 > 3x + 5 \quad \rightarrow \quad 6x - 3x > 5 + 10$$

$$3x > 15 \qquad \text{se divide por 3}$$

$$x > \frac{15}{3}$$

Por la propiedad 3, el sentido de la desigualdad no cambia $\quad x > 5$

La desigualdad $x > 5$, tiene la forma $x > a$ de la tabla, por tanto, el intervalo que representa el conjunto solución es $(5, \infty)$, y su representación gráfica es:



2 Determina el intervalo y grafica el conjunto solución de la desigualdad: $2x - 6 + 3x \geq 8x + 21$.

Solución

$$2x - 6 + 3x \geq 8x + 21 \quad \rightarrow \quad 2x + 3x - 8x \geq 21 + 6$$

$$-3x \geq 27$$

Por la propiedad 4, el sentido del signo de la desigualdad cambia

$$x \leq \frac{27}{-3}$$

$$x \leq -9$$

La desigualdad $x \leq -9$, tiene la forma $x \leq a$ de la tabla, por tanto, el intervalo que representa el conjunto solución es $(-\infty, -9]$ y su representación gráfica es:



3 Determina el conjunto solución de $3 \leq \dfrac{2x - 3}{5} < 7$.

Solución

Se multiplica la desigualdad por 5, para eliminar el denominador.

$$3 \leq \frac{2x - 3}{5} < 7 \;\rightarrow\; (3)(5) \leq 2x - 3 < (7)(5) \;\rightarrow\; 15 \leq 2x - 3 < 35 \;\rightarrow\; 15 + 3 \leq 2x < 35 + 3$$

Se suma 3 a cada extremo de la desigualdad $\quad 18 \leq 2x < 38$

Se divide entre 2 todos los miembros $\quad \dfrac{18}{2} \leq \dfrac{2x}{2} < \dfrac{38}{2}$

Por la propiedad 2, el signo de la desigualdad no cambia $\quad 9 \leq x < 19$

La desigualdad tiene la forma $a \leq x < b$, por tanto, el intervalo solución es $[9, 19)$ y la gráfica es:



4 ¿Cuál es el intervalo solución para la siguiente desigualdad $4 > \dfrac{2 - 3x}{7} > -2$?

Solución:

$$4 > \frac{2 - 3x}{7} > -2 \;\rightarrow\; (4)\,(7) > 2 - 3x > (-2)\,(7) \;\rightarrow\; 28 > 2 - 3x > -14$$

Se resta 2 a cada miembro $\quad 28 - 2 > -3x > -14 - 2$

$$26 > -3x > -16$$

Se divide entre -3 y se cambia el sentido de la desigualdad $\quad \dfrac{26}{-3} < x < \dfrac{-16}{-3}$

$$-\frac{26}{3} < x < \frac{16}{3}$$

La desigualdad tiene la forma $a < x < b$, por consiguiente, el intervalo solución es:

$$\left(-\frac{26}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

5 Determina el conjunto solución de $(5x+2)^2 - 2x > (5x-4)(5x+4)$.

Solución

Se desarrollan las operaciones indicadas.

$$(5x+2)^2 - 2x > (5x-4)(5x+4) \rightarrow 25x^2 + 20x + 4 - 2x > 25x^2 - 16$$

Se agrupan los términos y se simplifican $\quad 25x^2 + 20x - 2x - 25x^2 > -16 - 4$

Se divide entre 18 y se simplifica $\quad 18x > -20$

Por la propiedad 3, el signo no cambia $\quad x > \frac{-20}{18}$

Por la propiedad 3, el signo no cambia $\quad x > -\frac{10}{9}$

Finalmente, resulta que el conjunto solución es el intervalo $\left(-\frac{10}{9}, \infty\right)$

EJERCICIO **133**

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

1. $12x - 4 > 7x + 11$
2. $3x + 9 > 7x - 3$
3. $2x - 5 < x - 9$
4. $4x - 2 \geq 12x + 6$
5. $2x - 1 > 27 + 6x$
6. $x - 9 \leq 8x - 1$
7. $2x - 4 + 6x < 10x - 7$
8. $3x + 7 - 2x > 4x - 3 + 2x$
9. $0.6x + 3.4 \leq 8.4 + 0.1x$
10. $4(x-3) - 8 \leq 5 - x$
11. $16x + (5 - x) > 30$
12. $(8x+1)(x-7) \geq (2x-3)(4x+5)$
13. $x(x+12) > (x-4)^2$
14. $(4x+1)(2x-2) > 8x(x+5)$
15. $\frac{5x-1}{3} > 3$
16. $-5 - \frac{x+4}{5} > 11 - 3x$
17. $\frac{y-1}{2} - 2 \leq \frac{3y-2}{5}$
18. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x \leq \frac{5}{6}x - \frac{5}{3}$
19. $\frac{1}{2}x - 4 \leq -9 - \frac{1}{3}x$
20. $\frac{x}{3} - \frac{8}{7} \leq 3x + \frac{2}{3}$
21. $\frac{5}{6}x - \frac{2}{5} > \frac{3}{4}x - \frac{1}{10}$
22. $\frac{5-x}{2} - \frac{x-17}{4} \geq \frac{x}{3} - \frac{7x-3}{12}$
23. $-7 < 4x + 1 < 13$
24. $-6 < 2x - 3 < 4$
25. $-8 \leq 3x + 1 \leq -2$
26. $-10 \leq x - 1 < -2$
27. $-11 < 3x - 2 < 7$
28. $-15 \leq x + 8 < -2$
29. $-5 < 3x + 1 < 13$
30. $8 - x \leq 5x + 32 < x + 36$
31. $-100 < 0.1x < 10$
32. $x^2 + 2 \leq x^2 + 5x \leq x^2 + 3$
33. $-1 < \frac{5-x}{3} \leq 7$
34. $-6 < \frac{2x-3}{4} < 2$
35. $-3 \leq \frac{4-2x}{5} < 1$
36. $-5 \leq \frac{2-3x}{6} \leq 2$
37. $2 < \frac{4-x}{3} < 6$
38. $0 \leq 6 - \frac{3}{2}x \leq 9$
39. $4 \leq x - \frac{1}{2} \leq 9$
40. $\frac{1}{3} > \frac{x-1}{5} > \frac{1}{9}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Desigualdad cuadrática con una variable

Método por casos

Para encontrar el conjunto solución, se factoriza la expresión cuadrática, la expresión que se obtiene se divide en casos, a los que se hace un análisis de signos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Determina el conjunto solución de la desigualdad $x^2 + x - 6 < 0$.

Solución

Se factoriza la desigualdad y se analizan sus factores:

$$(x+3)(x-2)<0$$

El producto de los binomios es negativo, entonces existen 2 casos:

Caso I	**Caso II**
$x-2<0$ y $x+3>0$	$x+3<0$ y $x-2>0$

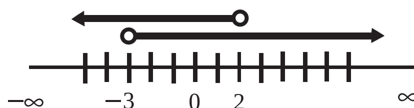
El conjunto solución de cada caso resulta de la intersección de los intervalos que se obtienen al resolver las desigualdades que dan origen a cada caso.

Solución del caso I

$x-2<0$ y $x+3>0$

$x<2$ y $x>-3$

$$(-\infty,2)\cap(-3,\infty)$$



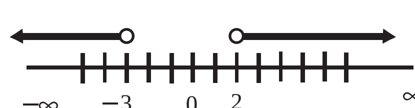
$$(-3,\infty)\cap(-\infty,2) = (-3,2)$$

Solución del caso II

$x+3<0$ y $x-2>0$

$x<-3$ y $x>2$

$$(-\infty,-3)\cap(2,\infty)$$



$$(-\infty,-3)\cap(2,\infty) = \varnothing$$

La unión de los intervalos es el conjunto solución de la desigualdad.

$$(-3, 2) \cup \varnothing = (-3, 2)$$

Para concluir, el conjunto solución es el intervalo: $(-3,2)$

Método por intervalos

Se factoriza la expresión cuadrática, después se buscan valores que hagan cero a cada factor, entonces los valores se indican en la recta numérica y se forman los intervalos a analizar.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad $x^2 - 5x - 6 > 0$.

Solución

Se factoriza la expresión cuadrática.

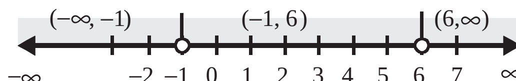
$$(x - 6)(x + 1) > 0$$

El conjunto solución son los valores que hacen el producto positivo.

Se buscan los valores que hacen cero a cada factor.

$$x-6=0 \quad \text{y} \quad x+1=0$$
$$x=6 \qquad\quad x=-1$$

Los valores son 6 y −1, se localizan en la recta numérica y se forman los intervalos.



De cada intervalo se toma un valor cualquiera, el cual se sustituye en los factores para determinar los signos de éstos. Posteriormente, se multiplican los signos para tomar como solución el intervalo o los intervalos que cumplen con la desigualdad dada.

Para el intervalo $(-\infty, -1)$

Se toma el valor de $x = -4$ y se sustituye en cada factor:

$$(-4-6)(-4+1) = (-10)(-3) = 30$$

El producto es positivo $(-)(-) = +$

Para el intervalo $(-1, 6)$

Se toma el valor de $x = 0$ y se sustituye en los factores:

$$(0-6)(0+1) = (-6)(1) = -6$$

El producto es negativo $(-)(+) = -$

Para el intervalo (6, ®)

Se toma el valor de $x = 7$ y se sustituye en cada factor:

$$(7-6)(7+1) = (1)(8) = 8$$

El producto es positivo $(+)(+) = +$

El intervalo solución es la unión de los intervalos donde el producto es positivo, es decir,

$$(-\infty, -1) \cup (6, \infty)$$

Otra forma de resolver una desigualdad cuadrática mediante intervalos, es construir una tabla que indique los signos resultantes de cada factor y el signo resulta del producto de dichos factores.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad $x^2 - 25 \geq 0$.

Solución

Se factoriza la expresión cuadrática.

$$x^2 - 25 \geq 0$$
$$(x+5)(x-5) \geq 0$$

Se buscan los valores que hacen cero a cada factor.

$$x+5=0 \qquad\qquad x-5=0$$
$$x=-5 \qquad\qquad x=5$$

Los valores que hacen cero al producto son $x = 5$ y $x = -5$, entonces los intervalos que se forman son:

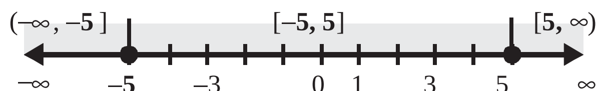


Tabla de signos

Intervalo	$(-\infty, -5]$ para $x = -6$	$[-5, 5]$ para $x = 0$	$[5, \infty)$ para $x = 6$
Signo de $x - 5$	$-6 - 5 = -11$	$0 - 5 = -5$	$6 - 5 = +1$
Signo de $x + 5$	$-6 + 5 = -1$	$0 + 5 = +5$	$6 + 5 = +11$
Signo del producto $(x - 5)(x + 5)$	$(-)(-) = +$	$(-)(+) = -$	$(+)(+) = +$

El conjunto solución son los valores que hacen el producto positivo o cero.
Por tanto, el conjunto solución es $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$

Ejemplo

Resuelve la siguiente desigualdad: $6x^2 < 7x + 3$.

Solución

Se acomodan los términos en uno de los miembros y se factoriza la expresión cuadrática.

$$6x^2 < 7x + 3 \;\rightarrow\; 6x^2 - 7x - 3 < 0$$

$$(2x - 3)(3x + 1) < 0$$

$$2x - 3 = 0 \qquad\qquad 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad\qquad x = -\frac{1}{3}$$

Entonces los intervalos que se forman son:

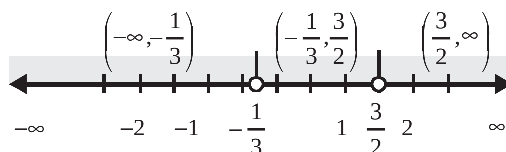


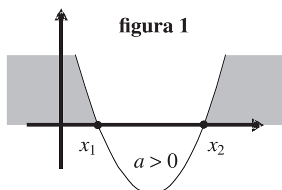
Tabla de signos

Intervalo	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ Para $x = -1$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$ Para $x = 1$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ Para $x = 2$
Signo de $2x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $3x + 1$	$-$	$+$	$+$
Signo del producto $(2x - 3)(3x + 1)$	$(-)(-) = +$	$(-)(+) = -$	$(+)(+) = +$

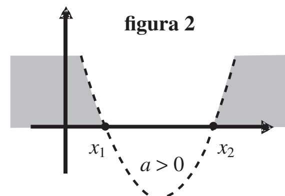
El producto es menor que cero, entonces el intervalo solución es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$

Método gráfico

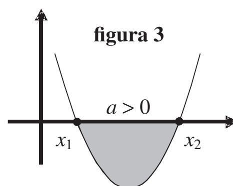
En las siguientes gráficas la parte sombreada representa al conjunto solución de las diferentes desigualdades cuadráticas, la línea continua representa un intervalo cerrado y la línea discontinua o punteada indica que el intervalo solución es abierto, éste se determina al encontrar las raíces de la ecuación de segundo grado.



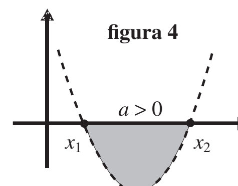
$ax^2+bx+c\geq 0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1]\cup[x_2,\infty)$



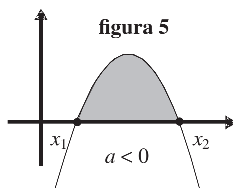
$ax^2+bx+c>0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1)\cup(x_2,\infty)$



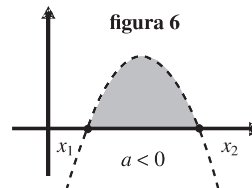
$ax^2+bx+c\leq 0 \;\rightarrow\; [x_1, x_2]$



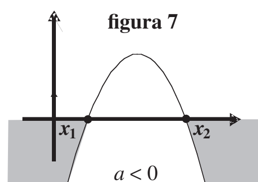
$ax^2+bx+c<0 \;\rightarrow\; (x_1, x_2)$



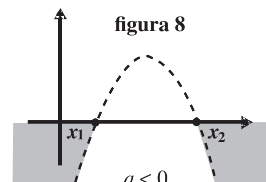
$ax^2+bx+c\geq 0 \;\rightarrow\; [x_1, x_2]$



$ax^2+bx+c>0 \;\rightarrow\; (x_1, x_2)$



$ax^2+bx+c\leq 0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1]\cup[x_2,\infty)$



$ax^2+bx+c<0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1)\cup(x_2,\infty)$

Los valores de x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ con $x_1<x_2$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina por método grafico el conjunto solución de la desigualdad $x^2+2x-8\geq 0$.

Solución

Se determinan las raíces de la ecuación $x^2+2x-8=0$, por cualquier método, por ejemplo factorización.

$$(x+4)(x-2)=0$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Después, cada factor se iguala a cero y se obtienen las raíces:

$$x + 4 = 0 \ \rightarrow \ x = -4 \text{ y } x - 2 = 0 \ \rightarrow \ x = 2$$

Por tanto, las raíces son: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, ya que $x_1 < x_2$

La desigualdad tiene la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ de la figura 1, con a positivo; la fórmula que representa el conjunto solución es: $\left(-\infty, x_1\right] \cup \left[x_2, \infty\right)$

Finalmente, el conjunto solución es: $\left(-\infty, -4\right] \cup \left[2, \infty\right)$

2 Resuelve por método gráfico la desigualdad $-3x^2 > 2x - 1$.

Solución

Se acomodan los términos, $-3x^2 - 2x + 1 > 0$, se determinan las raíces de la ecuación $-3x^2 - 2x + 1 = 0$, las cuales son: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$

la desigualdad tiene la forma: $ax^2 + bx + c > 0$

De la figura 6 con a negativo, entonces el intervalo es: $\left(x_1, x_2\right)$, con $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{1}{3}$

Por tanto, el intervalo de solución es:

$$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

EJERCICIO 134

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades por cualquier método.

1. $-x^2 + 9 > 0$
2. $16 - x^2 \geq 0$
3. $25 - x^2 \leq 0$
4. $x^2 - 36 > 0$
5. $x - 3x^2 \geq 0$
6. $-x^2 + 5x < 0$
7. $-2x^2 + 8x < 0$
8. $x^2 - x - 20 > 0$
9. $2x^2 - 5x - 3 < 0$
10. $6x^2 - 7x - 3 \leq 0$
11. $x^2 + 3x + 6 > -2x + 2$
12. $(2x + 5)\ (2x - 3) \geq 3x - 12$
13. $(3x - 2)(x + 5) < 14x - 8$
14. $(x - 3)(2x + 1) \geq 0$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Desigualdad racional

En este tipo de desigualdades se analiza el signo del numerador y del denominador, para obtener el signo del cociente, según sea la desigualdad dada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la desigualdad $\frac{2}{3x-6}<0$.

Solución

En el primer miembro el numerador es positivo, entonces para que la división sea negativa, como lo indica la desigualdad, es necesario que el denominador sea negativo, es decir:

$$3x-6<0 \rightarrow x<2$$

Por tanto, el intervalo solución es $(-\infty, 2)$

2 Resuelve la desigualdad $\frac{4}{5x-2}>0$.

Solución

En el primer miembro el numerador es positivo, entonces para que la división sea positiva es necesario que el denominador sea positivo, es decir:

$$5x-2>0 \rightarrow x>\frac{2}{5}$$

Por consiguiente, el intervalo solución es $\left(\frac{2}{5},\infty\right)$

Método por casos

La desigualdad dada se transforma a otra, la cual se compara con cero y se analizan los signos del cociente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución de $\frac{x}{x+1}\geq 2$.

Solución

Se agrupan los términos en un miembro de la desigualdad y se realizan las operaciones indicadas:

$$\frac{x}{x+1}-2\geq 0 \rightarrow \frac{x-2(x+1)}{x+1}\geq 0 \rightarrow \frac{x-2x-2}{x+1}\geq 0 \rightarrow \frac{-x-2}{x+1}\geq 0 \quad -\frac{x+2}{x+1}\geq 0$$

Al aplicar la propiedad 4 de las desigualdades, la nueva desigualdad a resolver es:

$$\frac{x+2}{x+1}\leq 0$$

En un cociente el denominador debe ser distinto de cero, entonces éste representa un intervalo abierto; en este ejemplo el cociente es menor o igual a cero, entonces existen 2 casos.

Caso I	**Caso II**
$x+1<0$	$x+1>0$

Solución del caso I

$\frac{x+2}{x+1} \leq 0$ Si $x+1<0$, entonces, por la propiedad 4, al multiplicar por $(x+1)$ se invierte el signo de la desigualdad. $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)(x+1) \geq 0(x+1)$ $x+2 \geq 0$	La solución es la intersección de los intervalos. $x+1<0 \rightarrow x<-1 \rightarrow (-\infty,-1)$ $x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow [-2,\infty)$ $(-\infty,-1) \cap [-2,\infty)$ $-\infty \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \infty$ $(-\infty,-1) \cap [-2,\infty) = [-2,-1)$

Solución del caso II

$\frac{x+2}{x+1} \leq 0$ Si $x+1>0$, entonces por la propiedad 3, no se invierte el signo de la desigualdad al multiplicar por $(x+1)$. $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)(x+1) \leq 0(x+1)$ $x+2 \leq 0$	La solución es la intersección de los intervalos. $x+1>0 \rightarrow x>-1 \rightarrow (-1,\infty)$ $x+2 \leq 0 \rightarrow x \leq -2 \rightarrow (-\infty,-2]$ $(-1,\infty) \cap (-\infty,-2]$ $-\infty \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \infty$ $(-\infty,-2] \cap (-1,\infty) = \varnothing$

El intervalo solución es la unión de los intervalos resultantes en cada caso.

$$[-2,-1) \cup \varnothing = [-2,-1)$$

Finalmente, la solución de la desigualdad es: $[-2,-1)$

2 Resuelve la siguiente desigualdad $\frac{1}{2-x} \geq \frac{2}{x+1}$.

Solución

De acuerdo con la desigualdad, existen 4 casos, los cuales se indican de la siguiente forma:

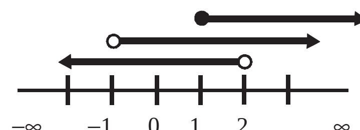
Caso I
$2-x>0$ y $x+1>0$

Caso II
$2-x>0$ y $x+1<0$

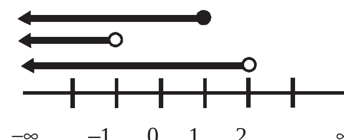
Caso III
$2-x<0$ y $x+1>0$

Caso IV
$2-x<0$ y $x+1<0$

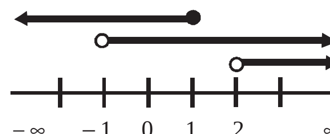
Solución del caso I

Si $2-x>0 \rightarrow x<2 \rightarrow (-\infty,2)$ Si $x+1>0 \rightarrow x>-1 \rightarrow (-1,\infty)$ Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es positivo, entonces, el sentido de la desigualdad no cambia de dirección. $\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1) \geq \frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$ $1(x+1) \geq 2(2-x)$ $x+1 \geq 4-2x$ $x+2x \geq 4-1 \rightarrow 3x \geq 3$ $x \geq 1 \rightarrow [1,\infty)$	La solución del primer caso es la intersección de los 3 intervalos. $(-1,\infty) \cap [1,\infty) \cap (-\infty, 2)$  La solución es: $(-\infty, 2) \cap (-1,\infty) \cap [1,\infty) = [1,2)$

Solución del caso II

Si $2-x>0 \rightarrow x<2 \rightarrow (-\infty,2)$ Si $x+1<0 \rightarrow x<-1 \rightarrow (-\infty,-1)$ Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es negativo, entonces el sentido de la desigualdad cambia de dirección. $\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1) \leq \frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$ $1(x+1) \leq 2(2-x)$ $x+1 \leq 4-2x$ $x+2x \leq 4-1 \rightarrow 3x \leq 3$ $x \leq 1 \rightarrow (-\infty,1]$	La solución del segundo caso es la intersección de los 3 intervalos. $(-\infty,-1) \cap (-\infty,1] \cap (-\infty, 2)$  La solución es: $(-\infty,-1)$

Solución del caso III

Si $2-x<0 \rightarrow x>2 \rightarrow (2,\infty)$ Si $x+1>0 \rightarrow x>-1 \rightarrow (-1,\infty)$ Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es negativo, entonces el sentido de la desigualdad cambia de dirección. $\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1) \leq \frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$ $1(x+1) \leq 2(2-x)$ $x+1 \leq 4-2x$ $x+2x \leq 4-1$ $3x \leq 3$ $x \leq 1 \rightarrow (-\infty,1]$	La solución del tercer caso es la intersección de los 3 intervalos $(2,\infty) \cap (-1,\infty) \cap (-\infty,1]$  La solución es: $(2,\infty) \cap (-1,\infty) \cap (-\infty,1] = \varnothing$

Solución del caso IV

Si $2-x<0 \rightarrow x>2 \rightarrow (2,\infty)$

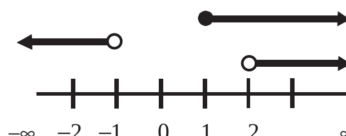
Si $x+1<0 \rightarrow x<-1 \rightarrow (-\infty,-1)$

Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es positivo, entonces el sentido de la desigualdad no cambia de dirección.

$$\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1) \geq \frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$$
$$1(x+1)\geq 2(2-x)$$
$$x+1\geq 4-2x$$
$$x+2x\geq 4-1$$
$$3x\geq 3$$
$$x\geq 1 \rightarrow [1,\infty)$$

La solución del cuarto caso es la intersección de los 3 intervalos

$$(2,\infty) \cap (-\infty,-1) \cap [1,\infty)$$



La solución es:

$$(2,\infty) \cap (-\infty,-1) \cap [1,\infty) = \varnothing$$

La unión de los intervalos es la solución de la desigualdad.

$$(-\infty,-1) \cup [1,2) \cup \varnothing \cup \varnothing = (-\infty,-1) \cup [1,2)$$

Método por intervalos

Consiste en encontrar los valores que hagan cero al numerador y al denominador, para determinar los intervalos y realizar el análisis de signos, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve $\frac{3}{2x+3} < \frac{1}{x-2}$.

Solución

Se agrupan los términos en un miembro de la desigualdad y se realiza la operación indicada.

$$\frac{3}{2x+3} < \frac{1}{x-2} \rightarrow \frac{3}{2x+3} - \frac{1}{x-2} < 0 \rightarrow \frac{3(x-2)-(2x+3)}{(2x+3)(x-2)} < 0 \rightarrow \frac{3x-6-2x-3}{(2x+3)(x-2)} < 0$$
$$\frac{x-9}{(2x+3)(x-2)} < 0$$

Se determinan aquellos valores que hacen cero al numerador y al denominador, para obtener los posibles intervalos que darán el conjunto solución.

$$x-9=0 \rightarrow x=9 \quad ; \quad 2x+3=0 \rightarrow x=-\frac{3}{2} \quad ; \quad x-2=0 \rightarrow x=2$$

El denominador debe de ser diferente de cero, por consiguiente, para $x=-\frac{3}{2}$ y $x=2$, los intervalos son abiertos y para $x=9$, es cerrado, entonces los intervalos que se van a analizar son:

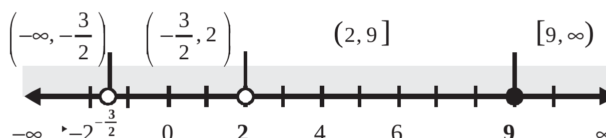


Tabla de signos

Intervalo	$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$	(2, 9]	[9, ∞)
Signo de $x-9$	–	–	–	+
Signo de $2x+3$	–	+	+	+
Signo de $x-2$	–	–	+	+
Signo de $\frac{x-9}{(2x+3)(x-2)}$	$\frac{(-)}{(-)(-)}=-$	$\frac{(-)}{(+)(-)}=+$	$\frac{(-)}{(+)(+)}=-$	$\frac{(+)}{(+)(+)}=+$

Si $\frac{x-9}{(2x+3)(x-2)}<0$, entonces el intervalo solución de la desigualdad es $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, 9]$

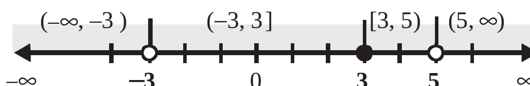
2 Resuelve la desigualdad $\frac{(3-x)(x^2+2)}{(x-5)(x+3)} \geq 0$.

Solución

Se buscan los valores que hacen cero los factores, con estos valores se construyen los intervalos que dan origen al conjunto solución de la desigualdad.

Para el factor (x^2+2), $x^2+2=0 \rightarrow x^2=-2 \rightarrow x=\sqrt{-2}$ La raíz es imaginaria, esto significa que el factor siempre tendrá un valor positivo.	Para el factor $(3-x)$, $3-x=0 \rightarrow x=3$ Para el factor $(x-5)$, $x-5=0 \rightarrow x=5$ Para el factor $(x+3)$, $x+3=0 \rightarrow x=-3$

Luego, el denominador debe ser distinto de cero, entonces para $x=5$ y $x=-3$, los intervalos son abiertos y para $x=3$, el intervalo es cerrado.



Se construye la tabla, no se toma en cuenta el factor (x^2+2), ya que es positivo en todos los valores de x, y no afecta al signo del cociente.

Intervalo	(–∞, –3)	(–3, 3]	[3, 5)	(5, ∞)
Signo de $3-x$	+	+	–	–
Signo de $x-5$	–	–	–	+
Signo de $x+3$	–	+	+	+
Signo de $\frac{(3-x)(x^2+2)}{(x-5)(x+3)}$	$\frac{(+)}{(-)(-)}=\frac{+}{+}=+$	$\frac{(+)}{(-)(+)}=\frac{+}{-}=-$	$\frac{(-)}{(-)(+)}=\frac{-}{-}=+$	$\frac{(-)}{(+)(+)}=\frac{-}{+}=-$

Finalmente, la solución de la desigualdad es: (–∞, –3) ∪ [3, 5)

EJERCICIO 135

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades.

1. $\frac{5}{4x-3}>0$
2. $\frac{3}{2x-5}\leq 0$
3. $\frac{x-2}{2x-5}<0$
4. $\frac{6}{(x-2)^2}>0$
5. $\frac{5}{6-2x}\geq 0$
6. $\frac{2x+6}{2x-4}\leq 0$
7. $\frac{x+1}{x-3}\geq 0$
8. $\frac{3}{x+1}>\frac{2}{x-3}$
9. $\frac{4}{3x+1}\leq\frac{2}{x-4}$
10. $\frac{3}{x+2}\leq\frac{1}{x-2}$
11. $\frac{x^2(x+4)}{(x-1)(x+2)}>0$
12. $\frac{(x-3)^2(2x-3)}{(x+2)(x-4)}\leq 0$
13. $\frac{(4-x)(x+3)^2}{(x+6)(x-1)}\geq 0$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Desigualdad que tiene la expresión (*x* – *a*) (*x* – *b*) (*x* – *c*)...

Una forma práctica para determinar el conjunto solución, es construir una tabla con los intervalos que se forman al encontrar los valores que hacen cero a cada factor, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad $(x-2)(x-4)(x+2)\geq 0$.

Solución

Se determinan los valores que hacen cero a cada factor para formar los intervalos.

Para $x-2=0 \rightarrow x=2$; Para $x-4=0 \rightarrow x=4$; Para $x+2=0 \rightarrow x=-2$

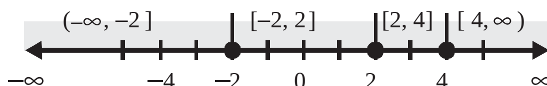


Tabla de signos

Intervalo	(−∞, −2]	[−2, 2]	[2, 4]	[4, ∞)
Signo de x – 2	–	–	+	+
Signo de x – 4	–	–	–	+
Signo de x + 2	–	+	+	+
Signo de (x – 2)(x – 4)(x + 2)	(–)(–)(–) = –	(–)(–)(+) = +	(+)(–)(+) = –	(+)(+)(+) = +

La desigualdad indica que el producto es positivo, entonces se toman los intervalos cuyo producto es positivo, es decir, $[-2,2]$ y $[4,\infty)$, luego, la unión de estos intervalos es el conjunto solución.

Finalmente, la solución de la desigualdad es: $[-2,2] \cup [4,\infty)$

EJERCICIO 136

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades.

1. $(x+2)(x-4)(2-x)(x+1) \geq 0$
2. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$
3. $x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$
4. $x^3 - 12x + 16 < 0$
5. $x^3 > 9x$
6. $x^4 - 11x^2 - 18x - 8 > 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Desigualdades con valor absoluto

El conjunto solución de una desigualdad que involucra valor absoluto, está dado por las siguientes propiedades:

Sean $a, b \in R$ y $b > 0$

1. $|a| < b$ se expresa como:
   $-b < a < b$ o bien $a > -b$ y $a < b$
2. $|a| \leq b$ se expresa como:
   $-b \leq a \leq b$ o bien $a \geq -b$ y $a \leq b$
3. $|a| > b$ se expresa como:
   $-a > b$ o $a > b$ o bien $a < -b$ o $a > b$
4. $|a| \geq b$ se expresa como:
   $-a \geq b$ o $a \geq b$ o bien $a \leq -b$ o $a \geq b$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución de $|x+1| < 7$.

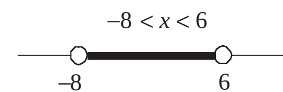
Solución

La desigualdad $|x+1| < 7$, tiene la forma de la propiedad 1, entonces:

$$-7 < x + 1 < 7$$

O bien:

$$-7 < x + 1 \qquad x + 1 < 7$$
$$-7 - 1 < x \qquad x < 7 - 1$$
$$-8 < x \qquad x < 6$$



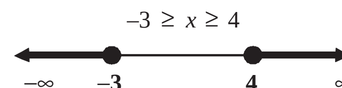
Por consiguiente, el conjunto solución es el intervalo $(-8, 6)$

2 Encuentra el conjunto solución de $|2x-1| \geq 7$.

Solución

La desigualdad $|2x-1| \geq 7$ tiene la forma de la propiedad 4, entonces:

$$-(2x-1) \geq 7 \qquad 2x - 1 \geq 7$$
$$-2x + 1 \geq 7 \qquad 2x \geq 7 + 1$$
$$-2x \geq 7 - 1 \qquad 2x \geq 8$$
$$x \leq \frac{6}{-2} \qquad x \geq \frac{8}{2}$$
$$x \leq -3 \qquad x \geq 4$$



Por tanto, el conjunto solución es el intervalo $(-\infty, -3] \cup [4, \infty)$

Casos especiales de desigualdades con valor absoluto

En este tipo de desigualdades se aplican las propiedades anteriores, para obtener dos desigualdades lineales; el conjunto solución de la desigualdad es la unión o intersección de los intervalos solución de cada desigualdad obtenida.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución de la desigualdad $|x - 2| \geq 3x + 1$.

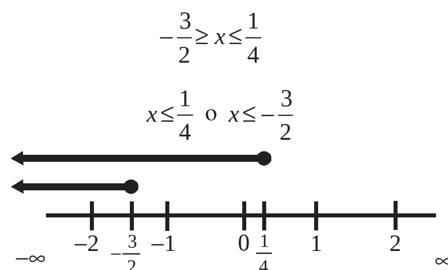
Solución

La desigualdad $|x - 2| \geq 3x + 1$ tiene la forma de la fórmula 4, entonces se representa como:

Primera desigualdad	Segunda desigualdad
$-(x-2) \geq 3x+1$	$x-2 \geq (3x+1)$
$-x+2 \geq 3x+1$	$x-2 \geq 3x+1$
$-3x-x \geq -2+1$	$x-3x \geq 1+2$
$-4x \geq -1$	$-2x \geq 3$
$x \leq \frac{-1}{-4}$	$x \leq \frac{3}{-2}$
$x \leq \frac{1}{4}$	$x \leq -\frac{3}{2}$

$$-\frac{3}{2} \geq x \leq \frac{1}{4}$$

$$x \leq \frac{1}{4} \text{ o } x \leq -\frac{3}{2}$$



Finalmente, las soluciones de cada desigualdad son:

$$x \leq \frac{1}{4} \rightarrow \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \quad ; \quad x \leq -\frac{3}{2} \rightarrow \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$$

Se determina la unión de los intervalos:

$$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$$

Para concluir, la solución de la desigualdad es:

$$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$$

2 Resuelve la desigualdad $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| > 4$.

Solución

La desigualdad tiene la forma de la propiedad 3, entonces se tienen las siguientes desigualdades.

$$\frac{x-1}{x+2} > 4 \text{ o } -\left(\frac{x-1}{x+2}\right) > 4$$

La desigualdad $\frac{x-1}{x+2} > 4$, se transforma a:

$$\frac{x-1}{x+2} > 4 \rightarrow \frac{x-1}{x+2} - 4 > 0 \rightarrow \frac{-3x-9}{x+2} > 0$$

Al aplicar el procedimiento para resolver una desigualdad racional, por el método de intervalos, los valores que hacen cero al numerador y al denominador son $x = -3$ y $x = -2$, respectivamente, el denominador debe ser distinto de cero; entonces el intervalo es abierto, lo mismo para el numerador ya que la desigualdad es estrictamente mayor que cero, por tanto los intervalos que se forman son:

$$(-\infty, -3), (-3, -2), (-2, \infty)$$

Tabla de signos

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo de $-3x - 9$	+	–	–
Signo de $x + 2$	–	–	+
Signo de $\frac{3x-9}{x+2}$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{-}{+} = -$

El conjunto solución para la desigualdad $\frac{x-1}{x+2} > 4$ es: $(-3, -2)$, de manera similar, se obtiene el conjunto solución de la desigualdad $-\left(\frac{x-1}{x+2}\right) > 4$, dando como solución el intervalo $\left(-2, -\frac{7}{5}\right)$; la unión de las soluciones obtenidas da origen al conjunto solución de la desigualdad original, por consiguiente la solución es:

$$(-3, -2) \cup \left(-2, -\frac{7}{5}\right)$$

3 Resuelve la desigualdad $|x + 1| \geq |1 - 2x|$.

Solución

Una forma de resolver el ejercicio es elevar al cuadrado ambos miembros,

$$(|x+1|)^2 \geq (|1-2x|)^2 \rightarrow (x + 1)^2 \geq (1 - 2x)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 \geq 1 - 4x + 4x^2$$
$$0 \geq 1 - 4x + 4x^2 - x^2 - 2x - 1$$
$$0 \geq 3x^2 - 6x$$

o bien, $3x^2 - 6x \leq 0$

factorizar, $3x(x - 2) \leq 0$

Los valores con factores iguales a cero son: $x = 0$ y $x = 2$, por consiguiente, los intervalos se definen como: $(-\infty, 0]$, $[0, 2]$ y $[2, \infty)$

Tabla de signos

Intervalo	$(-\infty, 0]$	$[0, 2]$	$[2, \infty)$
Signo de $3x$	–	+	+
Signo de $x - 2$	–	–	+
Signo de $3x(x - 2)$	$(-)(-) = +$	$(+)(-) = -$	$(+)(+) = +$

El intervalo de solución es $[0, 2]$

EJERCICIO 137

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

1. $|x| \geq 7$
2. $|x| < 7$
3. $|x - 5| > 4$
4. $|5x - 3| \leq 12$
5. $|8 - 2x| > 2$
6. $|7x - 1| < 0$
7. $|2x - 1| \leq 19$
8. $\left|6 - \frac{3}{4}x\right| > 9$
9. $\left|\frac{5}{4}(x - 10)\right| \leq 10$
10. $\left|\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{8}$
11. $|x - 1| < 2x$
12. $|2x + 3| \geq x + 3$
13. $|2 - 2x| \leq x - 4$
14. $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| < 1$
15. $\left|\frac{x+4}{x}\right| > 2$
16. $|x| \leq |x - 1|$
17. $|3x - 4| > |x + 4|$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Gráfica de una desigualdad lineal con dos variables

Una desigualdad lineal que tiene la forma:

a) $y < mx + b$ no incluye a la recta

b) $y \leq mx + b$ incluye a la recta

c) $y > mx + b$ no incluye a la recta

d) $y \geq mx + b$ incluye a la recta

En una desigualdad lineal de dos variables, el conjunto solución es la región que se forma por el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la desigualdad.

EJEMPLOS

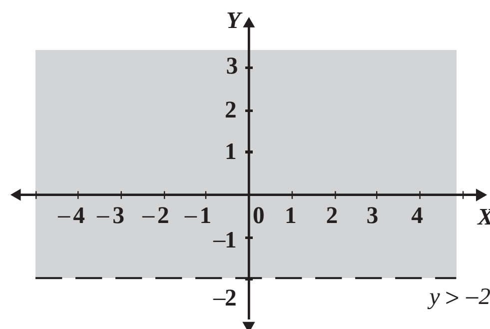
Ejemplos

1 Determina la gráfica del conjunto solución de $y > -2$.

Solución

Primero, se grafica la recta $y = -2$, con una línea punteada, ya que el signo de la desigualdad representa un intervalo abierto.

Luego se sombrea la región que contiene a todos los puntos de ordenada estrictamente mayores que -2, en este caso son todos los puntos que se encuentran por arriba de la recta punteada.

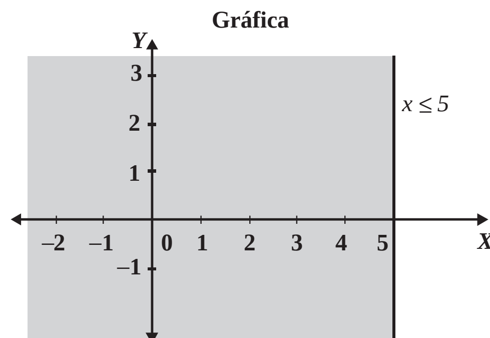


2 Encuentra la región del conjunto solución de $x \leq 5$.

Solución

Se grafica la recta $x = 5$, el signo de la desigualdad indica que la línea es continua.

El conjunto solución son los puntos del plano cuyas abscisas son menores o iguales a 5.



3 Determina la gráfica del conjunto solución de $y > x + 2$.

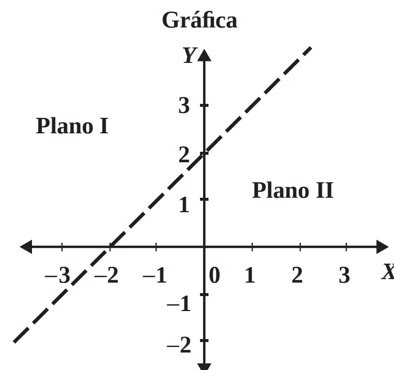
Solución

Se grafica $y = x + 2$; ésta se representa con una recta punteada, ya que el signo representa intervalo abierto, la recta divide al plano cartesiano en 2 planos.

Para determinar la región solución del sistema, se sustituye un punto perteneciente a una de las regiones y se verifica que cumpla con la desigualdad. Por ejemplo, el punto: (–1, 4)

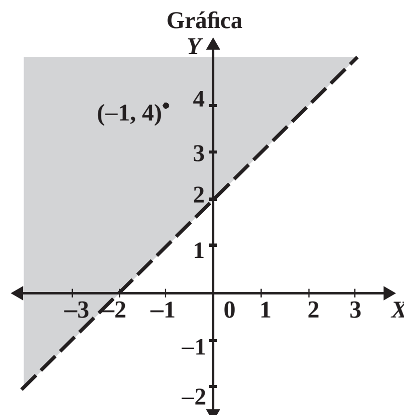
$$y > x + 2$$
$$4 > -1 + 2$$
$$4 > 1$$

El punto sí satisface la desigualdad.



La región que es la solución de la desigualdad, es el conjunto de puntos que están en la región por arriba de la recta punteada, es decir, el conjunto de puntos que se encuentran en el plano I.

Por el contrario, si el punto elegido no satisface la desigualdad, la región que representa el conjunto solución será el plano contrario al punto.



EJERCICIO 138

Grafica las siguientes desigualdades lineales:

1. $y > 6$	4. $y < 3$	7. $x < -3$	10. $3x - 2y \leq 0$
2. $y \leq -5$	5. $x > 4$	8. $x \geq 4$	11. $x + y < 1$
3. $y \geq 4$	6. $x \leq -3$	9. $2x - y > 3$	12. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq 1$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de desigualdades lineales con dos variables

El conjunto solución de un sistema de desigualdades es la intersección de las regiones solución de cada desigualdad lineal.

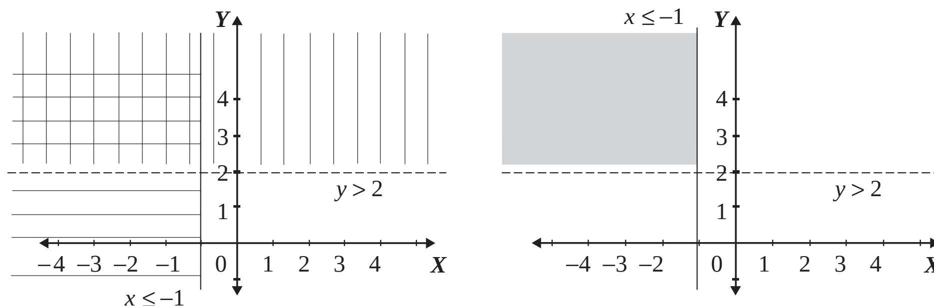
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa gráficamente el conjunto solución del sistema $\begin{cases} y > 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$.

Solución

Se encuentra la región solución de cada desigualdad. La solución es el conjunto de todos los puntos que se encuentren en la intersección de las regiones.



2 Determina gráficamente el conjunto solución del sistema $\begin{cases} y \geq x - 2 \\ x + y - 1 < 0 \end{cases}$.

Solución

El sistema tiene la forma:

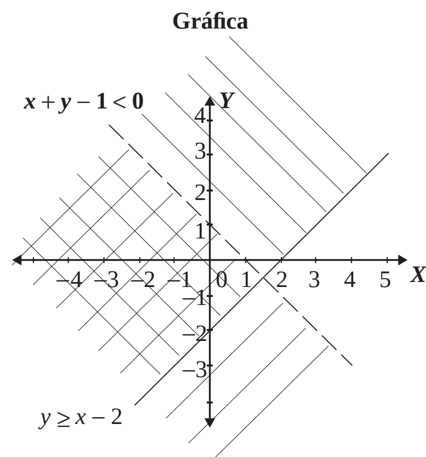
$$y \geq x - 2$$

$$y < 1 - x$$

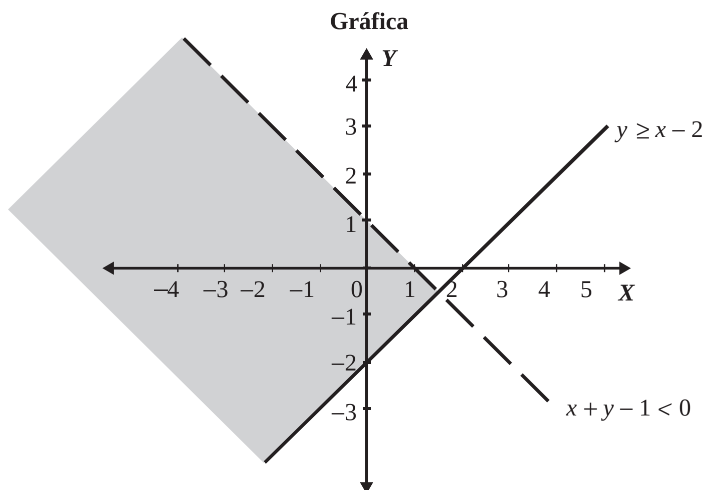
Se grafica la recta $y = x - 2$, con línea continua ya que el signo de la desigualdad indica intervalo cerrado; luego, se grafica la recta $y = 1 - x$, con una línea punteada, ya que el signo de la desigualdad indica intervalo abierto.

Se grafica la región solución de cada desigualdad y la intersección de las regiones son todos los puntos que satisfacen el conjunto solución del sistema.

Gráfica



Finalmente, la gráfica que representa a la región que contiene el conjunto de todos los pares ordenados es:



EJERCICIO 139

Determina la región que es solución de los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} y>2 \\ x\leq 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y<-3 \\ x<4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2<x<2 \\ y\geq 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -1\leq y\leq 4 \\ 0< x<3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y>3 \\ x-y\leq 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-3y>9 \\ y<3x-10 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+y\leq 1 \\ x-y>2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y>0 \\ x-3y<0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x<y \\ x+y\leq 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y<x-4 \\ y\leq 1-x \end{cases}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 25

LOGARITMOS

Reseña HISTÓRICA



John Napier

El término logaritmo lo acuñó el matemático escocés John Napier, a partir de los términos griegos *lógos* (razón) y *arithmós* (número) para designar a la correspondencia, que había descubierto, entre los términos de una progresión aritmética y otra geométrica. Al principio los llamó "números artificiales", pero luego cambió de opinión.

Al logaritmo que tiene por base el número **e** se le llama, en su honor, neperiano.

Pero fue el inglés Henry Briggs, un amigo de Napier, quien comenzó a usar los logaritmos con base 10. Briggs escribió acerca de su nuevo descubrimiento: "Los logaritmos son números que se descubrieron para facilitar la solución de los problemas aritméticos y geométricos, con su empleo se evitan todas las complejas multiplicaciones y divisiones, y se transforman en algo completamente simple, a través de la sustitución de la multiplicación por la adición y la división por la sustracción. Además, el cálculo de las raíces también se realiza con gran facilidad".

John Napier (1550-1617)

Definición

El $\log_b N = a$, es el exponente a, al que se eleva la base b para obtener el argumento N.

$$\log_b N = a \iff N = b^a$$

Con N y b números reales positivos y b diferente de 1

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Emplea la definición de logaritmo para transformar las siguientes expresiones a su forma exponencial:

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
1. $\log_3 243 = 5$	$243 = 3^5$
2. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = 6$	$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$
3. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
4. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

2 Transforma las siguientes expresiones exponenciales en expresiones logarítmicas:

Forma exponencial	**Forma logarítmica**
1. $N = \left(\sqrt{2}\right)^3$	$\log_{\sqrt{2}} N = 3$
2. $\frac{1}{125} = 5^{-3}$	$\log_5 \frac{1}{125} = -3$
3. $\left(\sqrt{5}\right)^4 = 25$	$\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$
4. $x^p = y$	$\log_x y = p$

EJERCICIO 140

Convierte a su forma exponencial los siguientes logaritmos:

1. $\log_2 8 = 3$
2. $\log_x 16 = 4$
3. $\log_3 81 = 4$
4. $\log_6 \frac{1}{36} = -2$
5. $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$
6. $\log_7 343 = x$
7. $\log_a \sqrt{6} = \frac{1}{2}$
8. $\log_3 (x-1) = 2$
9. $\log_w 625 = 4$
10. $\log_{(x-1)} 128 = 7$
11. $\log_{3x} 243 = 5$
12. $\log_{(2x-1)} 256 = 8$

Transforma a su forma logarítmica las siguientes expresiones:

13. $17^2 = a$
14. $625 = 5^4$
15. $64^{\frac{1}{3}} = 4$
16. $\frac{1}{16} = N^2$
17. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
18. $(x+3) = 2^4$
19. $2^x = 256$
20. $(x-2)^3 = 8$
21. $x^w = z$
22. $\frac{1}{81} = 3^{-4}$
23. $5^{-3x} = 125$
24. $441 = (3x+2)^2$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicación de la definición de logaritmo

En los siguientes ejemplos se aplica la definición de logaritmo para encontrar el valor de la incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de a en la expresión: $\log_a 216 = 3$.

Solución

Se escribe el logaritmo en su forma exponencial y se despeja la incógnita:

$$\log_a 216 = 3 \quad \rightarrow \quad 216 = a^3 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{216} = a \quad \rightarrow \quad 6 = a$$

Por consiguiente, el resultado es: $a = 6$

2 Encuentra el valor de m en $\log_{\sqrt{2}} m = 3$.

Solución

Se transforma a su forma exponencial la expresión y se desarrolla el exponente:

$$\log_{\sqrt{2}} m = 3 \quad \rightarrow \quad m = \left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Por tanto, el resultado es: $m = 2\sqrt{2}$

3 Determina el valor de x en la expresión: $\log_3 \frac{1}{729} = x$.

Solución

La expresión se transforma a la forma exponencial.

$$\log_3 \frac{1}{729} = x \quad \rightarrow \quad 3^x = \frac{1}{729}$$

El número 729 se descompone en factores primos y la ecuación se expresa como:

$$3^x = \frac{1}{729} \rightarrow 3^x = \frac{1}{3^6} \rightarrow 3^x = 3^{-6}$$

De la última igualdad se obtiene: $x = -6$

EJERCICIO 141

Encuentra el valor de las incógnitas en las siguientes expresiones:

1. $\log_x 25 = 2$
2. $\log_x 64 = 3$
3. $\log_y 81 = 4$
4. $\log_b 3\,125 = -5$
5. $\log_x 32 = \frac{5}{2}$
6. $\log_a 49 = \frac{2}{3}$
7. $\log_3 x = 4$
8. $\log_2 m = 3$
9. $\log_{0.5} y = 5$
10. $\log_4 N = \frac{3}{2}$
11. $\log_{27} w = \frac{1}{3}$
12. $\log_{\frac{3}{2}} x = -2$
13. $\log_{32} b = 0.2$
14. $\log_8 x = 0.333...$
15. $\log_6 216 = x$
16. $\log_{32} \frac{1}{4} = a$
17. $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = x$
18. $\log_{16} 0.5 = y$
19. $\log_{\frac{1}{8}} 512 = x$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Propiedades

Para cualquier $M, N, b > 0$ y $b \neq 0$, se cumple que:

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b M^n = n \log_b M$
4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$
5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$
6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$
7. $\log_e M = \ln M$, ln = logaritmo natural y $e = 2.718281...$

Importante: las siguientes expresiones no son igualdades.

$$\log_b(M+N) \neq \log_b M + \log_b N \qquad \log_b\left(\frac{M}{N}\right) \neq \frac{\log_b M}{\log_b N}$$

Demostraciones de las propiedades de los logaritmos:

1. $\log_b 1 = 0$

Demostración:
Sea $\log_b 1 = a,$ esta expresión se transforma a su forma exponencial:

$$\log_b 1 = a \quad \rightarrow \quad 1 = b^a$$

Para que $b^a = 1$, se debe cumplir que $a = 0$, entonces, al sustituir este resultado se determina que:

$$\log_b 1 = a = 0$$

2. $\log_b b = 1$

Demostración:
Sea $\log_b b = a,$ se aplica la definición de logaritmo y la expresión exponencial es la siguiente:

$$\log_b b = a \quad \rightarrow \quad b = b^a$$

Pero $b = b^1$, por consiguiente $b^1 = b^a$ y $a = 1$
Al sustituir este resultado se obtiene: $\log_b b = a = 1$

3. $\log_b M^n = n\log_b M$

Demostración:
Sea $x = \log_b M,$ su forma exponencial es $b^x = M,$ al elevar esta expresión a la enésima potencia se determina que:

$$(b^x)^n = M^n \quad \rightarrow \quad b^{nx} = M^n$$

La forma logarítmica de esta expresión: $\log_b M^n = nx$
Se sustituye $x = \log_b M,$ y se obtiene: $\log_b M^n = n \log_b M$

4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$

Demostración:

Sea $x = \log_b M$, su forma exponencial es $b^x = M$, se extrae la raíz enésima en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt[n]{b^x} = \sqrt[n]{M}$$

El primer miembro de esta igualdad se expresa como: $b^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{M}$

Ahora esta nueva igualdad se transforma a su forma logarítmica: $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{x}{n}$

Se sustituye $x = \log_b M$, y se determina que: $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$

5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

Demostración:
Sea $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$, ésta es la forma exponencial de ambas expresiones:

$$b^x = M \ ; \ b^y = N$$

Al multiplicar estas expresiones se obtiene: $\left(b^x\right)\left(b^y\right) = MN \quad \rightarrow \quad b^{x+y} = MN$
Se transforma a su forma logarítmica: $\log_b MN = x + y$
Se sustituye $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$, éste es el resultado:

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

Demostración:
Sea $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$, ésta es su forma exponencial:

$$b^x = M \ ; \ b^y = N$$

Se divide la primera expresión entre la segunda:

$$\frac{b^x}{b^y} = \frac{M}{N} \quad \rightarrow \quad b^{x-y} = \frac{M}{N}$$

Además se transforma a su forma logarítmica la última expresión:

$$\log_b \frac{M}{N} = x - y$$

Al final se sustituye $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$ y resulta que:

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

Aplicación de las propiedades para el desarrollo de expresiones

El logaritmo de una expresión algebraica se representa de forma distinta mediante sus propiedades y viceversa; una expresión que contiene varios logaritmos se transforma a otra que contenga un solo argumento.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Con la aplicación de las propiedades de los logaritmos desarrolla esta expresión: $\log_3 x^{12}$.

Solución

La base x se encuentra afectada por el exponente 12, por tanto se aplica la propiedad 3 y se obtiene:

$$\log_3 x^{12} = 12\log_3 x$$

2 Desarrolla la siguiente expresión: $\log_2 3x^4\sqrt{y}$.

Solución

Se aplica la propiedad para el logaritmo de un producto (propiedad 5):

$$\log_2 3x^4\sqrt{y} = \log_2 3 + \log_2 x^4 + \log_2 \sqrt{y}$$

Se aplican las propiedades 3 y 4 y la expresión queda así:

$$= \log_2 3 + 4\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y$$

3 Desarrolla a su forma más simple la expresión: $\log_y \sqrt[4]{(x-5)^3}$.

Solución

Se aplica la propiedad 4 para el radical:

$$\log_y \sqrt[4]{(x-5)^3} = \frac{1}{4}\log_y (x-5)^3$$

Ahora al aplicar la propiedad 3, se determina que:

$$= \frac{1}{4}\left[3\log_y (x-5)\right] = \frac{3}{4}\log_y (x-5)$$

4 ¿Cuál es el desarrollo de la expresión $\log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}$?

Solución

Se aplica la propiedad para la división (propiedad 6):

$$\log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2} = \log_a (x+y)^3 - \log_a (x-y)^2$$

Para obtener la expresión que muestre el desarrollo final se aplica la propiedad 3:

$$= 3\log_a (x+y) - 2\log_a (x-y)$$

5 Desarrolla la siguiente expresión: $\ln\left[\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]^3$.

Solución

Se aplican las propiedades de los logaritmos y se simplifica al máximo, para obtener:

$$\ln\left[\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]^3 = 3\left[\ln\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]$$

Enseguida se aplica la propiedad del cociente y el producto (propiedades 5 y 6).

$$= 3\left[\ln e^{3x} + \ln(x+1) - \ln 2x^2\right]$$

En el sustraendo se aplica nuevamente la propiedad del producto, y resulta que:

$$= 3\left[\ln e^{3x} + \ln(x+1) - (\ln 2 + \ln x^2)\right]$$

Finalmente, se aplica la propiedad del exponente y se eliminan los signos de agrupación:

$$= 3\left[3x\ln e + \ln(x+1) - \ln 2 - 2\ln x\right] = 9x + 3\ln(x+1) - 3\ln 2 - 6\ln x$$

6 Desarrolla la siguiente expresión: $\log\sqrt[3]{\dfrac{3x^4}{2y^5}}$.

Solución

Se aplica la propiedad para la raíz de un número (propiedad 4):

$$\log\sqrt[3]{\frac{3x^4}{2y^5}} = \frac{1}{3}\log\frac{3x^4}{2y^5}$$

Después se aplica la propiedad para el logaritmo de un cociente (propiedad 6):

$$= \frac{1}{3}\left(\log 3x^4 - \log 2y^5\right)$$

Al aplicar la propiedad para el logaritmo de una multiplicación se obtiene:

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\log 3 + \log x^4\right) - \left(\log 2 + \log y^5\right)\right]$$

Se aplica también la propiedad 3 para exponentes:

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\log 3 + 4\log x\right) - \left(\log 2 + 5\log y\right)\right]$$

Se cancelan los signos de agrupación y éste es el desarrollo de la expresión:

$$= \frac{1}{3}\left[\log 3 + 4\log x - \log 2 - 5\log y\right]$$

$$= \frac{1}{3}\log 3 + \frac{4}{3}\log x - \frac{1}{3}\log 2 - \frac{5}{3}\log y$$

7 Escribe como logaritmo la siguiente expresión: $\log x + \log y - \log z$.

Solución

La suma de 2 logaritmos de igual base, se expresa como el logaritmo del producto de los argumentos:

$$\log x + \log y - \log z = \log xy - \log z$$

La diferencia de logaritmos de igual base, se expresa como el logaritmo del cociente de los argumentos:

$$\log xy - \log z = \log \frac{xy}{z}$$

Por tanto:

$$\log x + \log y - \log z = \log \frac{xy}{z}$$

8 Expresa como logaritmo: $2 + 3\log_a(a+1) - \dfrac{1}{4}\log_a(a-1)$.

Solución

Se sabe que $\log_a a = 1$, entonces:

$$2 + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1) = 2\log_a a + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1)$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Los coeficientes representan los exponentes de los argumentos:

$$= \log_a a^2 + \log_a (a+1)^3 - \log_a (a-1)^{\frac{1}{4}}$$

Se aplican las propiedades de los logaritmos para la suma y diferencia:

$$= \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{(a-1)^{\frac{1}{4}}} = \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{\sqrt[4]{a-1}}$$

Por consiguiente:

$$2 + 3\log_a (a+1) - \frac{1}{4}\log_a (a-1) = \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{\sqrt[4]{a-1}}$$

9 Escribe como logaritmo la siguiente expresión: $\frac{1}{3}\log(x+1) + \frac{1}{3}\log(x-2) - 2\log x - 3\log(x+3)$.

Solución

Al aplicar las propiedades de los logaritmos y simplificar se obtiene:

$$= \log(x+1)^{\frac{1}{3}} + \log(x-1)^{\frac{1}{3}} - \log x^2 - \log(x+3)^3$$

$$= \log(x+1)^{\frac{1}{3}} + \log(x-1)^{\frac{1}{3}} - \left[\log x^2 + \log(x+3)^3\right]$$

$$= \log(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} - \log x^2(x+3)^3$$

$$= \log\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x^2(x+3)^3} = \log\frac{\left((x+1)(x-1)\right)^{\frac{1}{3}}}{x^2(x+3)^3}$$

$$= \log\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2(x+3)^3}$$

10 Expresa como logaritmo: $x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1)$.

Solución

Se sabe que $\ln e = 1$, entonces:

$$x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1) = (x-3)\ln e + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}(x+1)$$

Al aplicar las propiedades de los logaritmos, se tiene que:

$$\ln e^{(x-3)} + \ln(x-2)^{\frac{2}{3}} - \ln(x+1)^{\frac{1}{3}} = \ln\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}e^{(x-3)}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}} = \ln\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2e^{3(x-3)}}{x+1}}$$

Por consiguiente:

$$x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1) = \ln\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2e^{3(x-3)}}{x+1}}$$

EJERCICIO 142

Utiliza las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:

1. $\log_a 7^4$
2. $\log_6 3^{-\frac{3}{2}}$
3. $\log_e \sqrt[3]{e^7 x}$
4. $\log 5xy^2$
5. $\log_3 x^3y^2z$
6. $\ln\left(3e^4x^2\right)^2$
7. $\log\,(x+y)^3(x-z)$
8. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{7}{x^2}$
9. $\ln \dfrac{xy^2}{e^3z^4}$
10. $\log_5 \dfrac{3x^3(1-2x)^6}{2x^y\left(x^2-y^2\right)}$
11. $\log_4 \sqrt{3x^2y^4}$
12. $\log \sqrt{(x+y)^4 z^5}$
13. $\log \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$
14. $\log \dfrac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt[3]{c^2d}}$
15. $\log_2 \dfrac{\sqrt{x+y}}{(x-y)^4}$
16. $\log \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x-3(x+z)^2}}$
17. $\log \sqrt{\dfrac{(x+3)(y-5)}{(x+6)^4\sqrt{y-2}}}$
18. $\ln \sqrt[3]{\dfrac{e^2\sqrt{(x+1)^4(x-1)^3}}{e^x\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^4}}}$

Aplica las propiedades de los logaritmos para expresar los siguientes logaritmos como el logaritmo de un solo argumento:

19. $2\ln 5 + 2\ln x$
20. $3\log m - 2\log n$
21. $\dfrac{1}{2}\log_7 x + \dfrac{1}{3}\log_7 y$
22. $\ln 8 + 4x$
23. $\dfrac{2}{5}\log m + 4\log n$
24. $2x + \log_2 3$
25. $-\dfrac{2}{3}\log_b(x+1) - \dfrac{1}{4}\log_b(x+2)$
26. $\log 3 + \log y - \log x$
27. $\log_2 x - \log_2 y - \log_2 z$
28. $1 - \log_4(m-1) - \log_4(m+1)$
29. $\dfrac{1}{8}\log x + \dfrac{1}{3}\log y - \dfrac{1}{4}\log z$
30. $\ln 5 + 1 + \ln y - 7\ln x$
31. $2 - x + 3\ln(x+y) - 3\ln(x-y)$
32. $\dfrac{2}{3}\log(x-2) - \dfrac{4}{5}\log(x+2) + 2\log(x+1)$
33. $\dfrac{1}{2} + 7\log_2 x - \dfrac{3}{2}\log_2 y$
34. $\dfrac{1}{3}\log(x+1) + \dfrac{1}{2}\log(x-1) - \dfrac{1}{6}\log x - 1$
35. $x^2 + x + 1 - 2\log x + 3\log(x+1)$
36. $2\ln 9 + 4\ln m + 2\ln p - 2\ln 7 - 2\ln x - 6\ln y$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones logarítmicas

En estas ecuaciones las incógnitas se encuentran afectadas por logaritmos, su solución se obtiene al aplicar las propiedades y la definición de logaritmo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación: $\log_5(2x+1)=2$.

Solución

Al aplicar la definición de logaritmo, la expresión $\log_5(2x+1)=2$ se convierte en:

$$2x+1=5^2$$

Ahora al resolver esta ecuación, se obtiene:

$$2x+1=5^2 \quad\rightarrow\quad \begin{aligned}2x+1&=25\\2x&=24\\x&=12\end{aligned}$$

2 ¿Cuáles son los valores de x que satisfacen la ecuación $\log(x+2)+\log(x-1)=1$?

Solución

Se aplica la propiedad 5 para expresarla en término de un solo logaritmo:

$$\log(x+2)+\log(x-1)=1 \quad\rightarrow\quad \log(x+2)(x-1)=1 \quad\rightarrow\quad \log\left(x^2+x-2\right)=1$$

Se aplica la definición de logaritmo y se resuelve factorizando la ecuación que resulta:

$$\log\left(x^2+x-2\right)=1 \quad\rightarrow\quad \begin{aligned}x^2+x-2&=10^1\\x^2+x-2-10&=0\\x^2+x-12&=0\\(x+4)(x-3)&=0\\x+4=0 \quad \text{y} \quad x-3&=0\end{aligned}$$

Por consiguiente, los valores que satisfacen las igualdades son: $x=-4$ y $x=3$, y el valor que satisface la ecuación es $x=3$

3 Resuelve: $\log_3(4x-5)=\log_3(2x+1)$.

Solución

Se agrupan los logaritmos en el primer miembro de la igualdad y se aplica la propiedad 6:

$$\log_3(4x-5)=\log_3(2x+1) \quad\rightarrow\quad \log_3(4x-5)-\log_3(2x+1)=0 \quad\rightarrow\quad \log_3\frac{4x-5}{2x+1}=0$$

Se aplica la definición de logaritmo y se resuelve la ecuación que resulta:

$$\frac{4x-5}{2x+1}=3^0 \quad\rightarrow\quad \frac{4x-5}{2x+1}=1 \quad\rightarrow\quad \begin{aligned}4x-5&=2x+1\\2x&=6\\x&=3\end{aligned}$$

4 Resuelve la ecuación: $\log_2\sqrt{3x-1}=1-\log_2\sqrt{x+1}$.

Solución

Se agrupan los logaritmos en un solo miembro de la igualdad:

$$\log_2\sqrt{3x-1}+\log_2\sqrt{x+1}=1$$

Se aplica la propiedad 5 para expresar la suma de logaritmos como el logaritmo de un producto:

$$\log_2\left(\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)=1$$

Se transforma la expresión a su forma exponencial y se multiplican los factores:

$$\left(\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)=2^1 \quad\rightarrow\quad \sqrt{3x^2+2x-1}=2$$

Para eliminar la raíz se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{3x^2+2x-1}\right)^2=(2)^2 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-1=4$$

Se resuelve la ecuación resultante:

$$3x^2+2x-1=4 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-1-4=0 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-5=0$$

$$3x^2+5x-3x-5=0$$

$$x(3x+5)-1(3x+5)=0$$

$$(3x+5)(x-1)=0$$

$$x=-\frac{5}{3},\ x=1$$

Por consiguiente, los valores de la incógnita son: $-\frac{5}{3}$ y 1 , el valor que satisface la ecuación logarítmica es $x = 1$

5 Resuelve la ecuación: $\ln(x+5)=2+\ln x$.

Solución

Los logaritmos se colocan de un solo lado de la igualdad:

$$\ln(x+5)-\ln x=2$$

Se aplica la propiedad de división de argumentos:

$$\ln\frac{x+5}{x}=2$$

Se transforma a su forma exponencial y se resuelve la ecuación resultante:

$$e^2=\frac{x+5}{x} \qquad xe^2=x+5 \qquad xe^2-x=5$$

$$x(e^2-1)=5$$

$$x=\frac{5}{e^2-1}$$

EJERCICIO 143

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1. $\log_2(x+3)=2$
2. $\log_4(4-3x)=3$
3. $\log_6(5x-9)^2=4$
4. $\log_4\sqrt{15x+1}=2$
5. $\log\sqrt{x^2+64}=1$
6. $\log_3 81-\log_3(x-4)=2$
7. $\log_7(x+9)+\log_7 49=4$
8. $\log_5 25-\log_5(x+100)=-1$

9. $\log(x+3)^2 = 1 + \log(3x-11)$
10. $\log_3 x + \log_3(2x-3) = 3$
11. $\log(x+2) = -1 + \log(3x-14)^2$
12. $\log_5(4-x)^3 = \log_5(6+x)^3$
13. $\log(2x+10)^2 - \log(1-x) = 2$
14. $\log_8(x-4) + \log_8(x-1) = \log_8 5x - \log_8 3$
15. $\log_6 \sqrt[3]{3x+1} = \log_6 \sqrt[3]{10} + \log_6 \sqrt[3]{x-2}$
16. $\log(8x+4) + \log(7x+16) = \log(x-2)^2 + 2$
17. $\log_2(x-1) - \log_2(3x+1) = 3 - \log_2(6x+2)$
18. $\log_{\sqrt{2}}(x-3) + \log_{\sqrt{2}}(x+2) = 4 + \log_{\sqrt{2}} x$
19. $\log_2(x+1) + \log_2(3x-5) = \log_2(5x-3) + 2$
20. $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x}+1\right) = 1 + \log_{\sqrt{3}}\sqrt{x-1}$
21. $\ln(x+1) = 1 + \ln(x-1)$
22. $\ln x + \ln(x-3e) = \ln 4 + 2$
23. $\ln(x-2) = \ln 12 - \ln(x+2)$
24. $\ln(x-1) - \ln(x-2) = \frac{1}{2}$
25. $\ln(2x-3) - \ln(x+1) = e$
26. $\ln(x^2+x) + \ln e = \ln(x+1)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones que tienen la incógnita en el exponente se llaman ecuaciones exponenciales y su solución se obtiene al aplicar los siguientes métodos:

1. Si el argumento o resultado se puede expresar como potencia de la base, sólo se igualan exponentes.
2. Se aplican las propiedades de los logaritmos para encontrar el valor de la incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de la incógnita en la ecuación: $2^{x+1} = 32$.

Solución

Se expresa a 32 como 2^5, se sustituye en la ecuación:

$$2^{x+1} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{x+1} = 2^5$$

En la ecuación resultante las bases son iguales, entonces, también los exponentes:

$$x + 1 = 5$$

Al resolver esta ecuación, se determina que: $x = 4$

2 Obtén el valor de la incógnita en la ecuación: $9^{x-1} = 81^x$.

Solución

El resultado 81^x se expresa como 9^{2x}, al sustituir la equivalencia:

$$9^{x-1} = 81^x \quad \rightarrow \quad 9^{x-1} = 9^{2x}$$

Para que la igualdad se cumpla, tanto bases como exponentes deben ser iguales, entonces:

$$x - 1 = 2x$$

Se resuelve la ecuación y resulta que: $x = -1$

3 Resuelve la siguiente ecuación: $4^{x-2} = 8^{1-x}$.

Solución

Ambas bases se descomponen en sus factores primos y la ecuación se expresa como:

$$4^{x-2} = 8^{1-x} \quad \rightarrow \quad (2^2)^{x-2} = (2^3)^{1-x} \quad \rightarrow \quad 2^{2(x-2)} = 2^{3(1-x)}$$

Se eliminan las bases y se igualan los exponentes, para obtener la ecuación:

$$2(x-2) = 3(1-x)$$

Finalmente se resuelve la ecuación y se determina el valor de la incógnita:

$$\begin{aligned} 2(x-2) &= 3(1-x) \\ 2x-4 &= 3-3x \\ 2x+3x &= 3+4 \\ 5x &= 7 \\ x &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Otra forma de resolver una ecuación exponencial es aplicar logaritmos, como ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación: $5^x = 625^2$.

Solución

Se aplican logaritmos a los dos miembros de la igualdad:

$$\log 5^x = \log 625^2$$

Se aplica la propiedad 3 para despejar a x y se efectúan las operaciones:

$$x \log 5 = 2 \log 625$$

$$x = \frac{2 \log 625}{\log 5} = \frac{2(2.7959)}{0.6989} = 8$$

Por tanto, $x = 8$

2 ¿Cuál es el valor de la incógnita en la siguiente ecuación: $3^{2x-1} = 7$?

Solución

Se aplican logaritmos en ambos miembros de la igualdad,

$$\log 3^{2x-1} = \log 7$$

Se aplica la propiedad 3, se despeja x y se obtiene como resultado:

$$(2x-1)\log 3 = \log 7 \rightarrow 2x-1 = \frac{\log 7}{\log 3}$$

$$x = \frac{\frac{\log 7}{\log 3}+1}{2} = 1.3856$$

3 ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $3^{2x} - 5(3^x) + 6 = 0$?

Solución

Esta ecuación se expresa como una ecuación de segundo grado, de la forma:

$$(3^x)^2 - 5(3^x) + 6 = 0$$

Se factoriza y se resuelven las ecuaciones resultantes:

$$\left(3^x - 3\right)\left(3^x - 2\right) = 0$$

$$3^x - 3 = 0 \qquad\qquad 3^x - 2 = 0$$
$$3^x = 3 \qquad\qquad 3^x = 2$$
$$\log 3^x = \log 3 \qquad\qquad \log 3^x = \log 2$$
$$x \log 3 = \log 3 \qquad\qquad x \log 3 = \log 2$$
$$x = \frac{\log 3}{\log 3} = \frac{0.4771}{0.4771} = 1 \qquad\qquad x = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0.3010}{0.4771} = 0.6309$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son: 1 y 0.6309

4 Resuelve la ecuación: $\dfrac{e^{2y}+4}{e^{2y}} = 3$.

Solución

La ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$e^{2y} + 4 = 3e^{2y}$$

Se despeja el término e^{2y}:

$$e^{2y} - 3e^{2y} = -4 \qquad\qquad -2e^{2y} = -4$$
$$e^{2y} = 2$$

En ambos miembros de la igualdad se aplica el logaritmo natural y se obtiene:

$$\ln e^{2y} = \ln 2 \qquad 2y \ln e = \ln 2 \qquad 2y(1) = \ln 2$$
$$2y = \ln 2$$
$$y = \frac{1}{2}\ln 2$$
$$y = \ln\sqrt{2}$$

EJERCICIO 144

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $5^x = 625$
2. $3^x = 8$
3. $9^{2x} = 9^0$
4. $64^x = 8$
5. $(2.37)^x = 2.83$
6. $(2.4)^x = 5.76$
7. $5^{x-1} = 25$
8. $7^{3x-3} = 343$
9. $3^{2x+3} = 3$
10. $4^{x+1} = 16^{x-1}$
11. $5^{2x-3} = 4$
12. $3^x = 0.15$
13. $(0.125)^x = 128$
14. $2^{3x+1} = 256$
15. $5^x = 625^{3+x}$
16. $49^{1-2x} = 7^x$
17. $25^{x-2} = 5^{1-x}$
18. $3^x = 243^{x-2}$
19. $2^{-(x+3)} = 32^x$
20. $3^{x^2} = 729$
21. $2^{x^2-2x} = 8$

22. $25^x + 5^{x+1} = 750$

23. $6^{2x+5} - 36 = 0$

24. $4^{x^2+3x} = \frac{1}{16}$

25. $7(3)^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

26. $\log_2\left(9^{x-1}+7\right) = \log_2\left(3^{x-1}+1\right)^2$

27. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = \sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

28. $12^{x^2-2x+3} = 1\,728$

29. $5\left(7^{2x-1}\right) = 7\left(5^{x+2}\right)$

30. $2^{-2x} + 2^{-x} = 2$

31. $\frac{e^y - 1}{2 - 3e^y} = \frac{2}{7}$

32. $e^{2x} - e^{x+2} = e^{x+1} - e^3$

33. $\frac{4e^{3x} - 5}{e^{3x} - 1} = 3$

34. $\frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{3}{e^x + 2} = \frac{6}{e^{2x} - 4}$

35. $e^{2x} + 2\sqrt{e^{2x+1}} = 1 - e$

36. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{3}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los logaritmos son una herramienta excelente para la solución de problemas propios de las ciencias, a continuación se ejemplifica su uso:

Química

En química los logaritmos se emplean para calcular la acidez de las soluciones.

$$pH = -\log\left[H^+\right]$$

Donde:

pH = acidez de una solución.

$\left[H^+\right]$ = concentración de iones de hidrógeno en iones-gramo equivalente por litro.

1 Determina el pH de una solución, que tiene una concentración de iones de hidrógeno de 10^{-8} iones-g/lt.

Solución

La concentración de iones de hidrógeno en la solución es de:

$$\left[H^+\right] = 10^{-8} \text{ iones-g/l}$$

Se sustituye este valor en la fórmula y se obtiene:

$$pH = -\log\left[H^+\right]$$
$$pH = -\log\left[10^{-8}\right] \text{ se aplica la propiedad 3}$$
$$pH = -(-8)\log[10] = (8)(1)$$
$$pH = 8$$

2 Encuentra la concentración de iones de hidrógeno de una solución, si su pH es de 7.

Solución

Se sustituye pH = 7 en la fórmula y se despeja $\left[H^+\right]$

$$pH = -\log\left[H^+\right]$$
$$7 = -\log\left[H^+\right]$$
$$-7 = \log\left[H^+\right]$$
$$\text{antilog}(-7) = \left[H^+\right]$$

Por consiguiente, la concentración de iones de hidrógeno de una solución es:

$$\left[H^+\right] = 10^{-7} \text{ iones-g/l}$$

Sismología

En sismología los logaritmos se emplean para calcular la intensidad de un sismo por medio del siguiente modelo matemático:

$$I_R = \log \frac{A}{t}$$

Donde:

I_R = intensidad del sismo (escala Richter)
A = amplitud (micrómetros)
t = periodo (tiempo en segundos que dura una oscilación)

3 ¿Cuál es la intensidad de un sismo en la escala Richter si su amplitud es de 8 000 micrómetros y su periodo de 0.09 segundos?

Solución

Se sustituye A = 8 000 micrómetros y P = 0.09 segundos en la fórmula:

$$I_R = \log \frac{A}{t} \qquad I_R = \log \frac{8\,000}{0.09}$$
$$= \log (88\,888.89)$$
$$= 4.95$$

Por tanto, el sismo tiene una intensidad de 4.95 grados en la escala Richter.

4 Un sismo tiene una intensidad de 5.7 grados en la escala Richter, si la amplitud del movimiento es de 9 021.37 micrómetros, ¿cuál es su periodo?

Solución

Se despeja la amplitud de la fórmula:

$$I_R = \log \frac{A}{t} \quad \rightarrow \quad \text{antilog} I_R = \frac{A}{t}$$
$$t = \frac{A}{\text{antilog} I_R}$$

Se sustituye en esta última fórmula $I_R = 5.7$ y A = 9 021.37 micrómetros:

$$t = \frac{9\,021.37}{\text{antilog}5.7}$$
$$= \frac{9\,021.37}{501\,187.23} = 0.0179$$

Por consiguiente, el periodo de una oscilación es de 0.0179 segundos.

Decaimiento radiactivo

Otra aplicación de los logaritmos se lleva a cabo en el decaimiento radiactivo. El decaimiento radiactivo de un material está dado por la fórmula:

$$C = C_0 (2)^{-\frac{t}{n}}$$

Donde:

C = cantidad de material radiactivo después de cierto tiempo
t = antigüedad del material
C_0 = cantidad presente cuando $t = 0$
n = vida media del material

5 El tiempo de vida media de un material es de 25 años, ¿cuánto de dicho material queda después de haber transcurrido 15 años?

Solución

Se sustituye en la fórmula $n = 25$ y $t = 15$ años:

$$C = C_0(2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad C = C_0(2)^{-\frac{15}{25}}$$

$$C = C_0(2)^{-0.6}$$

$$C = C_0(0.659) = 0.659C_0$$

Por consiguiente, queda $0.659C_0$ o 65.9% del material inicial.

6 ¿Cuál es la antigüedad de una figura de madera que tiene la cuarta parte de su contenido original de carbono 14, si la vida media del material es de 5 900 años?

Solución

Con las propiedades de los logaritmos se despeja t:

$$C = C_0(2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad \frac{C}{C_0} = (2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad \log\left(\frac{C}{C_0}\right) = \log(2)^{-\frac{t}{n}}$$

$$\log\left(\frac{C}{C_0}\right) = -\frac{t}{n}\log(2) \quad \rightarrow \quad -\frac{n\log\left(\frac{C}{C_0}\right)}{\log 2} = t$$

Se sustituye $C = \frac{1}{4}C_0$ y $n = 5\,900$ en la última fórmula:

$$t = -\frac{(5\,900)\log\left(\frac{\frac{1}{4}C_0}{C_0}\right)}{\log 2} = -\frac{(5\,900)\log(0.25)}{\log 2} = -\frac{(-3552.15)}{0.3010} = 11\,801.16 \text{ años}$$

Por tanto, la antigüedad de la pieza es de 11 801.16 años.

7 La desintegración de cierta sustancia radiactiva se rige por el modelo matemático:

$$p = p_0 e^{-0.0072t}$$

Donde p_0 es la cantidad inicial de sustancia y t es el tiempo en años. ¿Calcula el tiempo de vida media de la sustancia?

Solución

El tiempo de vida media es el tiempo necesario para que la mitad de la sustancia se desintegre, es decir $p = \frac{1}{2}p_0$, entonces, se despeja t de la fórmula:

$$p = p_0 e^{-0.0072t} \qquad \frac{p}{p_0} = e^{-0.0072t} \qquad \ln\frac{p}{p_0} = \ln e^{-0.0072t}$$

$$\ln\frac{p}{p_0} = -0.0072t\ln e \qquad -\frac{\ln\frac{p}{p_0}}{0.0072} = t$$

Se sustituye $p = \frac{1}{2}p_0$ y se realizan las operaciones:

$$t = -\frac{\ln\frac{p}{p_0}}{0.0072} \qquad t = -\frac{\ln\frac{\frac{1}{2}p_0}{p_0}}{0.0072} = -\frac{\ln 0.5}{0.0072} = 96.27$$

Por consiguiente, el tiempo de vida media de dicha sustancia es de 96.27 años.

Población

El crecimiento de población está determinado por la fórmula:

$$N = N_0\, e^{kt}$$

Donde:

N = número de habitantes de una población en determinado tiempo
N_0 = número de habitantes en una población inicial, cuando $t = 0$
K = constante
t = tiempo

8 El modelo matemático que rige el crecimiento de una población es:

$$N = 3500e^{0.025t}$$

Calcula el número de habitantes que habrá en 20 años.

Solución

Se sustituye el valor de $t = 20$ en la fórmula:

$$N = 3500e^{0.025(20)}$$

$$= 3500e^{0.5} = 5\,770.52$$

Por tanto, en 20 años habrá aproximadamente 5 770 habitantes.

9 El siguiente modelo muestra el crecimiento de una población de insectos:

$$N = 850(3)^{0.094t}$$

Donde N es el número de insectos y t el tiempo en días. ¿En qué tiempo la población será de 10 200 insectos?

Solución

Se despeja t de la fórmula:

$$N = 850(3)^{0.094t} \qquad \frac{N}{850} = (3)^{0.094t} \qquad \ln\frac{N}{850} = 0.094t\ln(3) \qquad \frac{\ln\frac{N}{850}}{0.094\ln(3)} = t$$

Se sustituye $N = 10\,200$ en la última fórmula:

$$t = \frac{\ln\frac{10\,200}{850}}{0.094\ln(3)} = \frac{\ln 12}{0.094\ln(3)} = \frac{2.4849}{0.1032} = 24.07 \text{ días}$$

Por consiguiente, deben transcurrir 24.07 días para que se incremente la población de insectos a 10 200.

10 En un cultivo de laboratorio las bacterias aumentaron de una población inicial de 480 a 1 200 en cinco horas. ¿Cuánto tardará la población en aumentar a 8 000?

Solución

Se determina el valor de k para la población inicial, donde $N_0 = 480$, $N = 1\ 200$, $t = 5$,

$$N = N_0 e^{kt} \quad \rightarrow \quad 1\ 200 = 480\, e^{k(5)} \quad \rightarrow \quad \frac{1200}{480} = e^{5k} \quad \rightarrow \quad e^{5k} = 2.5$$

Se aplica logaritmo natural para despejar k:

$$\ln(e^{5k}) = \ln 2.5 \quad \rightarrow \quad 5k \ln(e) = \ln 2.5 \quad \rightarrow \quad k = \frac{\ln 2.5}{5} = \frac{0.9162}{5} = 0.183$$

Entonces, el modelo matemático se expresa como: $N = N_0 e^{0.183t}$
Se sustituye en la fórmula $N = 8\ 000$ y $N_0 = 480$

$$8\ 000 = 480 e^{(0.183)t}$$

Para despejar t se aplican logaritmos naturales:

$$\frac{8\,000}{480} = e^{0.183t} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{8\,000}{480} = \ln e^{0.183t} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{8\,000}{480} = 0.183t \quad \rightarrow \quad t = \frac{\ln\frac{8\ 000}{480}}{0.183} = 15.37$$

Por tanto, en 15.37 horas o en 15 horas 22 minutos 12 segundos, las bacterias aumentarán de 480 a 8 000

Ley del enfriamiento de Newton

Con esta ley se obtiene la temperatura T de un cuerpo en función del tiempo t; donde T' es la temperatura ambiente, el modelo matemático que la rige es:

$$T = T' + Ce^{kt}$$

Donde:

T' = temperatura del ambiente
T = temperatura del cuerpo después de cierto tiempo, además $T < T'$
C y k = constantes

11 Una barra de metal se extrae de un horno cuya temperatura es de 250 °C. Si la temperatura del ambiente es de 32°C y después de 10 minutos la temperatura de la barra es de 90 °C, ¿cuál es su temperatura después de 30 minutos?

Solución

La temperatura del ambiente es $T' = 32$ °C, la temperatura de la barra al momento de sacarla del horno es de $T = 250$ °C y $t = 0$. Al sustituir estos valores en la ley del enfriamiento de Newton.

$$T = T + Ce^{kt} \qquad 250 = 32 + Ce^{k(0)} \qquad 250 = 32 + C$$

$$250 - 32 = C$$

$$218 = C$$

Se sustituye el valor de $C = 218$ °C en la ley:

$$T = 32 + 218e^{kt}$$

Se sustituye $t = 10$ minutos y $T = 90$ °C en la ley y se despeja $e^{k(10)}$

$$90 = 32 + 218e^{k(10)} \qquad \frac{90 - 32}{218} = e^{k(10)} \qquad 0.2660 = e^{10k}$$

En la última igualdad se aplica logaritmo natural a ambos miembros para despejar a k:

$$\ln 0.2660 = \ln e^{10k} \qquad \ln 0.2660 = 10k \ln e \qquad \frac{\ln 0.2660}{10} = k$$

$$-0.1324 = k$$

Al sustituir este valor se obtiene que la ley del enfriamiento para la barra es:

$$T = 32 + 218e^{-0.1324t}$$

Finalmente, se sustituye $t = 30$ minutos en la fórmula anterior:

$$T = 32 + 218e^{-0.1324(30)} \qquad \begin{aligned} T &= 32 + 218e^{-3.972} \\ &= 32 + 218(0.01883) \\ &= 32 + 4.1049 \\ &= 36.1049\ °C \end{aligned}$$

Por consiguiente, la temperatura de la barra después de 30 minutos es de: 36.1049 °C

EJERCICIO 145

Resuelve los siguientes problemas:

1. Obtén el pH de una solución, cuya concentración es de 1.90×10^{-5} iones de hidrógeno/l.
2. La concentración de una conserva de vinagre de iones de hidrógeno es de 6×10^{-4}. Determina su pH.
3. ¿Cuál es la concentración de iones de hidrógeno de una sustancia, cuyo pH es de 9?
4. Un sismo se presenta con 6 000 micrómetros de amplitud y un periodo de 0.3 segundos. Determina la intensidad del movimiento sísmico en la escala Richter.
5. Encuentra el periodo de un sismo de 90 000 micrómetros con intensidad de 5 grados en la escala Richter.
6. Un sismo tiene un periodo 0.35 segundos de duración y alcanza 4 grados en la escala Richter. ¿Cuál es su amplitud?
7. El tiempo de vida media de un material es de 40 años. ¿Cuánto de dicho material queda después de 30 años?
8. La vida media del tritio es de 12.5 años. ¿Cuánto tardará en desintegrarse 30% de una muestra de este metal?
9. La desintegración de una sustancia radiactiva está dada por el siguiente modelo:

$$V = V_0 e^{-0.005t}$$

Donde V_0 es la cantidad inicial de material y t es el tiempo. ¿Cuál es el tiempo de vida media de dicho material?

10. El modelo que rige el crecimiento poblacional de una ciudad es:

$$N = 15\ 000e^{0.02t}$$

Donde N es el número de habitantes y t el tiempo en años. ¿Cuántos habitantes habrá dentro de 10 años?

11. En un cultivo de laboratorio las bacterias aumentaron de una población inicial de 150 a 830 en 2 horas. ¿Cuánto tardarán en llegar a 3 000?
12. La población actual de ratas en una ciudad es de 40 000; si se duplican cada 8 años, ¿cuándo habrá 500 000 roedores?
13. Del horno de una estufa se saca una rosca, cuya temperatura es de 180 °C. Si la temperatura del ambiente es de 25 °C, y después de 8 minutos la temperatura de la rosca es de 100 °C, ¿cuál es su temperatura después de 15 minutos?

14. La temperatura del ambiente una tarde es de 21 °C. Si se sirve agua para café con una temperatura de 95 °C, y después de 4 minutos la temperatura del agua es de 80 °C, ¿cuál es su temperatura después de 20 minutos?

15. Una barra de aluminio se encuentra a una temperatura de 400 °C y la temperatura ambiental es de 28 °C. Si después de 30 minutos la temperatura de la barra es de 300 °C, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que su temperatura sea de 120 °C?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 26

Progresiones

Reseña HISTÓRICA



Sucesión de Fibonacci

Leonardo de Pisa nació en Italia y fue educado en África del norte. Su obra principal es *Liber Apaci* (*Libro acerca del ábaco*), donde expone la importancia del sistema de numeración indoarábiga. Escrita en 1202 sólo se conserva una versión de 1228, donde aparece un problema sobre el nacimiento de conejos, que da origen a la sucesión de Fibonacci. Por muchos años fue objeto de numerosos estudios que permitieron descubrir muchas de sus propiedades, además de que Kepler la relacionó con la sección áurea y el crecimiento de las plantas.

La sucesión de Fibonacci se define por:

$$f_1 = f_2 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

cuyos primeros términos son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Leonardo de Pisa "Fibonacci"
(1170-1250)

Sucesión infinita

Una sucesión es de la forma:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

donde a_n es el término general y se denota por:

$$a_n = f(n) \text{ o } \{a_n\}$$

Siendo n un número natural, así: a_1 representa el primer término, a_2 el segundo término, a_3 el tercer término, a_{26} el vigésimo sexto término y a_n el n-ésimo término de la sucesión.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La sucesión con n-ésimo término $a_n = \frac{1}{4n}$, con $n \in N$, se escribe como:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \ldots, \frac{1}{4n}, \ldots$$

2 Escribe la sucesión con n-ésimo término $\{3^n\}$.

Solución

Ya que n es natural entonces toma los valores 1, 2, 3, 4,…,

$$a_1 = 3^1 \qquad a_2 = 3^2 \qquad a_3 = 3^3 \qquad a_4 = 3^4 \qquad \ldots \qquad a_n = 3^n$$

Por consiguiente, la sucesión es:

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots, 3^n, \ldots \quad \text{o} \quad 3, 9, 27, 81, \ldots$$

3 Encuentra los términos que conforman la sucesión con término general $a_n = \frac{2n-1}{n}$.

Solución

El término general es:

$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

Para determinar los elementos de la sucesión, se sustituyen los números naturales:

Si $n = 1$, $a_1 = \frac{2(1)-1}{1} = \frac{2-1}{1} = \frac{1}{1} = 1$

Si $n = 2$, $a_2 = \frac{2(2)-1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$

Si $n = 3$, $a_3 = \frac{2(3)-1}{3} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}$

Por tanto, los términos de la sucesión son: $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots, \frac{2n-1}{n}$

4 Determina los 4 primeros términos de $\{(-1)^{n+1} - 2n\}$.

Solución

Se sustituyen los valores de $n = 1, 2, 3, 4$ en el término general:

$$\text{Si } n = 1,\ a_1 = (-1)^{1+1} - 2(1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$\text{Si } n = 2,\ a_2 = (-1)^{2+1} - 2(2) = (-1)^3 - 4 = -1 - 4 = -5$$

$$\text{Si } n = 3,\ a_3 = (-1)^{3+1} - 2(3) = (-1)^4 - 6 = 1 - 6 = -5$$

$$\text{Si } n = 4,\ a_4 = (-1)^{4+1} - 2(4) = (-1)^5 - 8 = -1 - 8 = -9$$

Se concluye que los cuatro primeros términos son:

$$-1, -5, -5, -9$$

5 Determina los 5 primeros términos de la sucesión, si $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 3a_n$.

Solución

De acuerdo con la regla general se tiene que:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 3a_1 = 3(2) = 6$$

$$a_3 = 3a_2 = 3(6) = 18$$

$$a_4 = 3a_3 = 3(18) = 54$$

$$a_5 = 3a_4 = 3(54) = 162$$

Por consiguiente, los 5 primeros términos de la sucesión son:

$$2, 6, 18, 54, 162$$

EJERCICIO 146

Escribe los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:

1. $a_n = \frac{1}{n}$
2. $a_n = 10 - (0.1)^n$
3. $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$
4. $a_n = \frac{2^{n-1}}{n+3}$
5. $a_n = \frac{2n-1}{n!}$
6. $\{(-1)^n n^2\}$
7. $\{(n-1)(n-2)\}$
8. $\left\{(-1)^{2n-1}\frac{n}{n+1}\right\}$
9. $\left\{\frac{n!}{(n-1)!}\right\}$
10. $\left\{(-1)^{n+1}\frac{2n}{n+1}\right\}$
11. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$
12. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{3}{2} - a_n$
13. $a_1 = \frac{2}{3},\ a_{n+1} = a_n - 1$
14. $a_1 = 27,\ a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n$
15. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = na_n$
16. $a_1 = -2,\ a_{n+1} = (a_n)^2$
17. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n}{n}}$
18. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = (-a_n)^{n-1}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma

Dada una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, la suma de los primeros m términos se expresa como:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m$$

donde 1 y m son los valores mínimo y máximo de la variable de la suma j.

Evaluación de una suma. Es el resultado de la suma de los primeros m términos de una sucesión.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma: $\sum_{j=1}^{5} j^2$.

Solución

Se sustituyen los valores 1, 2, 3, 4, 5 en el término general y se realiza la suma:

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

Por tanto, la suma es: 55

2 Encuentra el resultado de la suma: $\sum_{j=3}^{6}(j+2)$.

Solución

Se sustituyen los valores: 3, 4, 5, 6 en el término general, y se suman los resultados parciales para obtener como resultado final:

$$\sum_{j=3}^{6}(j+2) = (3+2)+(4+2)+(5+2)+(6+2) = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$$

3 Determina la suma: $\sum_{j=1}^{7} 3$.

Solución

Debido a que no existe j en la fórmula de sustitución, 3 se suma 7 veces y se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{7} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$$

4 ¿Cuál es el resultado de $\sum_{j=1}^{5}(j+2)(j-3)$?

Solución

Se sustituyen los enteros del 1 al 5:

$$\sum_{j=1}^{5}(j+2)(j-3) = (1+2)(1-3) + (2+2)(2-3) + (3+2)(3-3) + (4+2)(4-3) + (5+2)(5-3)$$

Se realizan las operaciones de los paréntesis y, por último, se efectúa la suma para obtener:

$$\begin{aligned} &= (3)(-2) + (4)(-1) + (5)(0) + (6)(1) + (7)(2) \\ &= -6 - 4 + 0 + 6 + 14 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Por tanto: $\sum_{j=1}^{5}(j+2)(j-3) = 10$

5 Determina el valor de c que cumpla con la siguiente igualdad: $\sum_{j=1}^{4}(cj-1)^2 = 214$.

Solución

Se desarrolla la suma:

$$(c-1)^2 + (2c-1)^2 + (3c-1)^2 + (4c-1)^2 = 214$$

Se desarrollan los binomios y se reducen los términos semejantes, para luego resolver la ecuación resultante:

$$c^2 - 2c + 1 + 4c^2 - 4c + 1 + 9c^2 - 6c + 1 + 16c^2 - 8c + 1 = 214$$
$$30c^2 - 20c - 210 = 0$$
$$3c^2 - 2c - 21 = 0$$

Por consiguiente: $c = 3$ y $-\frac{7}{3}$

EJERCICIO 147

Determina las siguientes sumas:

1. $\sum_{j=1}^{8}(2j-3)$
2. $\sum_{j=0}^{10}(j^2-4j)$
3. $\sum_{j=0}^{5}\frac{j+1}{j+2}$
4. $\sum_{j=1}^{6}2^j$
5. $\sum_{j=1}^{6}\left(\sqrt{j+1}-\sqrt{j}\right)$
6. $\sum_{j=1}^{9}2$
7. $\sum_{j=0}^{4}(-2)^{j-1}$
8. $\sum_{j=4}^{10}3$
9. $\sum_{j=1}^{n}n$
10. $\sum_{j=1}^{n}j$

Determina el valor de c que cumpla con las siguientes igualdades:

11. $\sum_{j=1}^{20}2c = 120$
12. $\sum_{j=2}^{8}\frac{c}{3} = \frac{7}{3}$
13. $\sum_{j=4}^{9}(cj-2) = 105$
14. $\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{cj-1}{3}\right)^2 = \frac{286}{9}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Progresión aritmética o sucesión aritmética

La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, es una progresión aritmética si existe un número real r, tal que para todo número natural m se cumple que:

$$a_m = a_{m-1} + r$$

Donde la diferencia común o razón es $r = a_m - a_{m-1}$

Ejemplos

Determina si las siguientes sucesiones son aritméticas:

a) $2, 6, 10, 14, \ldots, 4n-2$

b) $-3, -5, -7, -9, \ldots, -2n-1$

c) $2, 4, 7, 11, \ldots, \frac{n^2+n+2}{2}$

Solución

a) De la sucesión: 2, 6, 10, 14,…, $4n - 2$, determina la diferencia común:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[4(m)-2\right]-\left[4(m-1)-2\right] = \left[4m-2\right]-\left[4m-4-2\right]$$
$$= 4m - 2 - 4m + 4 + 2$$
$$= 4$$

Esto significa que los términos de la sucesión se encuentran sumando 4 al término anterior, por tanto, la sucesión es aritmética.

b) Se determina la diferencia común de la sucesión:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[-2(m)-1\right]-\left[-2(m-1)-1\right] = \left[-2m-1\right]-\left[-2m+2-1\right]$$
$$= -2m - 1 + 2m - 2 + 1$$
$$= -2$$

Por consiguiente, la sucesión es aritmética.

c) Se determina la razón o diferencia común:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[\frac{(m)^2+(m)+2}{2}\right]-\left[\frac{(m-1)^2+(m-1)+2}{2}\right] = \left[\frac{m^2+m+2}{2}\right]-\left[\frac{m^2-m+2}{2}\right]$$
$$= \frac{2m}{2}$$
$$= m$$

La diferencia no es constante, entonces la sucesión no es aritmética.

Fórmula para determinar el *n*-ésimo término en una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética ÷ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, con razón r, entonces el n-ésimo término de la sucesión está dado por:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)r}$$

Para todo $n > 1$

Donde:

a_n = n-ésimo término de la progresión

a_1 = primer término de la progresión

n = número de términos en la progresión

r = razón o diferencia común → $r = a_n - a_{n-1} = \ldots = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

EJEMPLOS



1 Determina el 8º término de la progresión ÷ 1, 4, 7, 10,...

Solución

Se identifica el primer término, el número de términos y la razón para sustituir en la fórmula del n-ésimo término:

$$a_1 = 1, \; n = 8 \; \text{y} \; r = 4 - 1 = 3$$

Por consiguiente:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a_8 &= 1+(8-1)(3) \\ a_8 &= 1+(7)(3) \\ a_8 &= 1+21=22 \end{aligned}$$

Entonces, el 8º término de la progresión es 22

2 ¿Cuál es el 7º término en la progresión $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6} \ldots$?

Solución

Se determinan los valores de los elementos

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad n = 7 \text{ y } r = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a_7 &= \frac{1}{2} + (7-1)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} + 6\left(\frac{1}{3}\right) \\ a_7 &= \frac{1}{2} + 2 \\ a_7 &= \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, el 7º término es $\frac{5}{2}$

3 Si en una progresión aritmética el tercer y noveno términos son 11 y 35, determina el séptimo término.

Solución

De acuerdo al problema:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + (3-1)r \\ a_3 &= a_1 + 2r \\ 11 &= a_1 + 2r \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_9 &= a_1 + (9-1)r \\ a_9 &= a_1 + 8r \\ 35 &= a_1 + 8r \end{aligned}$$

Se genera un sistema de ecuaciones con incógnitas a_1 y r:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 11 \\ a_1 + 8r = 35 \end{cases}$$

Del cual, al resolverlo, se obtiene que:

$$a_1 = 3 \text{ y } r = 4$$

Luego, el séptimo término es:

$$a_7 = a_1 + (7-1)r = 3 + (6)(4) = 3 + 24 = 27$$

Fórmulas para determinar el primer término, número de términos y la razón

Todas estas fórmulas se deducen de la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$ y dependen de los elementos que se tengan como datos.

- Para encontrar el primer término se despeja a_1:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_n - (n-1)r = a_1$$

Por tanto:

$$a_1 = a_n - (n-1)r$$

- Para encontrar la razón se despeja r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_n - a_1 = (n-1)r \quad \rightarrow \quad r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Por consiguiente:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

- Para obtener el número de términos se despeja n:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad \frac{a_n - a_1}{r} = n-1 \quad \rightarrow \quad n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

En consecuencia:

$$n = \frac{a_n - a_1 + r}{r}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el primer término de una progresión aritmética, si se sabe que el 13º término es −28 y la razón es −6.

Solución

Se determinan los valores de los elementos:

$$a_{13} = -28,\ n = 13 \ \text{ y } \ r = -6$$

Al sustituir en la fórmula se obtiene a_1:

$$a_1 = a_{13} - (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_1 = -28 - (13-1)(-6)$$
$$a_1 = -28 - (12)(-6)$$
$$a_1 = -28 + 72$$
$$a_1 = 44$$

Por tanto, el primer término es 44

El procedimiento de los despejes es el mismo si se sustituyen los valores directamente en la fórmula: $a_n = a_1 + (n-1)r$

2 Determina la razón de la progresión aritmética cuyo primer término es 6 y el 16º es 9.

Solución

Se determinan los elementos que se tienen como datos:

$$a_n = a_{16} = 9,\ a_1 = 6 \ \text{ y } \ n = 16$$

Al sustituir en la fórmula y despejar r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad 9 = 6 + (16-1)r$$
$$9 - 6 = (15)r$$
$$r = \frac{9-6}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Finalmente, la razón de la progresión aritmética es $\frac{1}{5}$

3 ¿Cuál es el número de términos que tiene la progresión aritmética ÷ 4.5, 6.6,…, 25.5?

Solución

Se obtienen los datos:

$$a_1 = 4.5,\ \ a_n = 25.5\ \text{ y }\ r = 6.6 - 4.5 = 2.1$$

Se sustituyen los valores y se despeja n:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad 25.5 = 4.5 + (n-1)(2.1)$$

$$n = \frac{25.5 - 4.5 + 2.1}{2.1}$$

$$n = \frac{23.1}{2.1} = 11$$

Entonces, la progresión tiene 11 términos.

EJERCICIO 148

Determina cuáles de las siguientes sucesiones son aritméticas:

1. $4, 9, 14, \ldots, 5n - 1$
2. $2, 4, 8, \ldots, 2^n$
3. $\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \ldots, \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{6}\right)$
4. $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$
5. $2, 4, 6, \ldots, 2n$
6. $k + 1, 2k + 3, 3k + 5, \ldots, nk + 2n - 1$

Encuentra el término que se indica para cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

7. El 8º término en: ÷ 2, 5, 8,...
8. El 11º término en: ÷ $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$
9. El 15º término en: ÷ $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{4}, \ldots$
10. El 10º término en: ÷ 1, 7, 13,…
11. El 16º término en: ÷ $3, \frac{13}{4}, \frac{7}{2}, \ldots$
12. El 7º término en: ÷ 120, 108, 96,...
13. El 12º término en: ÷ 0.5, 0, – 0.5,...
14. El 18º término en: ÷ –5, 22, 49,...
15. El 13º término en: ÷ 15, 11.5, 8,...
16. El 17º término en: ÷ $\frac{3}{4}$, 0.875, 1,...

Dados algunos elementos de una progresión aritmética, determina el elemento que se pide:

17. El 1er término si el 13º término es 67 y la razón es 5
18. La razón si el 1er término es 7 y el 10º es –11
19. El número de elementos de la progresión: ÷ 120, 519,…, 3 312
20. La razón si el 1er término es $\frac{2}{3}$ y el 8º $-\frac{13}{12}$
21. El 11º término si el 3º es –4 y el 7º es –16
22. El 1er término si el 20º es –62.5 y la razón es –2.5
23. El número de términos de la progresión: ÷ $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \ldots, \frac{11}{8}$
24. El 1er término si el 5º es –9 y el 9º es –25
25. El 1er término si el 11º es $-\frac{19}{2}$ y la razón $-\frac{2}{3}$
26. Si la razón es $\frac{1}{25}$ del número de términos y el 1er y último términos son: 0.15 y 3.75, respectivamente, determina el número de términos.

27. La razón si el cuarto término es $\frac{1}{4}$ y el 11º es 2
28. El 5º término si el 2º es $-\frac{3}{4}$ y el octavo es $-\frac{27}{4}$
29. El 7º término si el 3ero es $4n - 1$ y el 10º es $11n - 8$
30. El 4º término si el 8º es $\frac{44n-19}{6}$ y el 15º $\frac{43n-20}{3}$



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma de los *n* primeros términos en una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética:

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Entonces, la suma de los primeros n términos se define como:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Demostración:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S = a_1 + (a_1 + r) + \ldots\ldots + [a_1 + (n-2)r] + [a_1 + (n-1)r]$$

Al cambiar el orden de los términos y realizar una suma vertical, se obtiene:

$$\begin{array}{rccccc} S = & [a_1] & + [a_1 + r] & + \ldots + & [a_1 + (n-2)r] & + [a_1 + (n-1)r] \\ S = & [a_1 + (n-1)r] & + [a_1 + (n-2)r] & + \ldots + & [a_1 + r] & + [a_1] \\ \hline 2S = & [2a_1 + (n-1)r] & + [2a_1 + (n-1)r] & + \ldots + & [2a_1 + (n-1)r] & + [2a_1 + (n-1)r] \end{array}$$

n - veces

Por tanto:

$$2S = n\,[2a_1 + (n-1)\,r] \quad \rightarrow \quad S = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)r\right]$$

Además sabemos que $a_n = a_1 + (n-1)r$, entonces:

$$S = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)r\right]$$

Luego, la fórmula para hallar la suma de los primeros n términos está determinada por:

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma de los primeros 12 términos de la progresión aritmética:

$$\div\, 2, 7, 12, \ldots$$

Solución

En esta progresión los datos son:

$$a_1 = 2,\ n = 12 \ \text{y}\ r = 7 - 2 = 5$$

Por consiguiente, el 12º término es:

$$a_{12} = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} a_{12} = 2 + (12-1)(5) \\ a_{12} = 2 + (11)(5) \\ a_{12} = 2 + 55 = 57 \end{array}$$

Luego, para encontrar la suma de los 12 términos se sustituyen en la fórmula los siguientes valores:

$$a_1 = 2,\ a_{12} = 57 \text{ y } n = 12$$

Finalmente,

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \rightarrow \quad S_{12} = \frac{12(2+57)}{2} = \frac{12(59)}{2} = 354$$

Entonces, la suma de los 12 términos es: 354

2 Encuentra la suma de los 15 primeros términos de la progresión:

$$\div\ \frac{19}{3},\ \frac{17}{3},\ 5,...$$

Solución

De esta progresión los datos son:

$$a_1 = \frac{19}{3} \quad n = 15 \text{ y } r = \frac{17}{3} - \frac{19}{3} = -\frac{2}{3}$$

Se encuentra el 15º término:

$$a_{15} = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{19}{3} + (15-1)\left(-\frac{2}{3}\right) \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{19}{3} + (14)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$a_{15} = \frac{19}{3} - \frac{28}{3} = -3$$

Para encontrar la suma de los 15 términos, se sustituye en la fórmula:

$$a_1 = \frac{19}{3} \qquad n = 15 \qquad a_{15} = -3$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \rightarrow \quad S_{15} = \frac{15\left(\frac{19}{3} + (-3)\right)}{2} = \frac{15\left(\frac{10}{3}\right)}{2} = 25$$

Entonces, la suma de los 15 primeros términos es 25

EJERCICIO **149**

Resuelve los siguientes problemas:

1. ¿Cuál es la suma de los primeros 8 términos de: $\div$ 1, 7, 13,…?
2. Determina la suma de los 9 términos que conforman la progresión: $\div$ –5,..., 7
3. Encuentra la suma de los primeros 8 términos de: $\div\ 3,\ \frac{13}{4}, \frac{7}{2}$,...
4. ¿Cuál es la suma de los 9 primeros términos de: $\div$ 120, 108, 96,…?
5. Encuentra la suma de los 13 términos de: $\div$ 15, 11.5, 8,...
6. Determina la suma de los 12 primeros términos de la progresión: $\div$ 21, 24, 27…
7. Determina la suma de los 11 primeros términos de: $\div$ –15, –12, –9,...
8. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: $\div$ 1 000, 988,..., –188?
9. Determina la suma de los términos en la progresión: $\div$ 1, 2, 3,…, n
10. Encuentra la suma de los términos de la progresión: $\div$ 2, 4, 6,…, $2n$

11. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: ÷ 1, 3, 5,…, $2n - 1$?
12. ¿Cuál es el número de términos de una progresión aritmética, cuya suma es 42. Si el último término es 31 y la razón es 5?
13. Determina el número de términos de una progresión aritmética, cuya suma es $\frac{65}{4}$, si el primer término es $\frac{1}{2}$ y la razón $\frac{1}{4}$.
14. La suma de 32 elementos en una progresión aritmética es 1 200. Si la razón es 3, determina el primer término.
15. La suma de 50 términos de una progresión aritmética es 2 550. Si la razón es 2, ¿cuál es el primer y último términos de la progresión?

 Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Un constructor apila cierto número de bloques de granito de la siguiente manera: 15 bloques en la base y 2 menos en cada fila superior a la anterior. Si en la última fila superior colocó 1, encuentra el total de bloques que apiló.

Solución

El problema indica que el primer término de la progresión aritmética es 15, y que al disminuir de 2 bloques por fila, resulta:

$$\div\, 15, 13, 11, \ldots$$

Los datos conocidos son: $a_1 = 15$, $r = -2$ y $a_n = 1$, entonces se debe de calcular el número de filas que se pueden apilar.

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 \qquad n = \frac{1-15}{-2} + 1 = 7 + 1 = 8$$

Luego, la suma está determinada por:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \qquad S_8 = \frac{8(15+1)}{2} = \frac{128}{2} = 64$$

Entonces, el constructor apiló 64 bloques de granito.

EJERCICIO 150

1. El estacionamiento de un centro comercial tiene la siguiente disposición de lugares: la primera fila tiene 50, la segunda 47, y cada fila subsiguiente tiene 3 menos que la anterior. Si la última fila tiene 23 lugares, ¿de cuántos lugares dispone el estacionamiento?
2. Un albañil apilará ladrillos de tal forma que la base tenga 50, la segunda capa 48, la tercera 46, y así sucesivamente hasta que la capa superior tenga 24, ¿cuántos ladrillos en total apilará el albañil?
3. Una empresa va a repartir entre 18 de sus empleados $13 275, como bono de puntualidad. Si la diferencia entre cada uno de los bonos es de $75, determina cuánto recibió el trabajador más puntual.
4. Se apilan 135 rollos de tela de tal manera que la base tendrá el doble de rollos que la última, y la diferencia de rollos entre cada una de las capas será de 1. ¿Cuántos rollos debe tener la última capa?
5. Se van a colocar en filas los asientos para un auditorio, de tal manera que la primera tenga 20, la segunda 23, la tercera 26 y así sucesivamente. Si en total se colocaron 819 asientos, ¿cuántas filas se formaron?

 Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Interpolación de medios aritméticos

Los medios aritméticos son los términos que se encuentran entre el primer y el último términos, y dependen directamente del valor de la razón.

La interpolación de medios aritméticos consiste en encontrar los términos de toda la progresión a partir de conocer el primer y último términos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Interpola 4 medios aritméticos entre 5 y 32.5.

Solución

En esta progresión los elementos dados son:

$$a_1 = 5 \;\text{ y }\; a_n = 32.5$$

Para encontrar el número de términos es necesario sumar los medios aritméticos más 2 (primer y último términos), entonces:

$$n = 6$$

Con los datos anteriores se encuentra la razón:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{32.5 - 5}{6-1}$$

$$r = \frac{27.5}{5}$$

$$r = 5.5$$

Por tanto, la progresión está determinada por:

$$\div\, 5,\ (5 + 5.5),\ (10.5 + 5.5),\ (16 + 5.5),\ (21.5 + 5.5),\ 32.5$$
$$\div\, 5,\quad 10.5,\quad 16,\quad 21.5,\quad 27,\quad 32.5$$

Y los 4 medios aritméticos son:

$$10.5,\ 16,\ 21.5,\ 27$$

2 Interpola 5 medios aritméticos entre 11 y –13.

Solución

Los términos dados son,

$$a_1 = 11,\; a_n = -13 \;\text{ y }\; n = 7$$

Se obtiene la razón,

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-13-11}{7-1} = \frac{-24}{6} = -4$$

Por consiguiente, los medios aritméticos son:

$$7,\ 3,\ -1,\ -5,\ -9$$

Media aritmética o promedio aritmético

- Sean los números x_1 y x_2, entonces la media aritmética o promedio aritmético se define por:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

- Sea el conjunto de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, en consecuencia la media aritmética o promedio aritmético se determina así:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el grupo de danza se inscribieron 9 alumnos, cuyas edades son: 12, 13, 13, 14, 15, 12, 14, 15, 11. Determina la edad promedio del grupo.

Solución

Se suman todas las edades y el resultado se divide entre el número de éstas, entonces:

$$\text{Edad promedio} = \frac{12+13+13+14+15+12+14+15+11}{9} = 13.2$$

Por tanto, la edad promedio es de 13.2 años.

2 Un alumno tiene en sus 4 primeras evaluaciones las siguientes calificaciones: 7.6, 9, 8.4 y 7.8. ¿Qué calificación necesita tener en la quinta evaluación para exentar la materia con 8?

Solución

Sea x la quinta evaluación y el promedio 8, entonces:

$$\text{Promedio} = \frac{\text{suma de las evaluaciones}}{\text{total de evaluaciones}} \qquad 8 = \frac{7.6+9+8.4+7.8+x}{5}$$

Al despejar x de la expresión se obtiene:

$$5(8) - (7.6 + 9 + 8.4 + 7.8) = x$$
$$40 - 32.8 = x$$
$$7.2 = x$$

Por consiguiente, la calificación mínima que necesita para exentar es 7.2

EJERCICIO **151**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Interpola 5 medios aritméticos en la progresión, cuyo primer y último términos son: 21 y 60.
2. Interpola 7 medios aritméticos en la progresión, cuyos extremos son: 5 y 17.
3. Interpola 6 medios aritméticos entre $\frac{2}{3}$ y 3.
4. Interpola 7 medios aritméticos entre 0.5 y $8\frac{1}{2}$.
5. Interpola 6 medios aritméticos entre -3 y 0.5.
6. Interpola 3 medios aritméticos entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{7}{3}$.
7. ¿Cuál es el promedio de un alumno cuyas calificaciones son: 6, 9, 8.4, 7.8 y 10?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

La compañía de dulces La Pasita compró una máquina registradora a un precio de $12 000. Al cabo de 6 años la vendió en $5 520. La depreciación anual es constante, calcula el valor de la registradora al final de cada año.

Solución

Ésta es una progresión aritmética, cuyos precios inicial y final son: $12 000 y $5 520 respectivamente, entonces, se deben interpolar 5 periodos (años).

En consecuencia:

$$a_1 = 12\,000,\ a_n = 5\,520 \text{ y } n = 7$$

Se encuentra la depreciación anual (razón):

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{5\,520 - 12\,000}{7-1} = \frac{-6\,480}{6} = -1\,080$$

El signo negativo indica que el costo de la máquina va a disminuir $1 080 por año.

Por tanto, el valor de la máquina al final de cada año es:

1er año: $10 920	4o año: $7 680
2o año: $9 840	5o año: $6 600
3er año: $8 760	6o año: $5 520

EJERCICIO 152

1. En un salón de clases de 15 alumnos la edad promedio es 7.8; 9 de ellos tienen 8 años; la edad de otros 3 es 7. ¿Cuál es la edad de los restantes si tienen los mismos años?
2. ¿Cuál es la calificación que debe obtener un alumno en el cuarto bimestre para exentar con 8.5 la materia de biología, si en los 3 primeros bimestres obtuvo las siguientes evaluaciones: 8.7, 7.9 y 7.6?
3. Determina el promedio de una progresión aritmética que se conforma de ocho términos, su primer término es 2 y el último 16.
4. Obtén la media aritmética de la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.
5. El lado norte del tejado de una casa lo forman 476 tejas, ordenadas de tal forma que la primera hilera tiene 80 y la última 56. Determina el número de hileras y el de tejas que contiene cada hilera.
6. Si el lado norte de un tejado consta de x menos 50 hileras, y x es el número de tejas que tiene la primera hilera. Si las hileras subsecuentes exceden en 4 tejas a la anterior, y el total de tejas utilizadas es de 576, determina el número de hileras y mediante una interpolación precisa el número de tejas de cada hilera.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Progresión geométrica o sucesión geométrica

A la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, se le llama sucesión o progresión geométrica, si para todo a_m que pertenezca a la sucesión existe una constante r diferente de cero, tal que:

$$a_{m+1} = a_m r$$

Donde la razón común es $r = \frac{a_{m+1}}{a_m}$ y se denota con el símbolo ÷÷

Ejemplos

Determina cuál de las siguientes sucesiones es geométrica.

a) $3, 6, 3\cdot 2^{n-1}$

b) $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \frac{1}{3^{n+1}}$

c) $1, 4, 7, \ldots, 3n-2$

Solución

a) Se obtiene la razón común:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{3\cdot 2^{(m+1)-1}}{3\cdot 2^{m-1}} = \frac{3\cdot 2^{m}}{3\cdot 2^{m-1}} = 2$$

Se observa que los elementos de la progresión: 3, 6, 12,…, $3\cdot 2^{n-1}$ se obtienen al multiplicar por 2 el término que le precede, por tanto la progresión es geométrica.

b) Se determina la razón común para la comprobación:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{\frac{1}{3^{(m+1)+1}}}{\frac{1}{3^{m+1}}} = \frac{\frac{1}{3^{m+2}}}{\frac{1}{3^{m+1}}} = \frac{3^{m+1}}{3^{m+2}} = \frac{1}{3}$$

Significa que los términos subsecuentes de la progresión: $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \frac{1}{3^{n+1}}$ se obtienen al multiplicar por $\frac{1}{3}$ entonces se deduce que es progresión geométrica.

c) Al obtener la razón de la progresión:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{3(m+1)-2}{3(m)-2} = \frac{3m+3-2}{3m-2} = \frac{3m+1}{3m-2}$$

La progresión no es geométrica, ya que los términos siguientes no se pueden obtener al multiplicar por la razón resultante.

Fórmula para obtener el *n*-ésimo término en una progresión geométrica

Sea la progresión geométrica $\div\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y razón común r, entonces el n-ésimo término se define como:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Donde:

a_n = n-ésimo término

a_1 = primer término

r = razón de la progresión

n = número de términos de la progresión

EJEMPLOS



1 Determina el 9º término de la progresión $\div\div$ 10, 20, 40,...

Solución

Se obtiene la razón al dividir uno de los elementos entre su antecesor:

$$r = \frac{20}{10} = \frac{40}{20} = 2$$

Entonces, los elementos dados son:

$$a_1 = 10,\ r = 2 \ \text{ y } \ n = 9$$

Al sustituir, se obtiene el 9º término:

$$a_n = a_1\, r^{\,n-1} \qquad \rightarrow \qquad a_9 = 10(2)^{9-1} = 10(2)^8$$
$$a_9 = 10(256)$$
$$a_9 = 2\,560$$

Finalmente, el 9º término es 2 560

2 Determina el 7º término de ÷÷ 200, 100, 50,...

Solución

De la progresión se tienen como datos:

$$a_1 = 200,\ r = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \ \text{ y } \ n = 7$$

Luego, para encontrar el 7º término se sustituye en la fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \qquad \rightarrow \qquad a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7-1}$$
$$a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$
$$a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{200}{64} = \frac{25}{8}$$

Entonces, el 7º término es $\frac{25}{8}$

3 Si en una progresión geométrica el 3er y 7º términos son 18 y 1 458, ¿cuál es el 5º término?

Solución

De acuerdo con el problema

$$a_3 = a_1 r^{3-1} \qquad\qquad a_7 = a_1 r^{7-1}$$
$$18 = a_1 r^2 \qquad\qquad 1\,458 = a_1 r^6$$

Se obtienen las ecuaciones:

$$a_1 r^2 = 18 \qquad \text{y} \qquad a_1 r^6 = 1\,458$$

Pero $a_1 r^6 = a_1 r^2 \cdot r^4 = 18r^4$, entonces

$$18r^4 = 1\,458 \qquad \rightarrow \qquad r = \sqrt[4]{\frac{1458}{18}} \qquad \rightarrow \qquad r = 3$$

Al sustituir este valor, se obtiene a_1:

$$a_1(3)^2 = 18 \rightarrow a_1 = \frac{18}{9} = 2$$

En consecuencia, el 5º término es:

$$a_5 = a_1 r^4 = (2)(3)^4 = (2)(81) = 162$$

Fórmulas para obtener el 1er término, número de términos y la razón

Todas las fórmulas subsecuentes se obtienen de $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

- Para encontrar el 1er término:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

- Para encontrar la razón:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

- Para determinar el número de términos que contiene la progresión geométrica:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad n = \frac{\log a_n - \log a_1 + \log r}{\log r}$$

Estas fórmulas se aplican, según las necesidades de los ejercicios que se deben resolver, como se ejemplifica a continuación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En una progresión geométrica la razón es $\frac{1}{2}$ y el 8º término es $\frac{1}{8}$. Calcula el 1er término.

Solución

Los datos en este problema son:

$$a_8 = \frac{1}{8} \qquad n = 8 \qquad r = \frac{1}{2}$$

Entonces, al sustituir los valores en nuestra fórmula, se obtiene:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{\frac{1}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{128}} = \frac{128}{8} = 16$$

Por tanto, el 1er término de la progresión es 16

2 ¿Cuál es la razón de la progresión geométrica, cuyo 1er y 7º términos es $\frac{1}{5}$ y 3 125 respectivamente?

Solución

Los elementos que se tienen como datos son:

$$a_1 = \frac{1}{5} \qquad a_7 = 3\,125 \qquad n = 7$$

Luego, al sustituir en nuestra fórmula se obtiene el valor de la razón, entonces:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[7-1]{\frac{3\,125}{\frac{1}{5}}} = \sqrt[6]{15625} = 5$$

Finalmente, la razón de la progresión es 5

3 ¿De cuántos términos está formada la siguiente progresión geométrica?

$$\div\div\ 1, 2, \ldots, 512$$

Solución

De la progresión se tiene:

$$a_1 = 1 \qquad a_n = 512 \qquad r = \frac{2}{1} = 2$$

Se sustituyen los valores para obtener el número de términos.

$$n = \frac{\log\ (512) - \log\ (1) + \log\ (2)}{\log\ (2)} = \frac{2.7092 - 0 + .3010}{.3010} = 10$$

El número de términos de la progresión geométrica es 10

EJERCICIO 153

De las siguientes sucesiones determina cuál es geométrica:

1. $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$
2. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3^{n-2}}{2^{n-1}}$
3. $1, 2, 6, \ldots, n!$
4. $-4, -2, 0, \ldots, 2n - 6$
5. $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, n^3$
6. $3, 6, 12, \ldots, 3 \cdot 2^{n-1}$

Determina el término que se indica en cada una de las siguientes progresiones geométricas:

7. El 6º término de $\div\div \frac{1}{3}, -1, 3, \ldots$
8. El 9º término de $\div\div \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \ldots$
9. El 5º término de $\div\div -5, 10, -20, \ldots$
10. El 7º término de $\div\div 2.5, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$
11. El 10º término de $\div\div -9, -3, -1, \ldots$
12. El 8º término de $\div\div 8, 4, 2, \ldots$
13. El 12º término de $\div\div \frac{729}{64}, \frac{243}{32}, \frac{81}{16}, \ldots$
14. El 9º término de $\div\div 1, -m^3, m^6, \ldots$
15. El 10º término de $\div\div n^{-4}, n^{-2}, 1, \ldots$
16. El 7º término de $\div\div \frac{(n+1)^5}{n^3}, \frac{(n+1)^4}{n^2}, \ldots$
17. El 13º término de $\div\div 2^{3x-4}, 2^{5x-5}, 2^{7x-6}, \ldots$
18. El 9º término de $\div\div a_1, a_1r^2, a_1r^4, \ldots$

Dados algunos elementos de una progresión geométrica, halla el elemento que se pide:

19. El 1er término, si la razón es $\frac{1}{2}$ y el 6º término es $\frac{1}{16}$
20. El 2º término, si su razón es -2 y el 7º es -128
21. La razón, si el 1er término es $\frac{3}{5}$ y el 5º es $\frac{1}{135}$
22. La razón, si el 1er término es -8 y el 7º es $-\frac{729}{512}$
23. El número de términos de $\div\div -2, -6, \ldots, -162$
24. El número de términos si la razón es $\frac{2}{5}$, el 1er término es $\frac{1}{2}$ y el último $\frac{64}{78\,125}$
25. El número de términos de $\div\div 5^x, 5^{2x+1}, \ldots, 5^{9x+8}$

26. El 1er término si el 4º es $\frac{2}{27}$ y el 7º $\frac{16}{729}$
27. El 4º término si el 2º es 1 y el 9º es $\frac{1}{m^{14}}$
28. El 11º término si el 3º es $2^{\frac{7}{6}x-1}$ y el 9º es $2^{\frac{19}{6}x-7}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Un cultivo de 20 000 bacterias aumenta su población 25% por hora. ¿Cuántas bacterias se generan en la sexta hora?

Solución

El cultivo es el 100% inicial de bacterias, a la primera hora aumenta 25%, esto indica que el porcentaje actual es 125% o $\frac{5}{4}$ de la cantidad inicial; luego, el número de elementos que conforman la sucesión es el término inicial más los 6 términos siguientes.

De acuerdo con los datos:

$$a_1 = 20\ 000,\ r = \frac{5}{4}\ \text{y}\ n = 7$$

Al sustituir en la fórmula para obtener el n-ésimo término:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad a_7 = 20\ 000\left(\frac{5}{4}\right)^{7-1} = 76\ 293.9 \approx 76\ 294$$

Por tanto, al cabo de 6 horas habrá aproximadamente 76 294 bacterias.

EJERCICIO 154

1. Determina la sucesión de 4 términos, cuyo primer y cuarto términos sean 9 y –1, de tal manera que los tres primeros números formen una progresión geométrica y los últimos 3, una progresión aritmética.
2. Una generación celular es la división de una célula en 2. Si se tienen 8 células iniciales, ¿cuántas células se han generado tras 10 generaciones celulares?
3. Tres números forman una progresión aritmética con una razón de 2. Si el segundo número se incrementa en 1 y el tercero en 5, los números resultantes forman una progresión geométrica. Determina los números de la progresión aritmética.
4. Determina el número de células iniciales si se obtuvieron 98 304 después de 14 generaciones celulares.
5. Un cultivo de 25 000 bacterias aumenta 5% en 20 minutos. ¿Cuál será la población de bacterias al transcurrir una hora 20 minutos?
6. Del problema anterior establece la fórmula general que determina el número de bacterias en t horas.
7. Se invierten $230 000 a una cuenta que da por concepto de intereses 5% anual. ¿Cuánto se tendrá al final de 8 años?
8. En cierta ciudad nacieron 32 500 bebés en el año 2005, si el número de nacimientos se incrementa 20% anual, ¿cuántos bebés se estima que nazcan en el año 2009?
9. Se tiene un cuadrado de área 1 024 cm^2 y se inscribe otro cuadrado de tal manera que los extremos coincidan con los puntos medios del primero; después se inscribe otro cuadrado en el segundo con la misma disposición. Si se conoce que el área de un cuadrado inscrito es la mitad del área del cuadrado en el que se inscribe, ¿cuál es el área del noveno cuadrado inscrito?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica

Deducción de la fórmula.

Sea la progresión geométrica $\div\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, llamemos S a la suma de los primeros n términos, entonces:

$$S=\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_n \quad \rightarrow \quad (1)$$

Al multiplicar por la razón la igualdad:

$$S\cdot r = a_1\cdot r + a_2\cdot r + a_3\cdot r + \ldots\ldots\ldots\ldots a_n\cdot r \quad \rightarrow \quad (2)$$

Al restar a la ecuación 2 la ecuación 1, tenemos:

$$\begin{array}{l} Sr = \qquad\quad + a_1 r + a_2 r + \ldots + a_{n-1} r + a_n r \\ -S = \quad -a_1 - a_1 r - a_2 r - \ldots - a_{n-1} r \\ \hline Sr - S = -a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_n r \\ Sr - S = a_n r - a_1 \end{array}$$

Entonces:

$$S(r-1) = a_n\cdot r - a_1 \quad \text{pero} \quad a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$S(r-1) = a_1 r^{n-1}\cdot r - a_1$$

$$S(r-1) = a_1 r^{n} - a_1$$

Finalmente:

$$S=\frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1} \quad \text{o} \quad S = a_1\frac{\left(r^n-1\right)}{r-1} = a_1\frac{\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma de los primeros 8 términos de la progresión geométrica:

$$\div\div\, \frac{4}{3}, 2, 3, \ldots$$

Solución

En esta progresión los datos son:

$$a_1 = \frac{4}{3} \qquad r = \frac{3}{2} \qquad n = 8$$

Luego, al sustituir en la fórmula se obtiene la suma de los 8 términos:

$$S = \frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\left[\left(\frac{3}{2}\right)^8-1\right]}{\frac{3}{2}-1} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{6\,561}{256}-1\right)}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{6\,305}{256}\right) = \frac{6\,305}{96}$$

Se concluye que la suma de los primeros 8 términos de la progresión es $\frac{6\,305}{96}$

2 Encuentra el 1er término de una progresión geométrica, cuya suma de los primeros 10 términos es 341 y la razón es –2.

Solución

De acuerdo con el problema los datos son:

$$n = 10,\ r = -2 \ \text{ y } \ S = 341$$

Al sustituir en la fórmula y despejar a_1 se obtiene:

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1} \qquad 341 = \frac{a_1\left[(-2)^{10} - 1\right]}{-2 - 1}$$

Se simplifica la expresión y se despeja a_1:

$$341 = \frac{a_1\left[(-2)^{10} - 1\right]}{-3} \qquad 341 = \frac{a_1\left[1024 - 1\right]}{-3} \qquad a_1 = \frac{(-3)(341)}{1023} = \frac{-1023}{1023} = -1$$

Por tanto, el 1er término de la progresión es –1

3 Determina el número de elementos de una progresión geométrica, cuya suma es 1 093, su 1er término es 1 y la razón es 3.

Solución

De acuerdo con el problema:

$$a_1 = 1,\ r = 3 \ \text{ y } S = 1\,093$$

Al sustituir en la fórmula de la suma de términos:

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1} \qquad 1\,093 = \frac{1\left(3^n - 1\right)}{3 - 1}$$

Al simplificar y despejar n se obtiene:

$$1\,093 = \frac{3^n - 1}{2} \qquad 2\,186 = 3^n - 1 \qquad 2\,187 = 3^n \qquad (3)^7 = 3^n$$

$$7 = n$$

Por consiguiente, se realizó la suma de los primeros 7 términos de la progresión.

EJERCICIO 155

Encuentra la suma de los primeros términos que se indican en las siguientes progresiones geométricas:

1. Seis términos de $\div\div\ -9,\ -3,\ -1, \ldots$
2. Siete términos de $\div\div\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{2}{3}, \ldots$
3. Nueve términos de $\div\div\ -5,\ 10,\ -20, \ldots$
4. Diez términos de $\div\div$ 9, 12, 16,…
5. Quince términos de $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$
6. Dieciocho términos de $\div\div$ 2, 4, 8,…

7. Doce términos de $\div\div\ \sqrt{3}, 3, \sqrt{27},...$

8. Diez términos de $\div\div\ 1, -\sqrt{2}, 2,\ldots$

9. Veinte términos de $\div\div\ n, n^2, n^3,\ldots$

10. Nueve términos de $\div\div\ 2^{x-2}, 2^{x-1}, 2^x,\ldots$

11. n términos de $\div\div\ a_1, a_1r^2, a_1r^4,\ldots$

12. n términos de $\div\div\ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},...$

Resuelve los siguientes problemas:

13. Encuentra el número de términos de una progresión geométrica; si la suma es 255, el 1er término es -3 y la razón -2.

14. Determina la razón común de una progresión geométrica si el 1er término es -8 y el 6º término $-\frac{1}{4}$.

15. ¿Cuál es el 1er término de una progresión geométrica, cuya suma de los primeros 8 términos es $\frac{6\,305}{81}$ y la razón es $\frac{2}{3}$?

16. ¿Cuál es el último término de una progresión geométrica cuya suma es $\frac{31}{64}$, su 1er término es $\frac{1}{4}$ y la razón $\frac{1}{2}$?

17. Determina el 1er término de una progresión geométrica si la suma de los primeros 6 términos es 364 y la razón es -3.

18. ¿Cuál es la razón de una progresión geométrica, si la suma es $\frac{211}{24}$, el 1er término es $\frac{2}{3}$ y el último término es $\frac{27}{8}$?

19. Encuentra el número de términos de una progresión geométrica, si la suma es $\frac{1-x^7}{x^4-x^5}$, el 1er término es x^2 y la razón es $\frac{1}{x}$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una compañía de autos tiene estimado vender 5 000 autos en 2 010 y durante los 10 años siguientes incrementar en 5% anual las ventas con respecto al año anterior. Determina cuántos automóviles pretende vender la compañía en ese periodo.

Solución

De acuerdo con el problema los datos son:

$$a_1 = 5\,000,\ r = 100\% + 5\% = 105\% = 1.05$$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_{10} = 5\,000\left(\frac{1-1.05^{10}}{1-1.05}\right)$$

$$= 5\,000(12.5778)$$

$$= 62\,889.46 \approx 62\,890 \text{ autos}$$

Por consiguiente la compañía pretende vender aproximadamente 62 890 autos en los siguientes 10 años.

2 Una epidemia ataca a 2 500 habitantes de una población en 2006, y por cada año que transcurre la clínica de salud de la entidad observa que las personas que padecen la enfermedad se incrementa en un 5%. ¿Cuántos habitantes habrán padecido la enfermedad para el año 2010?

Solución

De acuerdo al problema, los datos son los siguientes:

$$a_1 = 2\,500,\ r = 105\% = 1.05 \text{ y } n = 5$$

Sustituyendo en la fórmula, se obtiene:

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$$S_n = \frac{2\,500\left(1-1.05^5\right)}{1-1.05}$$

$$= \frac{2\,500\left(1-1.2762\right)}{-0.05} = \frac{2\,500\left(-0.2762\right)}{-0.05} = 13\,814 \text{ habitantes}$$

Por tanto, para el año 2010 habrán padecido la epidemia 13 814 habitantes aproximadamente.

EJERCICIO 156

1. Un triángulo equilátero se divide en 4 triángulos equiláteros más pequeños de igual área, éstos a su vez se dividen en otros 4 triángulos cada uno; este procedimiento se repite para cada triángulo resultante. ¿Cuántos triángulos se tendrán en total después de realizar 6 veces esta operación?
2. Carolina tiene papá y mamá, a su vez éstos tienen cada uno a su padre y madre, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas en el árbol genealógico de Carolina existen hasta 7 generaciones atrás, incluyéndola a ella?
3. En cierta población la producción de maíz en el año 2001 fue de 20 000 toneladas; por diversas cuestiones esa cantidad ha tenido una disminución de 25% anual. ¿Qué cantidad de maíz se produjo desde 2001 hasta 2006?
4. Durante el año 2005 cierto hospital atendió 5 110 partos; sin embargo, este número se incrementó 10% anual. ¿Cuántos partos estima el hospital atender desde 2006 hasta el año 2010?
5. La población en México en el año 2000 está cuantificada en 100 millones de personas. Si para el año 2002 las autoridades registraron 104 millones de mexicanos, ¿a qué ritmo está creciendo la población en nuestro país? Si se mantiene este crecimiento, para el año 2010. ¿cuántos habitantes tendrá el territorio mexicano?


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Progresión geométrica infinita

Sea una progresión geométrica, cuyo 1[er] valor es $a_1 = 100$ y la razón $r = \frac{1}{2}$, ¿qué le sucede a la suma de los primeros n términos?

El comportamiento de la progresión:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$$

Para $a_1 = 100$ y $r = \frac{1}{2}$ se obtiene:

$$S_n = 200 - 200\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Luego:

$$S_3 = 200 - 200\left(\frac{1}{8}\right) \qquad \text{si } n = 3$$

$$S_8 = 200 - 200\left(\frac{1}{256}\right) \qquad \text{si } n = 8$$

$$\approx$$

$$S_{20} = 200 - 200\left(\frac{1}{1\,048\,576}\right) \qquad \text{si } n = 20$$

De manera que, conforme n crece, el término $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se hace más pequeño y tiende a cero.

Es por eso que para cualquier progresión geométrica infinita, donde la razón es menor que la unidad, se debe considerar la suma de los primeros n términos igual a:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \quad \forall \ |r| < 1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma de la progresión geométrica infinita: 9, 3, 1,...

Solución

Los datos proporcionados por la progresión son $a_1 = 9$, $r = \frac{1}{3}$

Como la razón $|r| < 1$ entonces se utiliza:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{2}$$

En consecuencia, la suma de términos de la progresión geométrica infinita es: $\frac{27}{2}$

2 Obtén la razón de una progresión geométrica infinita si el 1[er] término es 4 y la suma es 8.

Solución

De acuerdo al problema, los datos son:

$$a_1 = 4, S_n = 8$$

Al sustituir en la fórmula de la suma de una progresión infinita:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \qquad 8 = \frac{4}{1-r}$$

Al despejar r de la ecuación se obtiene:

$$8(1-r) = 4 \qquad 8 - 8r = 4 \qquad -8r = -4 \qquad r = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 157

Realiza lo siguiente:

1. Encuentra la suma infinita de términos de la progresión $\div\div -6, 3, \frac{-3}{2},...$

2. Determina la suma de términos de la progresión infinita $\div\div \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},...$

3. ¿Cuál es el valor de la suma infinita de términos de la progresión ÷÷ 6, 2, $\frac{2}{3}$,...?

4. ¿Cuál es el valor de la suma de términos de la progresión infinita ÷÷ $\frac{9}{4}$, $\frac{3}{2}$, 1,...?

5. La suma de términos de una progresión infinita es 3 y la razón es $\frac{1}{24}$. Determina el 1er término de la progresión.

6. El 1er término de una progresión infinita es $2\sqrt{3}$ y la suma de los términos es $5\sqrt{3}$. Encuentra la razón.

7. El 1er término de una progresión infinita es $\frac{a}{b}$ con $b > a$ y $a, b \in N$ y la suma es $\frac{3a}{2b}$. ¿Cuál es la razón de la progresión?

8. Un triángulo equilátero de área 1 cm^2 se divide en 4 triángulos equiláteros más pequeños de área $\frac{1}{4}$ cm^2, a su vez, uno de los 4 triángulos se divide nuevamente en otros 4 triángulos de $\frac{1}{16}$cm^2, y se repite el procedimiento sucesivamente con 1 de los 4 triángulos resultantes. ¿Cuál es el resultado de la suma de las áreas de los triángulos?

9. Se tiene un cuadrado de área 1 024 cm^2 y se inscribe otro cuadrado, de tal manera que los vértices extremos coincidan con los puntos medios del primero, y así sucesivamente. Si ya se conoce que el área de un cuadrado es el doble del que se inscribe, determina la suma de las áreas de todos los cuadrados que se pueden inscribir de esa manera.


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Interpolación de medios geométricos

La interpolación de medios geométricos consiste en encontrar un cierto número de términos, entre el 1º y último, para formar una progresión geométrica.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Interpola 4 medios geométricos en la progresión ÷÷ –3,..., 96.

Solución

Al interpolar 4 medios geométricos, la progresión estará formada por 6 términos, entonces:

$$a_1 = -3,\ n = 6 \text{ y } a_6 = 96$$

Se procede a calcular la razón, a partir de:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[6-1]{\frac{96}{-3}} = \sqrt[5]{-32} = -2$$

Por tanto, la progresión queda como a continuación se muestra:

–3,	–2(–3),	–2(6),	–2(–12),	–2(24),	–2(–48)
–3,	6,	–12,	24,	–48,	96

Los medios geométricos son:

$$6,\ -12,\ 24,\ -48$$

2 Interpola 5 medios geométricos en la siguiente progresión: ÷÷ 16,..., $\frac{1}{256}$.

Solución

Los datos de la progresión son: $a_1 = 16$, $a_7 = \frac{1}{256}$ y $n = 7$

$$r=\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \rightarrow \quad r=\sqrt[7-1]{\frac{\frac{1}{256}}{16}}=\sqrt[6]{\frac{1}{4\,096}}=\frac{1}{4}$$

La progresión que resulta es:

$$16,\ 4,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{256}$$

Por consiguiente, los 5 medios geométricos son:

$$4,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64}$$

Media geométrica

- Sean los números x_1 y x_2, entonces su media geométrica se define por:

$$\sqrt{x_1x_2} \quad \text{si } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son positivos}$$

$$-\sqrt{x_1x_2} \quad \text{si } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son negativos}$$

- Sean los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, entonces, su media geométrica se define como:

$$\sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la media geométrica de 12 y 48.

Solución

Se busca un término que forme una progresión geométrica con los elementos dados, entonces al aplicar la fórmula:

$$\text{Media geométrica}=\sqrt{(12)(48)}=\sqrt{576}=24$$

Esto indica que la progresión geométrica formada es:

$$12,\ 24,\ 48$$

Y se comprueba con la razón:

$$r=\frac{24}{12}=\frac{48}{24}=2$$

Por tanto, la media geométrica es 24

2 Encuentra la media geométrica de los números 3, 9, 27 y 81.

Solución

Se aplica la fórmula:

$$\text{Media geométrica}=\sqrt[4]{(3)(9)(27)(81)}$$

Al simplificar la raíz se obtiene:

$$\sqrt[4]{3^{10}}=\sqrt[4]{3^8\cdot 3^2}=\sqrt[4]{3^8}\cdot\sqrt[4]{3^2}=3^2\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

Finalmente, la media geométrica es: $9\sqrt{3}$

EJERCICIO 158

Realiza la interpolación de los medios geométricos que se indican:

1. Cinco medias geométricas entre $\frac{1}{2}$ y 32.
2. Tres medias geométricas entre 12 y $\frac{4}{27}$.
3. Cuatro medias geométricas entre –3 y –96.
4. Cinco medias geométricas entre $1\frac{1}{2}$ y 6 144.
5. Tres medias geométricas entre $2\sqrt{3}$ y $18\sqrt{3}$.
6. Cuatro medias geométricas entre $\frac{1}{2}$ y $2\frac{26}{243}$.
7. Seis medias geométricas entre –128 y –1
8. Tres medias geométricas entre $(x-1)^2$ y $\frac{(x-1)^6}{81}$.
9. Tres medias geométricas entre $\frac{a^2}{2}$ y $\frac{8}{a^2}$.
10. Cuatro medias geométricas entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y 4.

Determina la media geométrica de los siguientes números:

11. 6 y 9
12. –4 y –8
13. 5 y 25
14. 9 y 16
15. 2, 3 y 6
16. 4, 8 y 32
17. 1, 3, 9 y 27
18. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Interés compuesto

Una de las aplicaciones más importantes de las progresiones geométricas es el interés compuesto, por su constante uso en la economía y la administración.

Considera un capital inicial de $100, que se invierte en una tasa fija de 10% de interés anual compuesto. Calcula el interés compuesto por periodo en los primeros 5 años.

$M_1 = 100(1 + 0.1) = 110$ primer año

$M_2 = 110(1 + 0.1) = 121$ segundo año

$M_3 = 121(1 + 0.1) = 133.1$ tercer año

$M_4 = 133.1(1 + 0.1) = 146.41$ cuarto año

$M_5 = 146.41(1 + 0.1) = 161.051$ quinto año

Ahora bien, si se desea calcular el monto que genera un capital en determinado tiempo, con una tasa de interés fija, se utiliza:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Donde:

M = monto generado

C = capital inicial

i = tasa de interés porcentual anual

n = número de capitalizaciones al año

t = tiempo que se invierte el capital

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Un ama de casa ahorra en un banco \$5 000, la institución bancaria le da un interés anual de 6%. Calcula el monto que obtendrá en 12 años.

Solución

Los datos de este problema son los siguientes:

$C = \$5\,000$ $i = 6\%$ anual $n = 1$ periodo $t = 12$ años

Entonces, al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} \rightarrow M = 5\,000\left(1 + \frac{0.06}{1}\right)^{(1)(12)}$$

$$M = 5\,000\,(1.06)^{12}$$

$$M = 10\,060.98$$

Por tanto, esa ama de casa recibirá después de 12 años la cantidad de \$10 060.98

2 Fernando invierte \$3 000 en un negocio que le dará 10% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente. ¿Cuál será el monto que recibirá al cabo de 5 años?

Solución

Los datos de este problema son los siguientes:

$C = \$3\,000$ $i = 10\%$ anual $n = 2$ periodos $t = 5$ años

Entonces, al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} \rightarrow M = 3\,000\left(1 + \frac{0.10}{2}\right)^{(2)(5)}$$

$$M = 3\,000\,(1.05)^{10}$$

$$M = 4\,886.68$$

Finalmente, Fernando recibirá después de 5 años la cantidad de \$4 886.68

3 Calcula el tiempo para duplicar una inversión de 10% de interés anual capitalizable trimestralmente.

Solución

Si se quiere duplicar el capital, esto indica que $M = 2C$, luego la inversión es capitalizable trimestralmente ($n = 4$), por tanto:

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} \quad \rightarrow \quad 2C = C\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{4t}$$

$$2 = (1.025)^{4t}$$

Se aplican logaritmos de la siguiente manera para despejar t:

$$\log 2 = \log\ (1.025)^{4t} \quad \rightarrow \quad \log 2 = 4t\ (\log 1.025)$$

$$t = \frac{\log 2}{4\log 1.025}$$

$$t = 7 \text{ años}$$

Entonces, se concluye que el tiempo necesario para duplicar la inversión es de 7 años.

EJERCICIO **159**

Determina el monto que se genera en cada uno de los siguientes problemas:

1. \$10 000 que se invierten a una tasa de 10% de interés compuesto anual, durante 10 años.
2. \$32 000 se invierten a 12% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente durante 6 años.
3. \$32 158 que vencen en 7.5 años, a 6% de interés compuesto anual.
4. \$24 000 que vencen en $6\frac{2}{3}$ años, a 9% de interés compuesto anual, capitalizable cuatrimestralmente.
5. \$9 500 que vencen en $8\frac{1}{2}$ años, a 4% de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
6. \$15 400 que vencen en 3 años, a $6\frac{3}{4}$% de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
7. \$950 que vencen en $2\frac{1}{2}$ años, a $12\frac{1}{2}$% de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
8. \$6 000 que vencen en $3\frac{2}{3}$ años, a $10\frac{1}{4}$% de interés compuesto anual, capitalizable mensualmente.
9. \$6 000 que vencen en $3\frac{2}{3}$ años, a $10\frac{1}{4}$% de interés compuesto anual capitalizable cuatrimestralmente.
10. \$154 000 que vencen en 3 años, a $6\frac{3}{4}$% de interés compuesto anual, capitalizable semanalmente.

Resuelve los siguientes problemas:

11. Una compañía de seguros presenta a un padre de familia un fideicomiso para que su hijo de 8 años reciba una cantidad de \$40 000 cuando tenga 22 años. Determina la cantidad inicial que debe destinar si se le ofrece un contrato con una tasa de 6% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente.
12. Una deuda de \$9 000 dentro de 5 años, deberá liquidarse con un pago de \$14 747.55, ¿a qué tasa de interés trimestral está comprometido el préstamo?
13. ¿Qué tasa de interés compuesto anual duplica una inversión en 5 años?

14. ¿Qué tasa de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente, duplica el valor de la inversión en 10 años?
15. ¿Qué tiempo se necesita para triplicar una inversión con rendimiento de 10% de interés compuesto anual, capitalizable cuatrimestralmente?
16. El índice de crecimiento que se plantea para una población de 6 700 habitantes es de 2% anual. ¿Cuánto habrá crecido la población en 20 años?
17. ¿Qué tiempo habrá transcurrido para que un capital de $5 300 se convirtiera en $5 627.45, con una tasa de interés compuesto anual de 2%, capitalizable mensualmente?
18. Una empresa pide un préstamo bancario de $400 000 para la compra de maquinaria. Si dicho crédito está sujeto a 5% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente, y el tiempo para pagarlo es de 10 años, ¿cuál será el monto que se pagará?
19. Emilia invierte $85 000 durante 3 años y recibe un monto de $92 881. ¿Cuál fue la tasa de interés compuesto anual a la que fue sometida dicha inversión?
20. ¿Cuál fue el interés que generaron $20 000 si se invirtieron con una tasa de 12% de interés compuesto anual, capitalizable mensualmente durante 4 años?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Depreciación

Se define como la pérdida de valor de un activo físico (automóviles y casas, entre otros), como consecuencia del uso o del transcurso del tiempo. Muchos de ellos tienen una vida útil durante un periodo finito.

En este capítulo sólo se abordará el método de porcentaje fijo, que se define como:

$$S = C(1-d)^t$$

Donde:

S: valor de salvamento o valor de desecho

C: costo original del activo

d: tasa de depreciación anual

t: vida útil calculada en años

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La tasa de depreciación de un automóvil del año está calculada en 8% anual. Si un cliente paga en una agencia $120 000 por una unidad, ¿cuál será el valor de desecho del automóvil al final de su vida útil, si se calcula que es de 5 años?

Solución

De acuerdo con los datos:

$$C = 120\ 000,\ d = 8\% = 0.08 \ \text{ y } \ t = 5$$

Al sustituir los valores en la fórmula y desarrollar las operaciones se obtiene:

$$S = 120\ 000(1-0.08)^5 = 120\ 000(0.92)^5 = 120\ 000(0.6590) = 79\ 080$$

Por tanto, el valor del automóvil a los cinco años es de $79 080

2 Una pizzería compra una motocicleta en $42 000 para el reparto de su mercancía. Se calcula que su vida útil será de 4 años y al final de ella su valor de desecho será de $15 000, determina la tasa de depreciación anual de la motocicleta.

Solución

De acuerdo con los datos:

$$C = 42\ 000,\ S = 15\ 000 \text{ y } t = 4$$

Al sustituir los valores en la fórmula y despejando d, se obtiene:

$$15\ 000 = 42\ 000(1-d)^4 \qquad 1-d = \sqrt[4]{\frac{15\ 000}{42\ 000}} \qquad 1-d = 0.7730$$

$$d = 0.227$$
$$d = 22.7\%$$

Por consiguiente, la tasa de depreciación es de 22.7%

3 Se adquirió una máquina de bordado, cuyo precio fue de \$78 600. Si su valor de desecho es de \$20 604.50 y la tasa de depreciación es de 20% anual, calcula la vida útil de la bordadora.

Solución

De acuerdo con los datos:

$$C = 78\ 600, \quad S = 20\ 604.50 \quad \text{y} \quad d = 20\% = 0.20$$

Al sustituir en la fórmula:

$$S = C(1-d)^t \qquad 20\ 604.5 = 78\ 600(1-0.20)^t$$

Se aplican logaritmos para despejar t:

$$t = \frac{\log(20\ 604.5) - \log(78\ 600)}{\log(0.80)} = 6$$

Por tanto, la vida útil de la máquina de bordado es de 6 años.

EJERCICIO 160

Realiza los siguientes problemas:

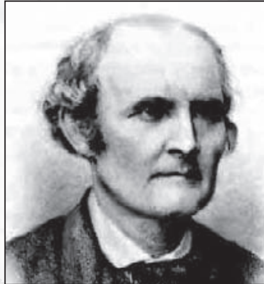
1. La tasa de depreciación de una máquina está calculada en 12% anual. Si su costo es de \$200 000, ¿cuál será su valor de desecho, si tiene una vida útil de 10 años?
2. El costo de una impresora es de \$8 000 y se calcula que su vida útil es de 3 años. Si la tasa de depreciación es de 23%, determina su valor de desecho.
3. Un agricultor compró un tractor con valor de \$300 000 y calcula que tiene una vida útil de 7 años, al cabo de los cuales su valor de desecho es de \$40 045. ¿Cuál es la tasa de depreciación del tractor?
4. Un edificio tiene un costo de \$1 200 000, se le ha estimado un valor de salvamento de \$226 432, y una probable vida útil de 20 años. Determina su tasa de depreciación anual.
5. Una escuela adquirió una camioneta en \$230 000 para el transporte de material, si la tasa de depreciación anual es de 12%, ¿cuál será su valor al cabo de 3 años?
6. Un automóvil tiene un costo de \$96 000, una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de \$31 457. Determina la tasa de depreciación anual.
7. Se adquirió una planta de luz cuyo costo fue de \$220 000, se le ha estimado un valor de salvamento de \$30 238; si la tasa de depreciación es de 18% anual, ¿cuál es su vida útil?

 **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

CAPÍTULO 27

MATRICES

Reseña HISTÓRICA



Arthur Cayley, matemático británico. En 1838 ingresó en el Trinity College de Cambridge, donde estudió matemáticas y fue nombrado profesor de esta disciplina; permaneció en Cambridge durante el resto de sus días. Uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, publicó a lo largo de su vida más de novecientos artículos científicos. Es considerado como uno de los padres del álgebra lineal, introdujo el concepto de matriz y estudió sus diversas propiedades. Con posterioridad empleó estos resultados para estudiar la geometría analítica de dimensión *n*.

Arthur Cayley (1821-1895)

Definición

Una matriz es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los números a_{11}, a_{12}, a_{13},..., a_{ij} reciben el nombre de elementos de la matriz. Para simplificar la notación, la matriz se expresa: $A = (a_{ij})$. El primer subíndice de cada elemento indica el renglón, y el segundo la columna de la matriz donde se encuentra el elemento.

$$\begin{matrix} & & C_1 & C_2 & C_3 & & C_n & \\ & & \left[a_{11} \right. & a_{12} & a_{13} & \ldots & \left. a_{1n} \right] & R_1 \\ & & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & R_2 \\ a_{31} \rightarrow \text{Columna} & \rightarrow & \textcircled{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & R_3 \\ \downarrow & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \text{Renglón} & & a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & R_m \end{matrix}$$

Donde: $R_1, R_2, \ldots, R_m$ son renglones y $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son columnas.

Ejemplos

Sea la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & -7 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determina: a_{21}, a_{22}, a_{33} y a_{43}

Solución

a_{21}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 1, es decir, $a_{21} = -3$
a_{22}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 2, es decir, $a_{22} = 4$
a_{33}: es el valor que se encuentra en el renglón 3, columna 3, es decir, $a_{33} = -7$
a_{43}: es el valor que se encuentra en el renglón 4, columna 3, es decir, $a_{43} = 1$

Orden de una matriz

El tamaño de una matriz de m renglones y n columnas se conoce como orden y se denota por $m \times n$.

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Orden $= 1 \times 3$ Orden $= 3 \times 1$ Orden $= 2 \times 2$ Orden $= 2 \times 3$

Número de elementos de una matriz

En una matriz de m renglones y n columnas, el número de elementos es $m \times n$, m veces n elementos.

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$m \times n = 1 \times 3 = 3$ — 3 elementos

$m \times n = 3 \times 1 = 3$ — 3 elementos

$m \times n = 2 \times 2 = 4$ — 4 elementos

$m \times n = 2 \times 3 = 6$ — 6 elementos

Tipos de matrices

Matriz cuadrada. Es aquella cuyo número de renglones es igual al número de columnas; es decir, una matriz de n renglones con n columnas, recibe el nombre de matriz cuadrada de orden n.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 2 — Matriz cuadrada de orden 3 — Matriz cuadrada de orden n

Ejemplos

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 3

Matriz renglón. Es aquella de orden $1 \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Orden $= 1 \times 4$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & \frac{1}{3} & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Orden $= 1 \times 5$

Matriz columna. Es aquella de orden $m \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Orden $= 2 \times 1$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Orden $= 4 \times 1$

Matriz cero (matriz nula). Es aquella en la cual todos los elementos son cero.

Ejemplos

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz nula de orden 1×3 — Matriz nula de orden 4×1 — Matriz nula de orden 3 — Matriz nula de orden 3×2

Matriz diagonal. Es aquella matriz de orden n que tiene elementos distintos de cero en la diagonal principal, es decir, una matriz cuadrada $M = \left(m_{ij}\right)$, donde $m_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad (matriz unidad). Es aquella matriz diagonal de orden n, cuyos elementos distintos de cero son 1, se denota por $\boldsymbol{I_n}$

$$\boldsymbol{I_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{I_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad de orden 2 — Matriz identidad de orden 3

Matriz triangular superior. Es aquella matriz cuadrada de orden n, donde los elementos $a_{ij} = 0$, para $i > j$, es decir, todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz superior de orden 2

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz superior de orden 3

Matriz triangular inferior. Es aquella matriz cuadrada de orden n, donde $a_{ij} = 0$, para $i < j$, es decir, todos los elementos por arriba de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz inferior de orden 2

$$I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inferior de orden 4

Matriz simétrica. Es aquella matriz cuadrada de orden n, tal que los elementos $a_{ij} = a_{ji}$

Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

La matriz A de orden 2, es simétrica si:

$$\{ a_{12} = a_{21}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

La matriz B de orden 3, es simétrica si:

$$\begin{cases} b_{12} = b_{21} \\ b_{13} = b_{31} \\ b_{23} = b_{32} \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz C de orden 3, es simétrica porque:

$$\begin{cases} c_{12} = c_{21} = 6 \\ c_{13} = c_{31} = -3 \\ c_{23} = c_{32} = 4 \end{cases}$$

Matrices iguales. Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y sus elementos correspondientes son respectivamente iguales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si las matrices $\begin{bmatrix} \sqrt{16} & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 4 & (-1)^2 & 5 \\ -1 & \sqrt{4} & -3 \\ 1 & 0 & \sqrt[3]{27} \end{bmatrix}$ son iguales.

Solución

Las matrices son iguales porque son del mismo orden y sus elementos son iguales:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{16} & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 4 & (-1)^2 & 5 \\ -1 & \sqrt{4} & -3 \\ 1 & 0 & \sqrt[3]{27} \end{bmatrix}$$

2 Determina el valor de x, y, w y z, para que:

$$\begin{bmatrix} x+y & 6z \\ 2w & 2x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Solución

Las matrices tienen la misma dimensión, al realizar la igualdad de términos se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 6z=2 \\ 2w=6 \\ 2x-3y=-7 \end{cases}$$

Al resolver el sistema resulta que $x = -2$, $y = 1$, $w = 3$ y $z = \frac{1}{3}$

EJERCICIO 161

Determina los valores de las incógnitas, para que las matrices sean iguales.

1. $\begin{bmatrix} a & 3 \\ 4 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y+1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3 & z \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} t+4 & 6-r & 2q+1 \end{bmatrix} = [6-t \quad 5 \quad 7-q]$

4. $\begin{bmatrix} 7 & 3-x \\ y & -1 \\ 8 & 2 \\ 0 & z+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -4 \\ 2-y & -1 \\ 8 & 2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación por un escalar

Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ y λ un número real, entonces $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ es decir, si:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ entonces } \lambda\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \ldots & \lambda a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta nueva matriz también recibe el nombre de *matriz escalar*.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ determina $3A$.

Solución

El escalar 3 se multiplica por cada uno de los elementos de la matriz.

$$3A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2) & 3(-1) \\ 3(4) & 3(6) \\ 3(0) & 3(-2) \\ 3(1) & 3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 18 \\ 0 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 18 \\ 0 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

2 Si $B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ encuentra $\frac{1}{2}B$.

Solución

El escalar $\frac{1}{2}$ multiplica a cada uno de los términos de la matriz.

$$\frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(6) & \frac{1}{2}(-3) & \frac{1}{2}(4) \\ \frac{1}{2}(5) & \frac{1}{2}(-2) & \frac{1}{2}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por tanto, $\frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Suma

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de orden $m \times n$, la suma de A y B está determinada por:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

Donde $A + B$ es la matriz de orden $m \times n$ que resulta de sumar los elementos correspondientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina $A + B$ para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución

Las matrices tienen el mismo orden, en este caso, 3×2, entonces la suma se puede realizar; la definición indica que cada término de la primera matriz se suma con los términos correspondientes de la segunda matriz, es decir, se suman $a_{11} + b_{11}$, $a_{12} + b_{12}$, $a_{21} + b_{21}$, …, $a_{31} + b_{31}$,

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & -7\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+2 & 6+(-1)\\ 2+6 & 4+(-7)\\ -1+4 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 5\\ 8 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

Por tanto, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5 & 5\\ 8 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

2 Sean las matrices:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}5 & -2 & 6 & -3\\ -2 & 8 & -7 & 8\end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 8 & -5\\ 6 & 2 & 1 & -7\end{bmatrix}$$

Determina $3\boldsymbol{C}+2\boldsymbol{D}$

Solución

Se determina cada matriz escalar:

$$3\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3(5) & 3(-2) & 3(6) & 3(-3)\\ 3(-2) & 3(8) & 3(-7) & 3(8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & -6 & 18 & -9\\ -6 & 24 & -21 & 24\end{bmatrix}$$

$$2\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2(-1) & 2(-4) & 2(8) & 2(-5)\\ 2(6) & 2(2) & 2(1) & 2(-7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -8 & 16 & -10\\ 12 & 4 & 2 & -14\end{bmatrix}$$

Las matrices tienen el mismo orden, 2×4, al sumar se obtiene:

$$3\boldsymbol{C}+2\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}15 & -6 & 18 & -9\\ -6 & 24 & -21 & 24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -8 & 16 & -10\\ 12 & 4 & 2 & -14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & -14 & 34 & -19\\ 6 & 28 & -19 & 10\end{bmatrix}$$

Finalmente, $3\boldsymbol{C}+2\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}13 & -14 & 34 & -19\\ 6 & 28 & -19 & 10\end{bmatrix}$

Inverso aditivo

El inverso aditivo de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden $m \times n$ es $-\boldsymbol{A}$.

Si $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, entonces $-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})$, es decir, el inverso aditivo de una matriz se obtiene al multiplicar cada elemento por el escalar -1, en otras palabras, el inverso aditivo de una matriz $\boldsymbol{A}$ es otra matriz $-\boldsymbol{A}$, tal que $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$, donde $\boldsymbol{0}$ es la matriz cero o nula.

Ejemplo

Si $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ -10 & 1 & 3\end{bmatrix}$, determina $-\boldsymbol{A}$, $-\boldsymbol{B}$ y verifica que $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

Solución

Se obtiene la matriz inverso aditivo de la matriz $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{A}=(-1)\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1(-3) & -1(-5)\\ -1(7) & -1(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ -10 & 1 & 3\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{B}=(-1)\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ -10 & 1 & 3\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & -5 & -7\\ 10 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

Se realiza la operación $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+3 & -5+5\\ 7-7 & -2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Por tanto, $-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}$, $-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & -5 & -7\\ 10 & -1 & -3\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$

Resta

La diferencia o resta de dos matrices $m\times n$, se define:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

Donde $-\boldsymbol{B}$ es el inverso aditivo de $\boldsymbol{B}$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ si

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

Solución

Para determinar la resta, la segunda matriz se multiplica por el escalar −1, entonces la nueva matriz se suma con la primera y queda como resultado:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 5\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$

2 Sean las matrices $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, determinar $3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}$.

Solución

La operación $3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}$ se puede expresar como en $3\boldsymbol{M}+(-2\boldsymbol{N})$, se obtienen las matrices escalares y finalmente se suman.

$$3\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}-9 & 3\\ 12 & 15\\ 0 & 3\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad -2\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}-4 & 8\\ 2 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Entonces,

$$3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}=3\boldsymbol{M}+(-2\boldsymbol{N})=\begin{bmatrix}-9 & 3\\ 12 & 15\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 8\\ 2 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9-4 & 3+8\\ 12+2 & 15+0\\ 0+0 & 3-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13 & 11\\ 14 & 15\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

Finalmente, $3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}$ es $\begin{bmatrix}-13 & 11\\ 14 & 15\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

3 Dada la siguiente igualdad:

$3\begin{bmatrix}m+2 & n\\ 1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m-2 & -n\\ y & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 8\\ 3 & 7\end{bmatrix}$, determina el valor de las incógnitas.

Solución

Se realizan las operaciones indicadas.

$$3\begin{bmatrix}m+2 & n\\ 1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m-2 & -n\\ y & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(m+2)-(m-2) & 3n-(-n)\\ 3(1)-y & 3(4)-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2m+8 & 4n\\ 3-y & 7\end{bmatrix}$$

Luego, $\begin{bmatrix}2m+8 & 4n\\ 3-y & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 8\\ 3 & 7\end{bmatrix}$

Los términos resultantes se igualan con los términos correspondientes de la matriz del segundo miembro, y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}2m+8=10\\ 4n=8\\ 3-y=3\end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtienen los siguientes valores: $y=0$, $m=1$ y $n=2$

EJERCICIO **162**

Para las siguientes matrices, efectúa $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}$, $4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$ y $2\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{B}$

1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-6 & 7 & 3\end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -7\\ 1 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 2 & -6\\ 1 & 7\end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & -6 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -6 & 4\\ -3 & 2 & 7\end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & 5 & \frac{1}{8}\\ 0 & 3 & 2\\ 7 & \frac{1}{5} & 0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & -5 & 8\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

En las siguientes igualdades, determina el valor de las incógnitas.

6. $\begin{bmatrix}a-7 & 5 & w\\ v-4 & 1-c & d\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3 & b-1 & -4\\ -v & -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 7 & -w\\ -1 & -7 & 5\end{bmatrix}$

7. $2\begin{bmatrix} x+1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1-w \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & n \\ y-1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8-n \\ -5 & 6 \\ 0 & -w \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -w & 3 \\ 11 & 9 & 12 \\ y & -7 & 2v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & -4 & 2 \\ -1 & z-1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 10 & 10 & 13 \\ 6 & -4 & v \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

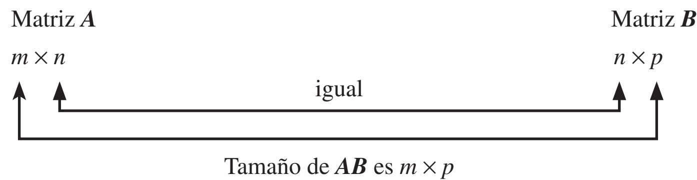
Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$, y $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ una matriz de orden $n \times p$, la multiplicación $\boldsymbol{AB}$ da como resultado la matriz $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ de orden $m \times p$, tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Para:

$i = 1, 2, 3, 4,..., m;$ $\qquad$ $j = 1, 2, 3, 4,..., n$

El número de columnas de la matriz $\boldsymbol{A}$, es igual al número de renglones de la matriz $\boldsymbol{B}$.



Tamaño de $\boldsymbol{AB}$ es $m \times p$

Ejemplos

Matriz *A*	Matriz *B*	Matriz *AB*
2 × 3	3 × 4	2 × 4
1 × 2	2 × 3	1 × 3
5 × 4	4 × 2	5 × 2
3 × 1	3 × 1	No definida

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la multiplicación de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

$\boldsymbol{A}$ es una matriz de 2×2 y $\boldsymbol{B}$ de 2×3, por tanto, la multiplicación se puede realizar. Al aplicar la definición se procede de la siguiente manera: se multiplica el primer renglón por cada una de las columnas de la segunda matriz.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2)+3(-1) & 2(0)+3(1) & 2(3)+3(5) \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 21 \\ & & \end{bmatrix}$$

Se realiza la misma operación con el segundo renglón.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 5(2)+4(-1) & 5(0)+4(1) & 5(3)+4(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 6 & 4 & 35 \end{bmatrix}$$

(continúa)

(*continuación*)

Finalmente, se unen los resultados para obtener la matriz $\boldsymbol{AB}$,

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 21\\ 6 & 4 & 35\end{bmatrix}$$

Su orden es de 2×3

2 Determina $\boldsymbol{R}^2$ si $\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

Solución

Se transforma $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{RR}$; esto es posible si $\boldsymbol{R}$ es una matriz cuadrada y se procede a realizar las operaciones indicadas en el ejemplo anterior.

$$\boldsymbol{R}^2=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3(3)+1(0)-1(-2) & 3(1)+1(4)-1(1) & 3(-1)+1(2)-1(0)\\ 0(3)+4(0)+2(-2) & 0(1)+4(4)+2(1) & 0(-1)+4(2)+2(0)\\ -2(3)+1(0)+0(-2) & -2(1)+1(4)+0(1) & -2(-1)+1(2)+0(0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 6 & -1\\ -4 & 18 & 8\\ -6 & 2 & 4\end{bmatrix}\text{ entonces }\boldsymbol{R}^2=\begin{bmatrix}11 & 6 & -1\\ -4 & 18 & 8\\ -6 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

Propiedades de las matrices

Sean las matrices $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ de orden $m\times n$, $\boldsymbol{O}$ la matriz nula de $m\times n$, $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad y r, s escalares, entonces:

Propiedades	
Conmutativa de la suma	$\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}$
Asociativa de la suma	$\boldsymbol{P}+(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R})=(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})+\boldsymbol{R}$
Identidad de la suma	$\boldsymbol{P}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}$
Distributiva izquierda	$r(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})=r\boldsymbol{P}+r\boldsymbol{Q}$
Distributiva derecha	$(r+s)\,\boldsymbol{P}=r\boldsymbol{P}+s\boldsymbol{P}$
Inverso aditivo	$\boldsymbol{P}+(-\boldsymbol{P})=\boldsymbol{O}$
Asociativa de la multiplicación de escalares	$(r\cdot s)\,\boldsymbol{P}=r(s\boldsymbol{P})$
Asociativa de la multiplicación	$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QR})=(\boldsymbol{PQ})\,\boldsymbol{R}$
Identidad de la multiplicación	$\boldsymbol{IP}=\boldsymbol{PI}=\boldsymbol{P}$
Distributiva por la izquierda	$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R})=\boldsymbol{PQ}+\boldsymbol{PR}$
Distributiva por la derecha	$(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{QP}+\boldsymbol{RP}$

EJERCICIO 163

Para las siguientes matrices determina ***AB***, ***BA***, ***A***(***B*** – 2***C***) y ***A***(***BC***), en caso de ser posible.

1. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

6. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Determinantes

El determinante de una matriz ***A*** de orden *n*, es un número escalar que se relaciona con la matriz, mediante una regla de operación. Denotada por det***A*** = $|A|$

Sea la matriz de orden 2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El determinante de ***A*** está dado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

(–) (+)

Por tanto,

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplo

Evalúa el determinante de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

Cada elemento de la matriz se sustituye en la fórmula y se realizan las operaciones.

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (4)(5)-(-2)(1) = 20 + 2 = 22$$

Finalmente, el det***A*** = 22

Sea la matriz de orden 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se escribe el determinante de 3 × 3, para resolverlo se repiten los dos primeros renglones y se multiplican las entradas en diagonal como se indica:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

Por tanto, el determinante es:

$$\det\boldsymbol{A} = (a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}) - (a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23} + a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13})$$
$$\det\boldsymbol{A} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}$$

Ejemplo

El determinante de la matriz $\boldsymbol{B}$, es:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución

Se forma el siguiente arreglo: se aumentan los dos primeros renglones del determinante, como se indica, después se procede a sustituir los términos en la fórmula y se realizan las operaciones indicadas en la fórmula.

$$\det(\boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

Por consiguiente, el determinante es:

$$\det\boldsymbol{B} = (2)(3)(6) + (-2)(1)(0) + (-5)(-1)(4) - (-2)(-1)(6) - (2)(1)(4) - (-5)(3)(0)$$
$$= 36 + 0 + 20 - 12 - 8 - 0 = 36$$

En consecuencia, el $\det\boldsymbol{B} = 36$

Propiedades

1. Si se intercambian dos renglones de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden n, el determinante de la matriz resultante es:

$$\det\boldsymbol{A} = -\det\boldsymbol{A}$$

2. Si son cero todos los elementos de un renglón o columna de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden n, entonces

$$\det\boldsymbol{A} = 0$$

3. Si 2 renglones son iguales de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden n, entonces

$$\det\boldsymbol{A} = 0$$

4. Si se tiene una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden n, ya sea matriz triangular superior o inferior, entonces

$$\det\boldsymbol{A} = \text{producto de los elementos de la diagonal principal}$$

5. Si un renglón de una matriz se multiplica por un escalar λ, entonces

$$\det \boldsymbol{A} = \lambda \det \boldsymbol{A}$$

6. Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices de orden n, entonces

$$\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica la propiedad 2 si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución

Se observa que en uno de los renglones de la matriz todos son ceros, luego se procede a encontrar el determinante de la matriz A

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0)-(0)(-3) = 0 - 0 = 0$$

(−) (+)

Finalmente, el $\det \boldsymbol{A} = 0$, y se verifica la propiedad 2

2 Verifica la propiedad 4 si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Solución

Se observa que la matriz es triangular superior, entonces el producto de la diagonal principal es:

$$(5)(4)=20$$

Luego, se procede a hallar el determinante de la matriz A

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (5)(4)-(0)(1) = 20 - 0 = 20$$

(−) (+)

Por tanto, $\det \boldsymbol{A} = (5)(4) = 20$

Finalmente, se verifica la propiedad 4

3 Verifica que el $\det \boldsymbol{A} = 0$ si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Solución

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(−) (−) (−) (+) (+) (+)

$$\det \boldsymbol{A} = (1)(3)(2)+(2)(3)(2)+(1)(3)(4)-(2)(3)(2)-(1)(3)(4)-(1)(3)(2)$$
$$= 6 + 12 + 12 - 12 - 12 - 6 = 0$$

Por consiguiente,

$$\det \boldsymbol{A} = 0$$

EJERCICIO 164

Encuentra el determinante de las siguientes matrices:

1. $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ 2. $B=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 1 & -7\end{bmatrix}$ 3. $C=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 10 & -4\end{bmatrix}$ 4. $E=\begin{bmatrix}3 & -1 & 8\\ 5 & 6 & 4\\ 0 & 4 & -3\end{bmatrix}$ 5. $D=\begin{bmatrix}-2 & -5 & -1\\ -4 & -1 & -3\\ 1 & 0 & -6\end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Matriz inversa

Dada una matriz cuadrada $\boldsymbol{P}$ de orden n, si existe una matriz $\boldsymbol{Q}$ tal que:

$$\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{QP}=\boldsymbol{I}_n$$

Entonces, se dice que la matriz $\boldsymbol{Q}$ es la matriz inversa de $\boldsymbol{P}$ y se denota $\boldsymbol{P}^{-1}$, de tal forma que:

$$\boldsymbol{PP}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_n$$

Donde:

$\boldsymbol{I}_n$: Matriz identidad de orden n

Para que exista la inversa de la matriz P es necesario que la matriz sea cuadrada y el $\det P \neq 0$

Método de Gauss-Jordan

Se utiliza la matriz aumentada, la cual se obtiene al unir la matriz cuadrada de orden n con la matriz identidad $\boldsymbol{I}_n$; una vez aumentada la matriz, por medio de operaciones elementales, se obtiene otra matriz.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn}\end{array}\right]$$

Si en el proceso algún elemento de la diagonal principal es cero, entonces la matriz no tiene inversa.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén R^{-1}, si $R=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$.

Solución

Se aumenta la matriz y se efectúan las operaciones indicadas:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]_{R_2\leftrightarrow R_1}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]_{2R_1-R_2\rightarrow R_2}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 0 & 1\\ 0 & -7 & -1 & 2\end{array}\right]_{7R_1-3R_2\rightarrow R_1}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc}7 & 0 & 3 & 1\\ 0 & -7 & -1 & 2\end{array}\right]_{\frac{R_1}{7}\rightarrow R_1}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & -7 & -1 & 2\end{array}\right]_{-\frac{R_2}{7}\rightarrow R_2}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\end{array}\right]$$

Por tanto, $R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

2 Determina B^{-1} si $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{2R_1-R_2\to R_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{4R_1-R_3\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right]_{10R_2-3R_3\to R_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_2+2R_3\to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 18 & -21 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{\frac{1}{3}R_2\to R_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_1+R_3\to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 9 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_1-2R_2\to R_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]$$

Finalmente, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 6 & -7 & 2 \\ 8 & -10 & 3 \end{bmatrix}$

EJERCICIO 165

Determina la matriz inversa de las siguientes matrices:

1. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

6. $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

7. $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

8. $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Inversa de una matriz para resolver sistemas de ecuaciones

Sea el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Si el sistema se expresa en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{C}$$

Si existe $\boldsymbol{A}^{-1}$, se multiplican por $\boldsymbol{A}^{-1}$ *a* ambos miembros de la igualdad.

Se obtiene: $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$, pero $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$ entonces, $\boldsymbol{IX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$.

Esta última expresión resuelve el sistema de ecuaciones.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$.

Solución

Se definen las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{C}$, entonces: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

Luego, se obtiene la matriz inversa $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]_{R_2 \leftrightarrow R_1} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]_{2R_1 - R_2 \rightarrow R_2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array}\right]_{R_1 - \frac{4}{11}R_2 \rightarrow R_1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array}\right]_{\frac{1}{11}R_2 \rightarrow R_2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right]$$

Por consiguiente, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$

Finalmente, para hallar los valores de las incógnitas se aplica la expresión: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$
Entonces:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11}(7)+\frac{3}{11}(-2) \\ -\frac{1}{11}(7)+\frac{2}{11}(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son:

$$x = 2,\ y = -1$$

2 Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} x+y-2z=-4 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x-2y+z=7 \end{cases}$

Solución

Se definen las matrices **A**, **X** y **C**, entonces: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

Se obtiene la matriz A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\substack{-2R_1+R_2\rightarrow R_2 \\ -3R_1+R_3\rightarrow R_3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]_{-\frac{1}{3}R_2\rightarrow R_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\substack{-R_2+R_1\rightarrow R_1 \\ 5R_2+R_3\rightarrow R_3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right]_{\frac{1}{2}R_3\rightarrow R_3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right]_{\substack{R_3+R_1\rightarrow R_1 \\ R_3+R_2\rightarrow R_2}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Por tanto, $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(*continúa*)

(*continuación*)

Finalmente, para hallar los valores de las incógnitas se aplica la expresión:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-4)+\left(-\frac{1}{2}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \\ \frac{5}{6}(-4)+\left(-\frac{7}{6}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \\ \frac{1}{6}(-4)+\left(-\frac{5}{6}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son: $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$

EJERCICIO **166**

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de la inversa de una matriz.

1. $\begin{cases} 4x - y = 22 \\ 3x + 5y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7m + 9n = -10 \\ 2n - 3m = 16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6a + 7b = -4 \\ a - 2b = 31 \end{cases}$

4. $\begin{cases} a - 2b + c = 12 \\ 2a + b - c = 3 \\ a - b + 3c = 13 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x + 4y + z = 12 \\ 3x - 5y - 2z = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = -2 \\ x - y + 4z = -6 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 28

RAÍCES DE UN POLINOMIO

Reseña HISTÓRICA



Niccolo Fontana-Tartaglia (1500-1557)

Nació en Brescia y murió en Venecia. Su verdadero nombre era Fontana, pero fue apodado Tartaglia por su tartamudez, causada por una cuchillada asestada por un soldado francés, que le derivó secuelas en el habla. Fue el primero en idear un procedimiento general de resolución de ecuaciones de tercer grado, manteniendo en secreto sus métodos. Cardano le engañó bajo la promesa de mantener en secreto estos métodos pero, faltando a su honor, los publicó. En 1537 publicó su primer libro sobre teoría balística.

Niccolo Fontana-Tartaglia
(1500-1557)

Teorema del factor y del residuo

Sea el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ y $bx + c$ un binomio, entonces:

a) $bx + c$ es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = 0$

b) $bx + c$ no es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = k$, con $k \neq 0$, donde k es el residuo del cociente de $f(x)$ con $bx + c$, asimismo, $-\frac{c}{b}$ resulta de resolver la ecuación $bx + c = 0$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $3x - 1$ es factor del polinomio $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 19x + 6$.

Solución

El binomio $3x - 1$, se iguala con cero y se despeja x

$$3x - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{1}{3}$$

Este resultado de la ecuación se evalúa en $f(x)$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 19\left(\frac{1}{3}\right) + 6$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{27}\right) + 2\left(\frac{1}{9}\right) - 19\left(\frac{1}{3}\right) + 6 = 0$$

Como el resultado de $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, entonces se concluye que $3x - 1$ sí es factor del polinomio.

2 Obtén el residuo de dividir $4x^3 - 11x^2 - x + 14$ entre $x - 3$.

Solución

Al aplicar el teorema del residuo, se iguala con cero $x - 3$ y el resultado del despeje se sustituye en el polinomio $f(x) = 4x^3 - 11x^2 - x + 14$

$$f(3) = 4(3)^3 - 11(3)^2 - (3) + 14 = 20$$

Por tanto el residuo de la división es 20

3 Identifica cuál de las siguientes expresiones $5x + 1$, $x - 4$ y $x + 4$, son factores del polinomio $f(x) = 10x^3 + 57x^2 + 71x + 12$.

Solución

Las expresiones $5x + 1$, $x - 4$ y $x + 4$, se igualan con cero y se despeja a x, para luego evaluar los valores obtenidos en $f(x)$:

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = 10\left(-\frac{1}{5}\right)^3 + 57\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + 71\left(-\frac{1}{5}\right) + 12 = 0$$ por tanto $5x + 1$ sí es factor

$$f(4) = 10(4)^3 + 57(4)^2 + 71(4) + 12 = 1848,$$ por tanto $x - 4$ no es factor

$$f(-4) = 10(-4)^3 + 57(-4)^2 + 71(-4) + 12 = 0,$$ por tanto $x + 4$ sí es factor

4 Determina el valor de k, tal que $f(x) = 3kx^3 + (4k + 5)x^2 - 19x - 12$, sea divisible por: $x + 3$.

Solución

Para que $f(x)$ sea divisible por $x + 3$, se debe de cumplir que $f(-3) = 0$, entonces:

$$f(-3) = 3k(-3)^3 + (4k + 5)(-3)^2 - 19(-3) - 12 = 0$$

Se resuelve la ecuación para k:

$$-45k + 90 = 0 \qquad \rightarrow \qquad k = 2$$

Por tanto, el valor de $k = 2$ y el polinomio queda expresado como:

$$f(x) = 6x^3 + 13x^2 - 19x - 12$$

5 Determina los valores de k, tales que $f(x) = kx^3 - (k^2 - 2)x^2 - (k + 3)^2x - 20$, sea divisible por: $3x + 2$.

Solución

Para que el polinomio sea divisible por $3x + 2$, se debe cumplir que $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$, entonces:

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = k\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(k^2 - 2\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(k+3\right)^2\left(-\frac{2}{3}\right) - 20 = 0$$

Al desarrollar la expresión se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$3k^2 + 50k - 177 = 0$$

Cuyas soluciones para k, son los valores, 3 y $-\frac{59}{3}$, entonces los polinomios son:

$$f(x) = 3x^3 - 7x^2 - 36x - 20 \ \text{ y } \ f(x) = -\frac{1}{9}\left[177x^3 + 3\,463x^2 + 2\,500x + 180\right]$$

Raíces

Dado el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, el número de raíces o ceros corresponde al grado n del polinomio y son aquellos valores que cumplen la condición $f(x_n) = 0$, éstos pueden ser reales, complejos o ambos, de acuerdo a las características propias del polinomio.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que -2, 1 y 3 son raíces del polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Solución

Se sustituyen los valores -2, 1 y 3 en el polinomio:

$$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$$

$$f(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

$$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 5(3) + 6 = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$$

Todos los residuos son iguales a 0, por consiguiente, se demuestra que estos valores son raíces o ceros del polinomio.

2 Prueba que $-i$, i y $\frac{1}{3}$ son las raíces del polinomio $f(x) = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$.

Solución

Los valores $-i$, i y $\frac{1}{3}$ son sustituidos en el polinomio

$$f(-i) = 3(-i)^3 - (-i)^2 + 3(-i) - 1 = 3(-i^3) - (i^2) - 3i - 1 = -3i^3 - i^2 - 3i - 1$$
$$= -3(-i) - (-1) - 3i - 1$$
$$= 3i + 1 - 3i - 1$$
$$= 0$$

$$f(i) = 3(i)^3 - (i)^2 + 3(i) - 1 = 3(i^3) - (i^2) + 3i - 1 = 3i^3 - i^2 + 3i - 1$$
$$= 3(-i) - (-1) + 3i - 1$$
$$= -3i + 1 + 3i - 1$$
$$= 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 3\left(\frac{1}{27}\right) - \frac{1}{9} + 1 - 1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 1 - 1 = 0$$

Por tanto, se prueba que $-i$, i y $\frac{1}{3}$ son las raíces del polinomio.

3 Determina cuáles de los siguientes números 4, 1, $1 + i$ y $-1 - 2i$ son ceros del polinomio $f(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$.

Solución

Se sustituye uno a uno los números en el polinomio, esto con el fin de saber cuáles son raíces del mismo.

$$f(4) = (4)^4 + 5(4)^3 + 7(4)^2 + 7(4) - 20 = 696$$
$$f(1) = (1)^4 + 5(1)^3 + 7(1)^2 + 7(1) - 20 = 0$$
$$f(1+i) = (1+i)^4 + 5(1+i)^3 + 7(1+i)^2 + 7(1+i) - 20 = -27 + 31i$$
$$f(-1-2i) = (-1-2i)^4 + 5(-1-2i)^3 + 7(-1-2i)^2 + 7(-1-2i) - 20 = 0$$

Por consiguiente, los valores 1 y $-1 - 2i$ son los únicos que son raíces del polinomio.

Si las raíces de un polinomio son $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ entonces el polinomio se puede expresar de la siguiente forma:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el polinomio cuyas raíces son los números -3, 0 y 4.

Solución

Dado que existen tres raíces, el polinomio a obtener es:

$$f(x) = (x - (-3))(x - 0)(x - (4))$$
$$f(x) = (x + 3)(x)(x - 4),$$

Se desarrolla el producto de los binomios y finalmente el polinomio es:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 12x$$

2 Determina el polinomio de tercer grado con ceros en -1, $\frac{1}{2}$ y $f(-2)=-\frac{35}{8}$.

Solución

Dado que el polinomio es de tercer grado, se representa como:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$f(x)=\left(x-(-1)\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-x_3\right)=\left(x+1\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-x_3\right)$$

Y se sabe que $f(-2)=-\frac{35}{8}$ entonces:

$$f(-2)=\left(-2+1\right)\left(-2-\frac{1}{2}\right)\left(-2-x_3\right) \quad\rightarrow\quad -\frac{35}{8}=\left(-1\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-2-x_3\right)$$

Al resolver para x_3, se obtiene que:

$$x_3=-\frac{1}{4}$$

Por tanto, el polinomio que cumple las condiciones establecidas es:

$$f(x)=\left(x+1\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}$$

3 Obtén el polinomio de tercer grado si se sabe que sus raíces son: $-1-i$, $-1+i$ y 5.

Solución

El polinomio se representa de la forma:

$$f(x)=\left(x-(-1-i)\right)\left(x-(-1+i)\right)\left(x-5\right)=\left(x+1+i\right)\left(x+1-i\right)\left(x-5\right)$$

Al desarrollar el producto se obtiene:

$$f(x)=x^3-3x^2-8x-10$$

4 Encuentra el polinomio de cuarto grado si se sabe que sus raíces son: $2i$, -3, y además $f(-1)=-50$ y $f(0)=-48$.

Solución

Al tratarse de un polinomio de cuarto grado se representa como:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

$$f(x)=\left(x-2i\right)\left(x+3\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$$

Pero se sabe que $f(-1)=-50$, entonces:

$$f(-1)=\left(-1-2i\right)\left(-1+3\right)\left(-1-x_3\right)\left(-1-x_4\right) \quad\rightarrow\quad -50=\left(-1-2i\right)\left(2\right)\left(-1-x_3\right)\left(-1-x_4\right)$$

También se cumple que $f(0)=-48$, por tanto:

$$f(0)=\left(0-2i\right)\left(0+3\right)\left(0-x_3\right)\left(0-x_4\right) \quad\rightarrow\quad -48=\left(-2i\right)\left(3\right)\left(-x_3\right)\left(-x_4\right)$$

Donde se genera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_3 x_4 = \dfrac{8}{i} \\ x_3 + x_4 + x_3 x_4 = \dfrac{24-2i}{1+2i} \end{cases}$$

El cual tiene como soluciones $x_3 = 4$ y $x_4 = -2i$, por lo que el polinomio queda definido como:

$$f(x) = (x-2i)(x+3)(x-4)(x+2i) \quad \rightarrow \quad f(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 - 4x - 48$$

Cálculo de las raíces por división sintética

Para encontrar las raíces de un polinomio se emplea la división sintética, así como los diversos métodos de factorización y resolución de ecuaciones, además de hacer uso de la regla de los signos de Descartes.

Regla de los signos de Descartes

Esta regla nos permite determinar el tipo de raíz posible para un polinomio (positiva, negativa o compleja).

Sea el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, entonces sucede que:

- El número de raíces positivas es igual o menor en dos al número de cambios de signo del polinomio.
- El número de raíces negativas es igual o menor en dos al número de cambios de signo de la evaluación $f(-x)$.
- El número de raíces complejas depende del número de raíces positivas o negativas que tenga el polinomio. Si el polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja entonces también tiene como raíz su conjugado.

EJEMPLOS



1 Dado el polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$, determina sus raíces.

Solución

Si se aplica la regla de Descartes se observa que:

1. Existen dos cambios de signos en $f(x)$, en consecuencia el polinomio tiene dos posibles o ninguna raíz positiva

$$f(x) = +x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

2. Se evalúa $f(-x)$, para determinar las posibles raíces negativas

$$f(-x) = -x^3 - 2x^2 + 11x + 12$$

Se observa que sólo hay un cambio de signo, por tanto existe una posible raíz negativa.
De acuerdo con la regla de los signos de Descartes las posibles combinaciones de raíces son:

Raíces positivas	2	0
Raíces negativas	1	1
Raíces complejas	0	2

Se factoriza el polinomio mediante el uso de la división sintética, como a continuación se ilustra.
Ya que el coeficiente de x^3 es 1, se toman únicamente los divisores de 12

$$\text{Divisores de } 12 = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$$

Éstos son los posibles valores para los cuales el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.
Se ordenan los coeficientes del polinomio y, con los valores anteriores, se efectúan las operaciones siguientes:

1	–2	–11	12	1
	1	–1	–12	
1	–1	–12	0	4
	4	12		
1	3	0		–3
	–3			
1	0			

Finalmente, las raíces del polinomio son: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ y $x_3 = -3$

2 Dado el polinomio $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 12x$, determina sus raíces.

Solución

Este polinomio carece de término independiente, entonces una de las raíces es cero y mediante una factorización el polinomio se expresa como:

$$f(x) = xp(x) = x(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12)$$

Se aplica la regla de Descartes al polinomio $p(x)$ para determinar el número de posibles raíces:

1. Existe un cambio de signo en $p(x)$, en consecuencia el polinomio tiene una o ninguna posible raíz positiva

$$p(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$$

2. Se evalúa el polinomio $p(-x)$, para determinar las posibles raíces negativas

$$p(-x) = +x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12$$

Se observa que hay tres cambios de signo, por tanto existen tres, una o ninguna posibles raíces negativas.
De acuerdo con la regla de Descartes las combinaciones posibles de raíces son:

Raíz cero	1	1	1
Raíces positivas	1	1	0
Raíces negativas	3	1	0
Raíces complejas	0	2	4

Con el método de división sintética se factoriza el polinomio $p(x)$

1	3	–2	–10	–12	2
	2	10	16	12	
1	5	8	6	0	–3
	–3	–6	–6		
1	2	2	0		

Se observa que no existe ningún divisor de 2 que dé como residuo cero en la división sintética, por tanto las dos raíces restantes son complejas y conjugadas. Hasta este momento la factorización del polinomio $f(x)$ es:

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x^2 + 2x + 2)$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se iguala a cero el polinomio $x^2 + 2x + 2$ y se obtienen las raíces restantes:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Por tanto, las raíces del polinomio $f(x)$ son:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3,\ x_4 = -1 + i,\ x_5 = -1 - i$$

3 Determina las raíces del polinomio $f(x) = 36x^4 + 24x^3 + 13x^2 + 6x + 1$.

Solución

El polinomio se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = 36x^4 + 24x^3 + 4x^2 + 9x^2 + 6x + 1$$

Se agrupan los términos

$$f(x) = (36x^4 + 24x^3 + 4x^2) + (9x^2 + 6x + 1)$$

El factor común da:

$$f(x) = 4x^2(9x^2 + 6x + 1) + 1(9x^2 + 6x + 1) = (4x^2 + 1)(9x^2 + 6x + 1)$$

Para hallar las raíces de $f(x)$, se iguala a cero el polinomio, entonces

$$(4x^2 + 1)(9x^2 + 6x + 1) = 0$$
$$4x^2 + 1 = 0 \ ;\ 9x^2 + 6x + 1 = 0$$
$$x^2 = -\frac{1}{4} \ ;\quad (3x+1)^2 = 0$$
$$x = \pm\frac{i}{2};\qquad x = -\frac{1}{3}$$

se dice que existe multiplicidad cuando una raíz se repite dos o más veces, como en este caso, por tanto las raíces del polinomio son:

$$x_1 = \frac{i}{2},\ x_2 = -\frac{i}{2},\ x_3 = x_4 = -\frac{1}{3}$$

EJERCICIO 167

Indica cuáles de los siguientes binomios son factores del polinomio propuesto:

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10;\ x - 2, x - 1, x - 5$
2. $g(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6;\ 2x + 3, x + 2, x + 1$
3. $p(x) = 3x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 32x - 16;\ 3x - 2, x + 2, x - 2$
4. $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18;\ x + 1, x + 3i, x - 2i, x + 2i$
5. $h(x) = x^4 + 20x^2 + 64;\ x + i, x - i, x + 2i, x - 2i$
6. $m(x) = x^5 + 6x^4 + 23x^3 + 34x^2 + 26x;\ x + 6, x, x + 1 - i, x - 1 + i, x + 2 + 3i$

Determina el residuo que se obtiene al dividir el polinomio por los binomios dados:

7. $(x^3 + 13x^2 + 14x - 88) \div (x + 2)$
8. $(2x^3 + 5x^2 - x - 6) \div (2x + 1)$
9. $(6x^3 + 37x^2 + 32x - 15) \div (2x - 3)$
10. $(x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12) \div (x + 1)$
11. $(5x^4 - 26x^3 + 15x^2 + 38x - 8) \div (x + 2)$
12. $(x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12) \div (x + 3)$

Determina los valores de *k* para que el polinomio:

13. $f(x) = x^3 - kx^2 - (5k + 1)x + 12$, sea divisible por $x - 4$
14. $f(x) = 2x^3 + (2k + 1)x^2 - (k^2 + 1)x - 24$, sea divisible por $2x + 3$
15. $f(x) = kx^3 - (k^2 - 1)x^2 + (7k + 5)x - 12$, sea divisible por $3x - 1$
16. $f(x) = (2k^2 - 2)x^3 - (5k - 1)x^2 - (3k^2 - 4k + 3)x - 6$, sea divisible por $5x + 1$
17. $f(x) = kx^4 - 2kx^3 - (4k^2 - 3)x^2 + (k - 2)x + 15$, sea divisible por $x + 3$

Indica si los valores propuestos son raíces de los polinomios:

18. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$; $x = 3, x = 4, x = 5$
19. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 18x + 27$; $x = 3i, x = -3i, x = -\frac{3}{2}$
20. $f(x) = x^3 + 10x^2 + 27x + 18$; $x = 1, x = -2, x = -9$

Determina cuáles de los valores propuestos son raíces de los polinomios:

21. $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 7x + 22$; $x = \frac{11}{2}, x = -2, x = -1$
22. $f(x) = 5x^3 - 17x^2 + 13x + 15$; $x = 2 + i, x = -2 - i, x = -\frac{3}{5}$
23. $f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 19x - 10$; $x = -1, x = \frac{5}{3}, x = -\frac{1}{2}$
24. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12$; $x = -3, x = -1, x = 2i, x = -2i$
25. $f(x) = 25x^4 - 100x^3 - 19x^2 + 82x - 24$; $x = 4, x = 1, x = \frac{3}{5}, x = -\frac{2}{5}$

Encuentra el polinomio cuyas raíces son:

26. $x = -5, x = 0, x = 1$
27. $x = 3, x = -3, x = -4$
28. $x = \frac{1}{3}, x = 4i, x = -4i$
29. $x = -\frac{3}{4}, x = -2, x = \frac{5}{2}$
30. $x = 4, x = -5, x = 3 - 2i, x = 3 + 2i$
31. $x = i, x = -i, x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}$

Encuentra el polinomio que cumpla con las siguientes características:

32. Polinomio de tercer grado, con raíz en $\frac{1}{3}$, $f(1) = 10$, $f(-1) = -4$
33. Polinomio de tercer grado con raíz en 1, $f(1) = 0$, $f(0) = 1$
34. Polinomio que sea de cuarto grado, con raíces, -1, i y $-i$, además $f(3) = 40$
35. Polinomio de cuarto grado con raíces en -3, multiplicidad 2 en raíz 1 y $f(0) = -3$
36. Polinomio que sea de cuarto grado, multiplicidad 3 en la raíz 2 y $f(-1) = -27$
37. Polinomio de quinto grado con raíces 1, -1 y $f(-2) = 0, f(0) = -2, f(2) = 60$

Determina las raíces de los siguientes polinomios:

38. $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$
39. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$
40. $f(x) = 15x^3 - 53x^2 - 30x + 8$
41. $f(x) = 2x^3 + 13x^2 + 30x + 25$
42. $f(x) = x^4 - 6x^3 - 13x^2 + 42x$
43. $f(x) = x^4 - x^3 + 10x^2 - 16x - 96$
44. $f(x) = 6x^4 + x^3 - 20x^2 - 42x - 20$
45. $f(x) = 2x^5 + 13x^4 + 19x^3 + x^2 + 17x - 12$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente



Solución a los ejercicios de Aritmética y álgebra

Capítulo 1

Ejercicio 1

1. Inverso aditivo
2. Conmutativa para la multiplicación
3. Cerradura para la multiplicación
4. Asociativa para la multiplicación
5. Neutro aditivo
6. Distributiva
7. Inverso aditivo
8. Cerradura para la suma
9. Conmutativa para la suma
10. Asociativa para la suma
11. Distributiva
12. Neutro multiplicativo
13. Inverso multiplicativo
14. Conmutativa para la suma
15. Conmutativa para la multiplicación
16. Asociativa para la multiplicación

Ejercicio 2

1. Cuarenta y cinco
2. Ochenta
3. Quinientos veintitrés
4. Setecientos setenta
5. Quinientos noventa y siete
6. Ocho mil trescientos dos
7. Nueve mil dieciséis
8. Veinte mil dieciocho
9. Once mil once
10. Nueve mil setenta y dos
11. Doce mil ciento tres
12. Veintidós mil quinientos
13. Treinta y cuatro mil cuatrocientos ochenta
14. Ciento ocho mil doscientos catorce
15. Tres millones ochenta y cuatro mil
16. Un millón doscientos quince mil trescientos sesenta y cuatro
17. Cinco millones seiscientos ochenta y tres mil cuarenta
18. Trece millones setenta y cinco

Ejercicio 3

1. 521	5. 8 400	9. 1 108 012
2. 16 000	6. 601	10. 144 000 144
3. 1 299	7. 700 138	11. 116 386 514
4. 35 000	8. 1 527 428	12. 505 000 210

Ejercicio 4

1. $<$	5. $>$	9. $<$
2. $>$	6. $<$	10. $=$
3. $<$	7. $=$	11. $<$
4. $>$	8. $<$	12. $>$

Ejercicio 5

1. $>$	5. $>$	9. $>$
2. $<$	6. $=$	10. $<$
3. $>$	7. $<$	11. $=$
4. $=$	8. $<$	12. $>$

Ejercicio 6

1. 10	5. $\frac{1}{3}$	9. 3.2
2. $\frac{7}{4}$	6. 2.5	10. 6.8
3. 9	7. $\frac{13}{9}$	11. 0
4. $\frac{5}{2}$	8. $\frac{9}{3}=3$	12. 0.0001

Ejercicio 7

	Valor absoluto	Valor relativo
1.	3	3
2.	8	80
3.	3	300
4.	5	500
5.	7	7 000
6.	5	5 000
7.	4	40 000
8.	9	900
9.	6	60
10.	0	0
11.	2	2 000 000
12.	5	50 000 000

Ejercicio 8

Notación desarrollada

1. 70 + 5
2. 100 + 30 + 2
3. 400 + 20 + 8
4. 500 + 10
5. 3 000 + 2
6. 7 000 + 400 + 90 + 1
7. 10 000 + 5 000 + 200 + 4
8. 30 000 + 2 000 + 700 + 90
9. 40 000 + 9 000 + 800 + 30 + 5
10. 200 000 + 40 000 + 6 000 + 900 + 30 + 2
11. 300 000
12. 400 000 + 70 000 + 5 000 + 300 + 10 + 4
13. 100 000 + 20 000 + 900 + 80 + 3
14. 1 000 000 + 300 000 + 20 000 + 800 + 60 + 5
15. 3 000 000 +7 00 000 +40 000 + 2 000 + 900 + 50 + 8

Capítulo 2

Ejercicio 9

1. 457	5. 4 356 905	9. –11 276
2. 6 379	6. 7 705 847	10. –636 312
3. 17630	7. –805	11. –17 681 704
4. 114 948	8. –1 648	12. –537 591 965

Ejercicio 10

1. 37 años	5. Falleció en 2005	9. 1 020 calorías
2. 22 años	6. 750 kilómetros	10. Se retiró en 1997
3. $10 000	7. 1 000 kilómetros	11. –53° C
4. 2004, 2006	8. 30 700 libros	12. Perdió $1 110 000

EJERCICIO 11

1. 4
2. –3
3. 2
4. –5
5. –8
6. 14
7. 0
8. 11
9. –38
10. –66
11. 1
12. –11
13. –6
14. 20
15. –7
16. 26
17. 17
18. –11
19. 32
20. 10
21. 8
22. 19
23. –5
24. 7
25. –2
26. –12
27. 110
28. –716
29. 10 595
30. –9 625

EJERCICIO 12

1. 370 mujeres
2. $23 000
3. $237 000
4. 23 años
5. 28 años
6. $993
7. 18 metros
8. 4 150 metros
9. $4 500
10. 53 años

EJERCICIO 13

1. 15
2. –8
3. 24
4. 21
5. 7
6. –2
7. –1
8. 19
9. 0
10. –18
11. 2
12. 6
13. 3
14. 0
15. –10
16. 24
17. –27
18. –5
19. –2
20. –6
21. 10
22. 18
23. 4
24. –1
25. –9
26. –8
27. 5
28. 25
29. 12
30. 17

EJERCICIO 14

1. 1 701
2. 24 230
3. 2 295
4. 17 172
5. 142 528
6. 260 496
7. 2 947 680
8. 43 436 664
9. 38 203 690
10. 1 913 085
11. 20
12. –160
13. 322
14. –15 552
15. 303 660
16. –195 720
17. 12 865 888
18. –9 105 315
19. –225 286 184
20. –54 285 042
21. –105
22. 30
23. 18
24. 60
25. –864
26. –720
27. 1 680

EJERCICIO 15

1. 216 refrescos
2. 180 libros
3. 105 canicas
4. 750 árboles
5. $960
6. 10 080 minutos
7. 336 departamentos
8. 6 000 lapiceros
9. $64 800
10. 645 personas
11. $120 000

EJERCICIO 16

1. 2
2. 11
3. –13
4. 66
5. 175
6. –39
7. –28
8. –45
9. –14
10. 8

EJERCICIO 17

1. $4 400
2. $5 000
3. $540
4. $3 600
5. $10 000 000
6. 60 años
7. $4 370
8. $6 150
9. $347 000
10. $7 650 000

EJERCICIO 18

c: cociente, *r*: residuo

1. *c*: 2, *r*: 2
2. *c*: 3, *r*: 1
3. *c*: 49, *r*: 0
4. *c*: 297, *r*: 1
5. *c*: 8, *r*: 0
6. *c*: 13, *r*: 2
7. *c*: 21, *r*: 2
8. *c*: 34, *r*: 26
9. *c*: 29, *r*: 99
10. *c*: 5, *r*: 31
11. *c*: 29, *r*: 142
12. *c*: 47, *r*: 433
13. *c*: 52, *r*: 812
14. *c*: 17, *r*: 1944
15. *c*: 9, *r*: 8446
16. *c*: 73, *r*: 19022
17. *c*: 198, *r*: 9888
18. *c*: 4 932, *r*: 14974

EJERCICIO 19

1. 23 veces
2. $3000
3. 148
4. 56 horas
5. 3 libros
6. 9 horas
7. 7 días
8. 15 minutos
9. 9 litros por minuto
10. 2 pantalones y 2 chamarras
11. $320

CAPÍTULO 3

EJERCICIO 20

1. 105, 243, 2 457
2. 800, 112, 324, 13 564
3. 105, 8 910, 34 615
4. 78, 768, 1 470
5. 175,1 645, 3 528
6. 3 128, 5 024, 9 000
7. 225, 1 008, 2 925
8. 66, 253, 935
9. 195, 1 105
10. 1 007, 380, 1596

EJERCICIO 21

1. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
2. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
3. $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
4. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
5. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
6. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
7. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
8. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
9. $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$
10. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$
11. $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$
12. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$
13. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
14. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
15. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

EJERCICIO 22

1. MCD = 36
2. MCD = 90
3. MCD = 1
4. MCD = 6
5. MCD = 1
6. MCD = 5
7. MCD = 12
8. MCD = 14
9. MCD = 77
10. MCD = 143

EJERCICIO 23

1. mcm = 216
2. mcm = 90
3. mcm = 432
4. mcm = 180
5. mcm = 540
6. mcm = 1 260
7. mcm = 300
8. mcm = 10 800
9. mcm = 7 700
10. mcm = 148 225

EJERCICIO 24

1. Cada bolsa pesa 6 kg y hay 2 de res, 3 de cerdo, y 4 de pollo por caja
2. Después de 30 segundos
3. 20 cm por lado
4. Después de 12 minutos y dieron 2 y 3 vueltas
5. 24 litros
6. 6 metros
7. 3 metros, 10 troncos
8. $1 000 a cada nieto y tiene 14 nietos
9. 252 minutos y a las 3:12 horas volverán a coincidir
10. Se pueden hacer 13 costalitos con 15 canicas
11. Cada caja contiene 150 lapiceros
12. De color lila 3 cubos y de color rojo 4
13. 90 minutos, y dan. 9, 6 y 5 vueltas, respectivamente
14. 2 006
15. 25 cm y son 187 mosaicos

CAPÍTULO 4

EJERCICIO 25

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7. $\frac{1}{2}$
8. $\frac{2}{5}$
9. $\frac{1}{8}$
10. $\frac{3}{2}$
11. $\frac{10}{4}$
12. $\frac{6}{3} = 2$

EJERCICIO 26

1. $\frac{5}{14}$
2. $\frac{18}{24}$
3. $\frac{40}{100}$ y $\frac{60}{100}$
4. $\frac{16}{24}$

EJERCICIO 27

1. Propia
2. Impropia
3. Propia
4. Propia
5. Impropia
6. Propia
7. Impropia
8. Propia
9. Impropia
10. Impropia
11. Propia
12. Impropia
13. Propia
14. Impropia
15. Propia

EJERCICIO 28

1. $1\frac{1}{3}$
2. $1\frac{2}{5}$
3. $1\frac{1}{2}$
4. $3\frac{1}{4}$
5. 4
6. $1\frac{5}{8}$
7. $6\frac{5}{6}$
8. 6
9. $3\frac{6}{7}$
10. $2\frac{10}{13}$
11. $2\frac{2}{13}$
12. $2\frac{1}{12}$
13. $1\frac{1}{18}$
14. $2\frac{13}{16}$
15. $3\frac{11}{40}$
16. $7\frac{33}{65}$
17. $5\frac{14}{105}$
18. $4\frac{38}{305}$

EJERCICIO 29

1. $\frac{17}{5}$
2. $\frac{11}{9}$
3. $\frac{30}{7}$
4. $\frac{34}{6}$
5. $\frac{23}{3}$
6. $\frac{35}{4}$
7. $\frac{19}{10}$
8. $\frac{34}{13}$
9. $\frac{83}{16}$
10. $\frac{139}{19}$
11. $\frac{123}{10}$
12. $\frac{542}{30}$
13. $\frac{319}{20}$
14. $\frac{277}{12}$
15. $\frac{507}{14}$
16. $\frac{354}{7}$
17. $\frac{608}{5}$
18. $\frac{1562}{7}$

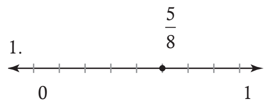
EJERCICIO 30

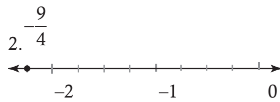
1. sí
2. no
3. sí
4. no
5. sí
6. no
7. sí
8. no
9. sí
10. sí
11. no
12. no

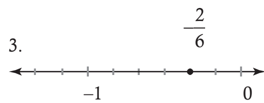
EJERCICIO 31

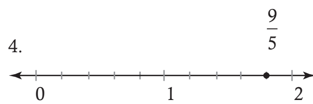
1. $\frac{5}{6}$
2. $\frac{3}{2}$
3. $\frac{3}{4}$
4. $\frac{2}{3}$
5. $\frac{5}{2}$
6. $\frac{1}{5}$
7. $\frac{9}{20}$
8. $\frac{7}{8}$
9. $\frac{4}{5}$
10. $\frac{7}{2}$

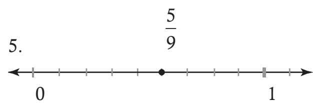
EJERCICIO 32

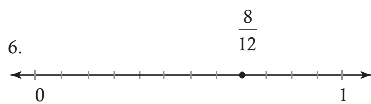


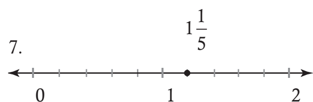


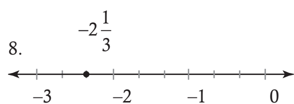


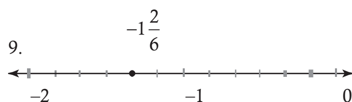


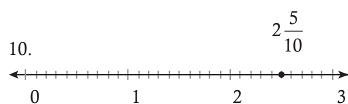












EJERCICIO 33

1. 2	8. $\frac{69}{8}$	15. $\frac{1}{2}$	22. 0
2. $\frac{1}{2}$	9. 8	16. $\frac{2}{3}$	23. $\frac{2}{7}$
3. $\frac{11}{9}$	10. $\frac{4}{5}$	17. $\frac{1}{5}$	24. $\frac{3}{5}$
4. $\frac{13}{6}$	11. $\frac{1}{3}$	18. $\frac{4}{9}$	25. $\frac{1}{2}$
5. $\frac{11}{7}$	12. $\frac{4}{15}$	19. $\frac{1}{2}$	26. $\frac{14}{13}$
6. $\frac{8}{5}$	13. $\frac{2}{3}$	20. $\frac{14}{9}$	27. 1
7. $\frac{49}{9}$	14. $\frac{5}{17}$	21. $\frac{1}{4}$	

EJERCICIO 34

1. $\frac{5}{6}$	10. $\frac{3}{8}$	19. $-\frac{5}{16}$	28. 0
2. $\frac{3}{2}$	11. $\frac{1}{8}$	20. $\frac{3}{10}$	29. $\frac{7}{2}$
3. 2	12. $-\frac{29}{64}$	21. $\frac{13}{24}$	30. 7
4. $\frac{79}{120}$	13. $\frac{6}{5}$	22. $\frac{133}{20}$	31. $\frac{517}{60}$
5. $\frac{9}{13}$	14. $\frac{89}{60}$	23. −1	32. $\frac{29}{12}$
6. $\frac{7}{8}$	15. 0	24. $\frac{9}{20}$	33. $\frac{21}{4}$
7. $\frac{5}{3}$	16. $\frac{109}{120}$	25. $\frac{37}{10}$	34. $\frac{3}{2}$
8. $\frac{22}{9}$	17. 1	26. $-\frac{3}{2}$	35. $-\frac{31}{32}$
9. $\frac{35}{16}$	18. $\frac{11}{4}$	27. $-\frac{5}{2}$	36. $-\frac{17}{12}$

EJERCICIO 35

1. $\frac{9}{4}$ kg	9. $\frac{121}{4}$ pulg
2. $\frac{83}{20}$ km	10. $\frac{5}{8}$ kg
3. $\frac{27}{8}$ kg	11. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{13}{4}$ h	12. $\frac{7}{12}$
5. $\frac{25}{16}$ kg	13. $\frac{1}{6}$
6. $\frac{51}{5}$ m	14. $\frac{3}{8}$
7. $\frac{7}{12}$	15. $\frac{9}{20}$
8. $\frac{4}{9}$	16. $\frac{1}{2}$

EJERCICIO 36

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{5}{14}$
3. $\frac{1}{9}$
4. $\frac{3}{2}$
5. $\frac{39}{20}$
6. $\frac{17}{10}$
7. $\frac{19}{5}$
8. 5
9. $\frac{37}{5}$
10. $\frac{128}{15}$
11. $\frac{5}{12}$
12. $\frac{9}{10}$
13. $\frac{5}{14}$
14. 1
15. 14
16. 4
17. $\frac{32}{45}$
18. $\frac{1}{3}$
19. $\frac{28}{3}$
20. 15
21. 6

EJERCICIO 37

1. 2 250 litros
2. 2 100 aficionados
3. 1 400 habitantes
4. 150 automovilistas
5. 40 rojas, 20 azules y 60 verdes
6. $30
7. $900
8. 275 kilómetros
9. 60
10. 5 alumnos
11. 3 600 personas
12. 18 pastillas
13. 504 joules

EJERCICIO 38

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{3}{2}$
3. 3
4. $\frac{13}{12}$
5. $\frac{1}{2}$
6. $\frac{2}{3}$
7. 8
8. 5
9. $\frac{2}{5}$
10. 10
11. $\frac{18}{13}$
12. $\frac{2}{13}$
13. $\frac{1}{18}$
14. $\frac{1}{8}$
15. $\frac{4}{5}$
16. 12
17. $\frac{1}{3}$
18. $\frac{9}{2}$
19. $\frac{3}{2}$
20. $\frac{3}{13}$

EJERCICIO 39

1. $\frac{1}{8}$ kg
2. 80 botellas
3. 5
4. 14 min
5. 48 km/h
6. $18
7. $\frac{1}{4}$ litro
8. 24 personas

EJERCICIO 40

1. $-\frac{4}{7}$
2. $\frac{15}{4}$
3. 2
4. $\frac{3}{4}$
5. 0
6. $-\frac{7}{5}$
7. $\frac{1}{8}$
8. $\frac{3}{2}$
9. $\frac{1}{4}$
10. $\frac{1}{2}$
11. $\frac{12}{5}$
12. $\frac{2}{3}$
13. $\frac{3}{2}$
14. 4

EJERCICIO 41

1. 3 900 mililitros
2. 4 horas
3. $2 200
4. Alimentación: $4 000, Renta y servicios: $6 000 y Diversión: $2 000
5. $137\frac{1}{2}$ kg
6. $28\frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2}$
7. 7 ancho × $11\frac{1}{4}$ largo

EJERCICIO 42

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{25}{21}$
3. $\frac{67}{19}$
4. 3
5. $\frac{8}{3}$
6. 4
7. 1
8. $\frac{1}{2}$
9. $\frac{7}{43}$
10. 2
11. $\frac{3}{4}$
12. $\frac{1}{2}$
13. $-\frac{1}{2}$
14. $\frac{12}{13}$
15. 1

CAPÍTULO 5

EJERCICIO 43

1. Treinta y un centésimos.
2. Un entero noventa y ocho milésimos.
3. Veinte enteros cuatro milésimos.
4. Dos enteros ochocientos nueve milésimos.
5. Doce enteros novecientos quince diezmilésimos.
6. Tres enteros quinientos sesenta y siete milésimos.
7. Trece enteros ochocientos setenta y seis diezmilésimos.
8. Cinco cienmilésimos.
9. Doscientos cuarenta y cinco enteros seis mil noventa y tres cienmilésimos.
10. Dos enteros cuarenta mil nueve millonésimos.
11. Dieciocho enteros cuarenta mil quinientos seis millonésimos.
12. Trescientos cuarenta y dos enteros doscientos cincuenta y seis millonésimos.

EJERCICIO 44

1. 0.0005
2. 0.00048
3. 0.0678
4. 2.4
5. 6.043
6. 5.00029
7. 0.32524
8. 0.00066
9. 1.000477
10. 0.000003
11. 472.232101
12. 48.030215

EJERCICIO 45

1. 70.8118
2. 77.5818
3. 3 764.996
4. 548.1207
5. 8 830.591
6. 1.113
7. 3.037
8. 25.19346
9. 121.99742
10. 277.967011
11. 327.872
12. 444.6986
13. 60 700.719
14. 13 520.3306
15. 1 912 546.511
16. 10.2405
17. 2 518.4686
18. 358.07514
19. 37 999.945
20. 952.1374

EJERCICIO 46

1. 2.8 millones
2. 16.05 km
3. 63.925 kg
4. 65.5 m
5. 7.5 galones
6. 24.75 ton
7. 58.55 cm
8. 769.2 kilowatts
9. 11 kilogramos
10. 666.5 calorías
11. $42.5
12. 1.153 kg
13. 19.82 minutos
14. 42.45 km
15. 309.03
16. 175.23
17. 4407.977 litros
18. 239.25 MB
19. 166.59 litros
20. $21.16
21. 140.75 km
22. 6.44 km
23. 0.39 m
24. 204.53 km
25. $10 353.82
26. 63.965 kg
27. 133.743

EJERCICIO 47

1. 15.732
2. 261.95
3. 992.53508
4. 6 867.125
5. 31.43
6. 1
7. 48.5
8. 2 805
9. 384.36
10. 3 875
11. 5 400
12. 28136.7
13. 117.626256
14. 12 385.197
15. 6 733.9836
16. 1 496.01291
17. 1 793.108902
18. 730.5
19. 465.6
20. 21 650
21. 48 260
22. 386 200

EJERCICIO 48

1. $1 236
2. $760.60
3. 511.8 km
4. $1 031.80
5. $1 294.50
6. $45 187.50
7. 1 198.185 m^2
8. $143 260 y $3 770
9. $19 902.50
10. 75 litros
11. 50.8 cm
12. 22.5 pastillas
13. 6 882.56688 cm^3
14. 7.28 m
15. $35 520
16. $287

EJERCICIO 49

C: Cociente, R: Residuo

1. $C = 4.896$, $R = 0.008$
2. $C = 0.177$, $R = 0.018$
3. $C = 4113.6$, $R = 0.008$
4. $C = 148.17$, $R = 0.028$
5. $C = 2.356$, $R = 0$
6. $C = 200$, $R = 0$
7. $C = 100$, $R = 0$
8. $C = 0.767$, $R = 0.0041$
9. $C = 5104$, $R = 0$
10. $C = 250.5$, $R = 0$
11. $C = 3.033$, $R = 0.069$
12. $C = 15.384$, $R = 0.00016$
13. $C = 16.071$, $R = 0.00012$
14. $C = 120.857$, $R = 0.00001$
15. $C = 217.142$, $R = 0.00015$
16. $C = 14.615$, $R = 0.001$
17. $C = 238.015$, $R = 0.00071$
18. $C = 5.974$, $R = 0.611$

EJERCICIO 50

1. 23
2. $3.2
3. 60 m
4. 6 000 envases
5. 1.75 litros
6. 68 km/h
7. 12.1 cm
8. 22.928 °C
9. $58.5
10. $4.5
11. 24 descargas
12. 0.0125 cm
13. 8 000 naranjas
14. $78.5
15. 21.34
16. $442.75
17. 35 millares

EJERCICIO 51

1. $101.50
2. $309.70
3. $352.70
4. 8.5
5. 43 cm
6. $8.36
7. 10 263.85 kg
8. 6.952 cm
9. 768.43 gramos
10. $44.20

EJERCICIO 52

1. $0.\overline{3}$
2. 0.2
3. 0.5
4. 0.4
5. 1.25
6. 0.6
7. 1.5
8. 0.1
9. 0.375
10. 1.8
11. 1.625
12. 2.3125
13. 1.9
14. $3.\overline{45}$
15. 2.875
16. $4.58\overline{3}$
17. 3.32
18. $4.2\overline{3}$
19. $5.3\overline{6}$
20. $7.2\overline{7}$

EJERCICIO 53

1. $\frac{1}{5}$
2. $\frac{33}{100}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{11}{25}$
5. $\frac{33}{50}$
6. $\frac{3}{2}$
7. $\frac{11}{4}$
8. $\frac{77}{25}$
9. $\frac{1}{200}$
10. $\frac{673}{500}$

EJERCICIO 54

1. $\frac{8}{9}$
2. $\frac{2}{11}$
3. $\frac{11}{9}$
4. $\frac{139}{33}$
5. $\frac{2}{9}$
6. $\frac{3\,118}{999}$
7. $\frac{9\,023}{999}$
8. $\frac{15\,451}{4\,950}$
9. $\frac{514}{99}$
10. $\frac{344}{99}$

CAPÍTULO 6

EJERCICIO 55

1. 16
2. –15 625
3. $\frac{1}{1\,296}$
4. 1
5. –729
6. $-\frac{1}{32}$
7. 81
8. 4
9. $\frac{1}{256}$
10. $\frac{1}{27}$
11. $-\frac{125}{8}$
12. $\frac{343}{27}$
13. $\frac{3\,125}{59\,049}$
14. –9
15. 4
16. 4 096
17. 18.49
18. $\frac{343}{216}$
19. $\frac{441}{16}$
20. $\frac{1\,331}{1\,000}$

Ejercicio 56

1. 625
2. $\frac{1}{27}$
3. $3^{-\frac{1}{3}}$
4. 4
5. $\frac{200}{9}$
6. $\frac{4}{9}$
7. $8\,192$
8. 216
9. $\frac{1}{25}$
10. 81
11. 1
12. $\frac{4}{3}$
13. $\frac{16}{9}$
14. $\frac{49}{9}$
15. $\frac{1}{30}$
16. $\frac{4}{9}$
17. 20
18. $\frac{3}{4}$
19. $\frac{9}{4}$
20. 16
21. 54
22. 16
23. $15\,625$
24. $-15\,625$
25. 16
26. 25
27. 225
28. $\frac{81}{64}$
29. $\frac{27}{20}$
30. 49
31. $11\,664$
32. $\frac{3^{\frac{1}{2}}}{16}$
33. 3
34. $\frac{9}{4}$
35. $\frac{1}{65\,536}$
36. $\frac{1}{64}$
37. $\frac{16}{9}$
38. $\frac{1}{4}$
39. $\frac{81}{10\,000}$
40. $\frac{1}{729}$
41. $\frac{1}{216}$
42. 49

Ejercicio 57

1. 7
2. 27
3. 17
4. -8
5. 3
6. 5
7. 9
8. -3
9. 14
10. 21
11. 24
12. 6
13. -12
14. 15
15. 24
16. 6
17. 12
18. 21
19. 6
20. 15
21. 270
22. 108
23. 45
24. 300
25. 100
26. 324
27. 64
28. $\frac{121}{6}$
29. 2
30. 10
31. $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{13}{6}}$
32. 3
33. 5^2
34. 3
35. 2
36. 10
37. 3
38. 50
39. $5^{\frac{19}{24}}$
40. 2
41. 5
42. $\frac{5}{24}$

Ejercicio 58

1. $2\sqrt{5}$
2. $6\sqrt{2}$
3. $2\sqrt[3]{2}$
4. $3\sqrt[3]{5}$
5. $5\sqrt[3]{2}$
6. $9\sqrt{2}$
7. $6\sqrt{5}$
8. $6\sqrt[4]{5}$
9. $2\sqrt[3]{2}$
10. $2\sqrt{15}$
11. $2\sqrt[4]{2}$
12. $\frac{2}{3}\sqrt{15}$

Ejercicio 59

1. $12\sqrt{2}$
2. $7\sqrt{3}$
3. $\frac{13}{4}\sqrt{5}$
4. $\sqrt[3]{9}$
5. $-5\sqrt{2}$
6. $-2\sqrt{5}$
7. $\frac{7}{6}\sqrt[4]{7}$
8. $-8\sqrt[3]{2}$
9. $\frac{33}{20}\sqrt{6}$
10. $5\sqrt{2}$
11. $\sqrt{3}$
12. $6\sqrt{5}$
13. $-7\sqrt{2}$
14. $2\sqrt{3}$
15. $3\sqrt{5}-\sqrt{3}$
16. $7\sqrt{2}$
17. $3\sqrt{2}+20\sqrt{3}-22\sqrt{5}$
18. $-5\sqrt{2}$
19. $\sqrt{3}$
20. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$
21. $4\sqrt{11}-\sqrt{5}$
22. $3\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{2}$
23. $\sqrt[3]{3}$
24. $4\sqrt[3]{2}$

Ejercicio 60

1. 4
2. 5
3. $\sqrt{21}$
4. $3\sqrt{7}$
5. $6\sqrt{5}$
6. $12\sqrt{3}$
7. $4\sqrt{6}$
8. 45
9. 180
10. 18
11. $\frac{5}{4}\sqrt{30}$
12. 60
13. $3\sqrt[3]{5}$
14. $2\sqrt[3]{25}$
15. $20\sqrt[3]{90}$
16. $2\sqrt[3]{3}$
17. $\sqrt[6]{675}$
18. 2
19. $2\sqrt[15]{6\,561}$
20. $2\sqrt[12]{2}$
21. $6\sqrt[3]{2}$
22. $2\sqrt[3]{9}$
23. $\frac{1}{2}\sqrt[6]{2\,592}$
24. $\frac{1}{8}\sqrt[6]{24}$

Ejercicio 61

1. 6
2. $\sqrt{2}$
3. $\frac{5}{6}\sqrt{3}$
4. $\frac{7}{4}\sqrt{5}$
5. $\sqrt{7}$
6. $\frac{1}{4}\sqrt{5}$
7. $\frac{1}{2}$
8. $2\sqrt[3]{2}$
9. $\sqrt[15]{4}$
10. $\sqrt[6]{54}$
11. 1
12. $\sqrt[14]{12}$
13. 5
14. $\sqrt[6]{\frac{9}{8}}-\sqrt[6]{\frac{3}{4}}$
15. $\sqrt[4]{2}+\sqrt[12]{2}$
16. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt[6]{32}}-\frac{1}{\sqrt[10]{128}}$

Ejercicio 62

1. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
2. $\sqrt{3}$
3. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{9}$
4. $\sqrt[4]{2}$
5. $2\sqrt{6}$
6. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$
7. $\frac{1}{10}\sqrt{15}$
8. $3\sqrt[3]{2}$
9. $\sqrt{5}$
10. $2-\sqrt{6}$

11. 1
12. $12-4\sqrt{7}$
13. $2\sqrt{6}-4$
14. $-\frac{1}{2}\left(5+3\sqrt{3}\right)$
15. $-11-5\sqrt{5}$
16. $\frac{2}{7}\left(3-\sqrt{2}\right)$
17. $-\frac{1}{6}\left(1+\sqrt{7}\right)$
18. $-\frac{1}{3}\left(5+\sqrt{10}\right)$
19. $\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$
20. $\frac{2}{11}\left(7+3\sqrt{3}-\sqrt{5}-2\sqrt{15}\right)$

EJERCICIO 63

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
2. $\frac{2}{5\sqrt{2}}$
3. $\frac{7}{5\sqrt{7}}$
4. $\frac{12}{5\sqrt{6}}$
5. $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$
6. $\frac{3}{2\sqrt[5]{16}}$
7. $\frac{5}{2\sqrt{15}}$
8. $\frac{1}{3\left(\sqrt{2}-1\right)}$
9. $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$
10. $\frac{9}{2\left(5-\sqrt{7}\right)}$
11. $-\frac{1}{7+3\sqrt{5}}$
12. $-\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$
13. $-\frac{3}{2+\sqrt{7}}$
14. $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$
15. $\frac{23}{4-10\sqrt{2}+6\sqrt{3}+8\sqrt{6}}$

EJERCICIO 64

1. 15
2. 25
3. 27
4. 18
5. 4.84
6. 7.96
7. 23.76
8. 18.01
9. 65.74
10. 73.7
11. 48.41
12. 8 865
13. 7 825
14. 5 690.5
15. 4 325.13
16. 20 870.40

EJERCICIO 65

1. 5.916
2. 7.7459
3. 11.2249
4. 23.5159
5. 35.5387
6. 64.8074
7. 256.8929
8. 282.8427
9. 645.4257
10. 935.6297

EJERCICIO 66

1. 8
2. 9
3. 15
4. 17
5. 22
6. 38
7. 67
8. 95
9. 135
10. 328
11. 429
12. 604

EJERCICIO 67

1. 10
2. 3
3. 79
4. 7
5. 54
6. 35
7. 11
8. 7
9. –27
10. –16
11. $\frac{67}{6}$
12. $\frac{5}{12}$
13. 0
14. $\frac{1}{4}$
15. $\frac{5}{24}$

CAPÍTULO 7

EJERCICIO 68

1. 4.35×10^{3}
2. 1.6×10^{4}
3. 9.548×10^{4}
4. 2.73×10^{5}
5. 6.702×10^{5}
6. 3.5×10^{8}
7. 5.342×10^{6}
8. 1.86×10^{7}
9. 1.76×10^{-1}
10. 8.89×10^{-2}
11. 4.28×10^{-3}
12. 3.26×10^{-4}
13. 4.62×10^{-7}
14. 3×10^{-8}
15. 8.79×10^{-8}
16. 1.2×10^{-9}
17. 5.69×10^{-10}
18. 7.81×10^{-11}

EJERCICIO 69

1. 16 000
2. 0.001
3. 3 760 000
4. 0.006
5. 420
6. 0.000724
7. 0.000001
8. 0.00083
9. 10 500 000
10. 0.234
11. 326.4
12. 6.234
13. 0.0000000000023
14. 0.000301
15. 414 501 000
16. 0.0000003002

EJERCICIO 70

1. 5.11×10^{6}
2. 1.04×10^{-3}
3. 1.1×10^{-5}
4. 1.9×10^{3}
5. 1.02×10^{7}
6. 4.354×10^{-2}
7. 2.34×10^{4}
8. 5.73×10^{-3}
9. 1.27×10^{6}
10. 3.38×10^{-5}
11. 2.32×10^{2}
12. 1.484×10^{-2}
13. 3.1217×10^{3}
14. 9.764×10^{-3}
15. 1.272×10^{-1}

EJERCICIO 71

1. 2.16×10^{-5}
2. 1.4784×10^{9}
3. 5.65×10^{4}
4. 1.2075×10^{-6}
5. 1.09×10^{8}
6. 1.63×10^{-3}
7. 7.79×10^{13}
8. 3.1668×10^{2}
9. 5.1×10^{-14}
10. 7.13×10^{11}
11. 2.375×10^{4}
12. 4.32×10^{-3}
13. 5.8×10^{-3}
14. 8.5×10^{-6}
15. 1.1×10^{5}
16. 5.964×10^{-5}
17. 2×10^{2}
18. 8.5×10^{3}
19. 4×10^{-2}
20. 1×10^{2}

EJERCICIO 72

1. 2.89×10^{-4}
2. 1.5625×10^{10}
3. 1.444×10^{-11}
4. 5.832×10^{24}
5. 7.8125×10^{-7}
6. 2.5×10^{5}
7. 3.1×10^{-4}
8. 6×10^{2}
9. 1.8×10^{-4}
10. 3×10^{2}
11. 2×10^{-3}
12. 1.9008×10^{-11}
13. 2×10^{3}
14. 5×10^{-3}

EJERCICIO 73

1. 3.1300
2. 2.1300
3. 1.1300
4. $\bar{3}.1300$
5. 1.5065
6. 0.8621
7. $\bar{1}.8382$
8. $\bar{2}.6902$
9. $\bar{3}.8921$
10. 3.7547
11. 3.5096
12. 4.7243
13. 0.1348
14. 0.7018
15. $\bar{1}.6128$
16. 1.4771
17. 0.8471
18. 3

Ejercicio 74

1. 73.69
2. 6 377
3. 31.26
4. 294
5. 3.640
6. 5.398
7. 1.015
8. 451.3
9. 2.963
10. 1 004
11. 3 772
12. 0.01827
13. 0.2524
14. 0.0005204
15. 0.4276
16. 0.05066
17. 0.005641
18. 0.01081
19. 0.6236
20. 0.0001259

Ejercicio 75

1. 99.91
2. 9.561
3. 41.24
4. 6.546
5. 37.13
6. 0.5020
7. 0.3989
8. 2.5
9. 0.7539
10. 3.6165
11. –104.3
12. –0.7037
13. –19.91
14. –3.658
15. 4.941
16. 374.1
17. 276.9
18. 31.56
19. 7.998
20. 14
21. 5.705
22. 4.804
23. 707.6
24. 1.146
25. 1.176
26. 1.477
27. 1.6231
28. 2.021
29. 1.3009
30. 1.5562
31. 2.1759
32. 2.4681
33. 2.535
34. 0.875
35. 0.6232
36. $0.2411\overline{6}$
37. $0.8479\overline{3}$
38. 0.20982
39. 0.86
40. – 0.01

Ejercicio 76

1. 1.9164
2. 1.0834
3. 0.8001
4. 2.6022
5. 0.2984
6. 1.6090
7. 0.7761
8. 1.1363
9. 1.9631
10. 13.0435

Capítulo 8

Ejercicio 77

1. 6
2. 8
3. 15
4. 2
5. 50
6. 5
7. 12
8. 18
9. 64
10. 6
11. 12
12. 2
13. 9
14. 200
15. 140
16. 3
17. 20
18. 510
19. 6
20. 1

Ejercicio 78

1. 6
2. 12
3. 15
4. $4\sqrt{3}$
5. $\sqrt{14}$
6. $9\sqrt{2}$
7. $5\sqrt{10}$
8. $\frac{1}{10}\sqrt{5}$
9. $\frac{2}{5}$
10. $\frac{4}{5}\sqrt{2}$

Ejercicio 79

1. $\frac{75}{2}$
2. 32
3. 35
4. 24
5. 45
6. 10
7. 16
8. 1
9. $\frac{7}{10}$
10. $\frac{3}{10}$
11. $\frac{10}{9}$
12. $\frac{35}{24}$

Ejercicio 80

1. 2, 54
2. $\frac{2}{3}$, 144
3. 2, 16
4. 36, $\frac{9}{2}$
5. 6, 162
6. $\frac{2}{15}$, $\frac{25}{12}$
7. $\frac{16}{9}$, $\frac{3}{32}$
8. $\frac{50}{9}$, $\frac{1}{180}$
9. $\frac{18}{25}$, $\frac{5}{12}$
10. $\frac{1}{4}$, 54

Ejercicio 81

1. 125 latas
2. 28 minutos
3. $4 100
4. 8 160 litros
5. 80 km
6. 70 páginas
7. 4 200 sacos
8. 10 segundos
9. 27 horas
10. $24
11. 6 kg
12. Ana $324
Fabián $486
Liam $810
13. 125 m^2
14. 144 tarros
15. 30 kg
16. $1 000
17. Fernando $450
Josué $300
Martín $225
18. $42.50
19. 900 min.
20. $75
21. $147
22. $150
23. 3 canicas
24. 80 litros
25. $15 000
26. 45 días
27. 5 hombres
28. 48 km/h
29. 20 frascos
30. 300 hombres
31. 40 árboles

Ejercicio 82

1. 128 min
2. 50 días
3. 150 pares
4. 7.2 litros
5. $153 900

Ejercicio 83

1. 0.03
2. 0.04
3. 0.06
4. 0.08
5. 0.15
6. 0.01
7. 0.05
8. 0.25
9. 0.30
10. 0.50
11. 0.75
12. 0.32
13. 0.045
14. 0.0008
15. 0.0003

Ejercicio 84

1. 18
2. 100
3. 250.25
4. 5.25
5. 0.77
6. 1.5
7. 1 575
8. 22.5
9. 462.72
10. 43.75
11. 4.8
12. 1 250
13. 3 129.6
14. 279.986
15. 62.003
16. 8.15
17. 1 400
18. 1 637.44
19. 75.516
20. 8.28

Ejercicio 85

1. 5 000
2. 7 925
3. 9 500
4. 1 562.5
5. 1 606.25
6. 2 850
7. 6 000
8. 1 980
9. 3 650

Ejercicio 86

1. 20%
2. 30%
3. 25%
4. 42%
5. 36%
6. 24%
7. 15%
8. 17.022%
9. 23%
10. 33.75%

EJERCICIO 87

1. 64 alumnos
2. $440
3. $2 975
4. $11 437.50
5. $1 155
6. $111
7. $1 496
8. $1 207.50
9. $1 254.40
10. $822 025
11. $3 000
12. $2 000
13. 63.75%
14. 21 preguntas
15. $96 000
16. $1 000
17. $126 000
18. $190 400
19. $2 880
20. 45 preguntas
21. 46.93%
22. 50%
23. 45%
24. 34.48%
25. 57.8125%

EJERCICIO 88

1. $33 000
2. $532 000
3. $140 800
4. $22 365
5. $60 480
6. $558 250
7. $104 160
8. $16 280
9. $3 685.67
10. $2 268
11. 3%
12. $25 000
13. $50 000
14. 30%
15. 1.5 años
16. 1.02%
17. $450 000

CAPÍTULO 9

EJERCICIO 89

1. $4 \times 10^1 + 8 \times 10^0$
2. $1 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0$
3. $9 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$
4. $1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
5. $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$
6. $1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0 + 1 \times 3^{-1} + 1 \times 3^{-2}$
7. $4 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3 \times 5^0 + 0 \times 5^{-1} + 1 \times 5^{-2} + 4 \times 5^{-3} + 2 \times 5^{-4}$
8. $1 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 6 \times 8^0 + 2 \times 8^{-1} + 3 \times 8^{-2} + 5 \times 8^{-3}$
9. $6 \times 8^4 + 0 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 5 \times 8^{-1} + 1 \times 8^{-2}$
10. $2 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0$
11. $1 \times 16^2 + B \times 16^1 + A \times 16^0 + 4 \times 16^{-1} + E \times 16^{-2}$
12. $C \times 16^0 + 2 \times 16^{-1} + 4 \times 16^{-2} + A \times 16^{-3} + B \times 16^{-4}$

EJERCICIO 90

1. $12_{(10)}$
2. $23_{(10)}$
3. $219_{(10)}$
4. $57.8125_{(10)}$
5. $19.6875_{(10)}$
6. $65_{(10)}$
7. $123_{(10)}$
8. $253_{(10)}$
9. $199.\overline{703}_{(10)}$
10. $1\,796.\overline{851}_{(10)}$
11. $232_{(10)}$
12. $387.671875_{(10)}$
13. $225.703125_{(10)}$
14. $98_{(10)}$
15. $669_{(10)}$
16. $69_{(10)}$
17. $2\,930_{(10)}$
18. $430.768_{(10)}$
19. $1\,259.9856_{(10)}$
20. $84.2048_{(10)}$
21. $29_{(10)}$
22. $1\,063_{(10)}$
23. $35.62\overline{037}_{(10)}$
24. $3\,978_{(10)}$
25. $3\,001_{(10)}$
26. $491.1330566_{(10)}$
27. $666_{(10)}$
28. $626_{(10)}$
29. $685_{(10)}$
30. $43\,820_{(10)}$
31. $2\,874_{(10)}$
32. $3\,882.116211_{(10)}$

EJERCICIO 91

1. $1111_{(2)}$
2. $100111011_{(2)}$
3. $1101.11_{(2)}$
4. $10011.1_{(2)}$
5. $0.101_{(2)}$
6. $1111001.111_{(2)}$
7. $101_{(3)}$
8. $222201_{(3)}$
9. $311_{(4)}$
10. $3202_{(5)}$
11. $122.41_{(5)}$
12. $3021.204_{(5)}$
13. $553_{(6)}$
14. $1523_{(6)}$
15. $166_{(7)}$
16. $2041_{(7)}$
17. $77_{(8)}$
18. $150_{(8)}$
19. $536.14_{(8)}$
20. $70153.6_{(8)}$
21. $165_{(9)}$
22. $1424_{(9)}$
23. $157071_{(9)}$
24. $C4_{(16)}$
25. $166.1_{(16)}$
26. $53DC.8_{(16)}$

EJERCICIO 92

1. $1617_{(8)}$
2. $3343_{(8)}$
3. $717.65_{(8)}$
4. $111011101_{(2)}$
5. $1100110011_{(2)}$
6. $100101010001011_{(2)}$
7. $101110.100011_{(2)}$
8. $111010.001110_{(2)}$
9. $100001010.110111_{(2)}$
10. $110000001111.0100000001_{(2)}$
11. $468_{(16)}$
12. $9B1.EA3_{(16)}$
13. $FB8.62_{(16)}$
14. $1001110101100_{(2)}$
15. $110100101111.10101011_{(2)}$
16. $111111010001111.11000101_{(2)}$

EJERCICIO 93

1. $1001100_{(2)}$
2. $101110101_{(2)}$
3. $11011111_{(2)}$
4. $110111010_{(2)}$
5. $11022_{(3)}$
6. $101212_{(3)}$
7. $1012121_{(3)}$
8. $100101022_{(3)}$
9. $123212_{(4)}$
10. $100232_{(4)}$
11. $230200213_{(4)}$
12. $2320122_{(4)}$
13. $1344_{(5)}$
14. $4330_{(5)}$
15. $32220_{(5)}$
16. $444202_{(5)}$
17. $66225_{(8)}$
18. $233446_{(8)}$
19. $1042140_{(8)}$
20. $1203523_{(8)}$
21. $A68_{(16)}$
22. $1022_{(16)}$
23. $11436_{(16)}$
24. $CD267_{(16)}$

EJERCICIO 94

1. $100011_{(2)}$
2. $110001010_{(2)}$
3. $1100010_{(2)}$
4. $24231_{(5)}$
5. $411011_{(5)}$
6. $5103_{(8)}$
7. $15622_{(8)}$
8. $3BE_{(16)}$
9. $3811_{(16)}$

EJERCICIO 95

1. $10111101_{(2)}$
2. $100001001_{(2)}$
3. $122122_{(3)}$
4. $20223132_{(4)}$
5. $21320112_{(4)}$
6. $2013044_{(5)}$
7. $3641143_{(8)}$
8. $4041446_{(8)}$
9. $26054504_{(8)}$
10. $10257247_{(8)}$
11. $1BAC4_{(16)}$
12. $26C54_{(16)}$

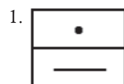
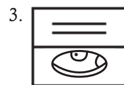
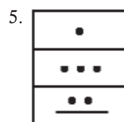
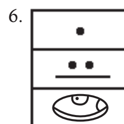
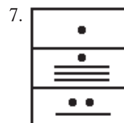
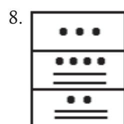
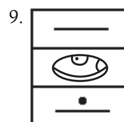
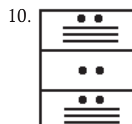
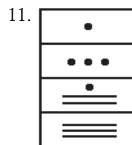
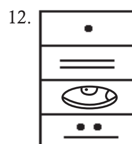
EJERCICIO 96

1. $110_{(2)}$
2. $1101_{(2)}$
3. $111011_{(2)}$
4. $211_{(3)}$
5. $1201_{(3)}$
6. $301_{(4)}$
7. $10202_{(4)}$
8. $421_{(5)}$
9. $11330_{(5)}$
10. $7531_{(8)}$
11. $207_{(8)}$
12. $173_{(8)}$
13. $14_{(16)}$
14. $52_{(16)}$

EJERCICIO 97

1. 26
2. 111
3. 248
4. 401
5. 2 407
6. 466
7. 922
8. 1 341
9. 1 365
10. 2 527
11. 3 026
12. 4 048

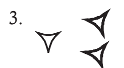
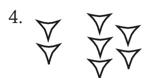
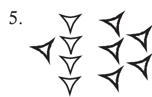
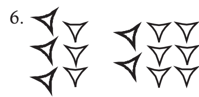
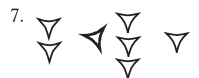
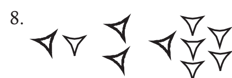
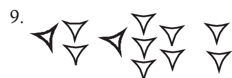
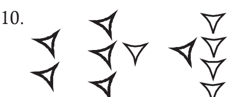
EJERCICIO 98

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 
12. 

EJERCICIO 99

1. 813	3. 5 013	5. 37 964
2. 1 360	4. 12 912	6. 84 793

EJERCICIO 100

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 

EJERCICIO 101

1. LXXXIX	11. MCMXCVII
2. XCIX	12. $\overline{\text{XII}}$ CCCXLV
3. CCCLXXVI	13. $\overline{\text{XV}}$ CDXXXII
4. DCCLXXXVI	14. $\overline{\text{XXIII}}$ VII
5. CMLVII	15. $\overline{\text{XLIII}}$ DCCCLXXIX
6. MIV	16. $\overline{\text{LXXXIX}}$
7. MCDXCII	17. $\overline{\text{CXXIII}}$
8. MDLXXXIX	18. $\overline{\text{CCXXX}}$ V
9. MDCXXI	19. $\overline{\overline{\text{II}}\text{ CCCXLV}}$
10. MDCCCCX	20. $\overline{\overline{\text{VIII}}\text{ CCCXL}}$ XX

EJERCICIO 102

1. 82	7. 564	13. 1 850	19. 23 457
2. 74	8. 719	14. 1 752	20. 19 020
3. 56	9. 452	15. 1 806	21. 245 000
4. 93	10. 991	16. 1 525	22. 3 457 998
5. 39	11. 803	17. 2 814	23. 9 575 973
6. 68	12. 244	18. 1 429	24. 4 945 912

EJERCICIO 103

1. 326	6. 200 401
2. 23 123	7. 2 054
3. 10 304	8. 3 100 102
4. 1 223	9. 300 200
5. 1 020 037	10. 2 001 000

EJERCICIO 104

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.

CAPÍTULO 10

EJERCICIO 105

1. 80 dm
2. 15 000 cm
3. 7 050 dm
4. 0.019 m
5. 18.5 dm
6. 0.9 dm
7. 17 000 500 Dm
8. 5 400 m
9. 8.06 cm
10. 165 Hm
11. 3.8 km
12. 63 000 dm
13. 38 km
14. 9 Hm
15. 6 m
16. 4 563 cm
17. 3 016 mm
18. 850 mm
19. 15 480 m
20. 756 m

EJERCICIO 106

1. 300 dm^2
2. 160 000 cm^2
3. 7 000 000 mm^2
4. 8 000 000 m^2
5. 190 000 m^2
6. 63 500 m^2
7. 2 800 Dm^2
8. 1 400 000 m^2
9. 8 Dm^2
10. 19 Hm^2
11. 0.3 Km^2
12. 16 m^2
13. 130 m^2
14. 98 Km^2
15. 140 000 dm^2
16. 210 000 dm^2
17. 43 856 cm^2
18. 18 m^2
19. 450 Dm^2
20. 0.35 m^2

EJERCICIO 107

1. 24 000 dm^3
2. 13 800 cm^3
3. 190 litros
4. 149 000 cm^3
5. 7 000 mm^3
6. 9 540 litros
7. 485 dm^3
8. 975 000 cm^3
9. 590 dl
10. 3 146 dm^3
11. 40 m^3
12. 3 905 ml
13. 15 m^3
14. 60 cm^3
15. 96 Dl
16. 450 000 mm^3
17. 16 850 dm^3
18. 153 Hl
19. 7 500 cm^3
20. 43 000 dm^3
21. 7 506 m^3
22. 4 Dl
23. 8 316 cm^3
24. 5 475 cl
25. 38.6 cm^3
26. 1.8 m^3
27. 32.8 litros
28. 45 Dm^3
29. 0.035 m^3
30. 1 700 cl

EJERCICIO 108

1. 3 000 g
2. 0.07 kg
3. 1 560 Dg
4. 3 600 Dg
5. 70 Dg
6. 5 kg
7. 0.38 Hg
8. 64 g
9. 1 800 g
10. 380 Hg
11. 4 g
12. 85 Dg
13. 1.5 g
14. 4.9 Dg
15. 2 400 g
16. 0.08 Hg
17. 2.45 g
18. 0.635 dg
19. 0.1728 g
20. 38 500 mg

EJERCICIO 109

1. 35 años 9 meses 23 días
2. 1 hora 30 segundos
3. 124° 40' 56"
4. 5 meses 12 días 17 horas
5. 43 años 7 meses 17 días
6. 25 meses 19 días 8 horas 45 minutos
7. 438° 0' 43"
8. 3 décadas 8 años 11 meses 4 días
9. 7 días 12 horas
10. 40° 18'
11. 3 años 7 meses 15 días
12. 145° 58' 48"
13. 37 años 5 meses 12 días
14. 35° 40' 12"
15. 4 años 18 días
16. 85° 36' 36"
17. $3\frac{7}{8}$ años
18. $78\frac{23}{40}$ grados
19. $6\frac{18}{25}$ horas
20. $324\frac{43}{50}$ grados
21. $3\frac{161}{200}$ décadas
22. $148\frac{3}{200}$ grados
23. $120\frac{1}{2}$ minutos
24. $608\frac{2}{5}$ horas

EJERCICIO 110

1. 8 horas 40 minutos 13 segundos
2. 217° 43' 2"
3. 8 años 9 meses 23 días
4. 506° 28' 25"
5. 36 horas 6 minutos
6. 270° 56' 30"
7. 1 mes 3 días 5 horas 28 minutos 51 segundos
8. 2 décadas 2 años 10 meses 1 día
9. 287° 4' 10"
10. 2 décadas 4 años 11 meses 16 días 5 horas 39 minutos

EJERCICIO 111

1. 3 años 2 meses 8 días
2. 30° 6' 24"
3. 1 mes 27 días 17 horas
4. 91° 13' 29"
5. 25 días 14 horas
6. 16° 44' 36"
7. 4 meses 28 días 19 horas 37 minutos
8. 37° 35' 36"
9. 1 día 4 horas 45 minutos
10. 57 minutos 13 segundos

EJERCICIO 112

1. 2 días 1 hora 12 minutos 32 segundos
2. 692° 25' 12"
3. 2 meses 16 días 5 horas
4. 984° 56' 15"
5. 3 décadas 2 años 6 meses 12 días 4 horas
6. 1 580° 53"
7. 84 años 9 meses 18 días
8. 1 872° 8'
9. 3 días 18 horas 57 minutos 12 segundos
10. 1 siglo 9 años 1 mes 24 días

EJERCICIO 113

C: cociente; *R*: residuo

1. *C*: 1 año 9 meses 3 días
2. *C*: 10° 38’ 8”
3. *C*: 1 hora 22 minutos 56 segundos
4. *C*: 23° 2’ 3”
5. *C*: 26 min 1 s
6. *C*: 47° 10’ 43”
7. *C*: 3 horas 2 minutos 25 segundos
8. *C*: 16° 1”
9. *C*: 5 h 8 min 2 s
10. *C*: 3 años 4 meses 3 días
11. *C*: 3 meses 7 días 5 horas 12 minutos
12. *C*: 34° 20’ 37”
13. *C*: 1 año 6 meses 6 días
14. *C*: 21° 25’ 43”

CAPÍTULO 11

EJERCICIO 114

1. 12
2. 5
3. 6
4. 36
5. 8
6. 25 y 4
7. 42 y 7
8. 12 y 3
9. 14:00 h, 340 de M 300 de N
10. 6 pm
11. 1 pm
12. 11 pm
13. Playera: $600, Short: $500 y Tenis: $1 200
14. Paulina: 20 años, Mónica: 16 años y Andrea: 24 años
15. 40 min
16. 250 litros
17. 5 h

EJERCICIO 115

1. 30
2. $\frac{5}{4}$
3. $\frac{15}{4}$
4. $\frac{2}{3}$
5. 24
6. $\frac{10}{7}$
7. 9
8. 18 años
9. 70 y 42
10. 20 y 35
11. 180
12. 50 hombres
13. 280 ton
14. $25 000 000
15. 4 días
16. 3 h 36 min
17. 6 horas
18. La mitad
19. 12 h
20. 5 min
21. 12 días
22. 8 h

EJERCICIO 116

1. 110
2. 631
3. 4 100
4. 570
5. $\frac{871\,666\,576}{19\,683}$
6. –1 640
7. $10^8 + 10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0$
8. $10^{11} + 10^{10} + 10^9 + 10^8 + 10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0$
9. $10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 10^0$
10. 6 045
11. 2^{11}
12. 3^6
13. 4^3
14. 6
15. 12
16. 16
17. 18
18. 417 cifras
19. 2 268 cifras

EJERCICIO 117

1. Sobrino de 7 años, $490
   de 11 años, $770
   de 15 años, $1 050
2. 6 años, $360
   8 años, $270
   10 años, $216
   12 años, $180
3. 2 días, $600
   6 días, $1 200
   10 días, $2 000
4. 1ra. parte 34
   2da. parte 85
   3ra. parte 136
5. 180, 360 y 480
6. 48, 72 y 108
7. 1ra. persona, $840
   2da. persona, $1 400
   3ra. persona, $4 200
8. Hija, $162 000
   Hijo, $18 000
   Madre, $54 000
9. Sobrino, $9 000
   Hermana, $15 000
   Hermano, $18 750

CAPÍTULO 12

EJERCICIO 1

1. $\notin$	4. $\notin$	7. $\in$	10. $\notin$
2. $\notin$	5. $\in$	8. $\notin$	11. $\notin$
3. $\in$	6. $\in$	9. $\in$	12. $\notin$

EJERCICIO 2

1. $R = \{ x \in N \mid x$ es divisor de $10 \}$
2. $A = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$
3. $B = \{ 4 \}$
4. $C = \{ x \in N \mid x$ es divisor de $20 \}$
5. $V = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$
6. $Q = \{ e, o, u \}$
7. $T = \{ 2, 3, 4, 5 \}$
8. $S = \{ 2, 3, 7 \}$
9. $U = \{ x \in N \mid x$ es un múltiplo de $4 \}$
10. $M = \{ 2, 10, 50 \}$

EJERCICIO 3

1. $n(A) = 8$	6. $n(T) = 1$
2. $n(B) = 1$	7. $n(M) = 0$
3. $n(S) = 4$	8. $n(L) = 4$
4. $n(R) = 0$	9. $n(J) = \infty$
5. $n(Q) = \infty$	10. $n(O) = 12$

EJERCICIO 4

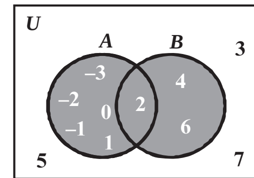
1. Iguales
2. Equivalentes y disjuntos
3. Disjuntos
4. Disjuntos
5. Equivalentes
6. Equivalentes y disjuntos
7. Equivalentes y disjuntos
8. Disjuntos
9. Disjuntos
10. Iguales

EJERCICIO 5

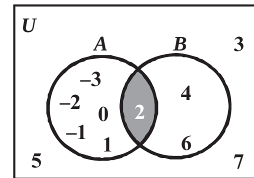
1. 8 subconjuntos
2. 32 subconjuntos
3. 16 subconjuntos
4. $\{\{\ \},\{\alpha\},\{\beta\},\{\theta\},\{\alpha, \beta\},\{\alpha, \theta\},\{\beta, \theta\},\{\alpha, \beta, \theta\}\}$
5. $\{\{\ \},\{a\},\{c\},\{e\},\{f\},\{a, c\},\{a, e\},\{a, f\},$ $\{c, e\},\{c, f\},\{e, f\},\{a, c, e\},\{a, c, f\},\{a, e, f\},$ $\{c, e, f\},\{a, c, e, f\}\}$
6. $\{\{\ \},\{1\},\{2\},\{3\},\{6\},\{1, 2\},\{1, 3\},\{1, 6\},$ $\{2, 3\},\{2, 6\},\{3, 6\},\{1, 2, 3\},\{1, 2, 6\},\{1, 3, 6\},$ $\{2, 3, 6\},\{1, 2, 3, 6\}\}$
7. $\{\{\ \},\{1\},\{3\},\{9\},\{1, 3\},\{1, 9\},\{3, 9\},\{1, 3, 9\}\}$
8. $\{\{\ \},\{5\},\{6\},\{7\},\{5, 6\},\{5, 7\},\{6, 7\},\{5, 6, 7\}\}$

EJERCICIO 6

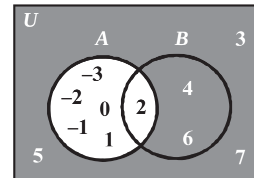
1. $A \cup B = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 6 \}$



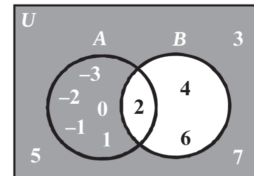
2. $A \cap B = \{ 2 \}$



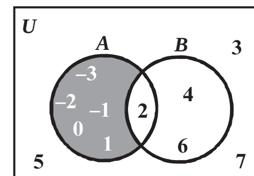
3. $A' = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$



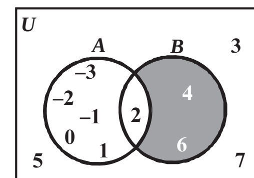
4. $B' = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 3, 5, 7 \}$



5. $A - B = \{ -3, -2, -1, 0, 1 \}$



6. $B - A = \{ 4, 6 \}$

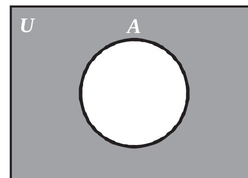


EJERCICIO 7

1. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$
2. $B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\}$
3. $C \cup D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
4. $D \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\}$
5. $A \cap B = \{2, 4, 6\}$
6. $A \cap D = \{4, 6\}$
7. $C \cap E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
8. $B \cap C = \{1, 2, 3, 4\}$
9. $A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
10. $B' = \{0, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
11. $C' = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
12. $D' = \{0, 1, 2, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
13. $A - B = \{0, 8\}$
14. $C - D = \{0, 1, 2\}$
15. $E - B = \{0, 5, 7, 8, 9\}$
16. $B - A = \{1, 3, 12\}$
17. $A' \cap B = \{1, 3, 12\}$
18. $A \cup B' = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
19. $B' \cap E' = \{10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
20. $A' - G = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17\}$
21. $(A \cup B)' = \{5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
22. $(A \cap B)' = \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
23. $(A \cup F) \cap C = \{0, 2, 4\}$
24. $B \cup (F - G) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 15, 17\}$
25. $(F - G) \cap E' = \{15, 17\}$
26. $(F \cap G) \cup D = \{3, 4, 5, 6, 14, 16, 18\}$
27. $E' \cap (A \cup G) = \{12, 14, 16, 18\}$
28. $(E \cup F) \cap (A \cup G) = \{0, 2, 4, 6, 8, 14, 16, 18\}$
29. $(C \cup E) \cap (F \cup G) = \{\ \} = \phi$
30. $(B \cup D) \cup (F \cap G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 14, 16, 18\}$
31. $(B \cup D)' - (E \cup G)' = \{0, 7, 8, 9, 14, 16, 18\}$
32. $(A' \cap B') - (E' \cap F') = \{5, 7, 9, 14, 15, 16, 17, 18\}$

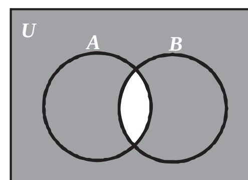
EJERCICIO 8

1.



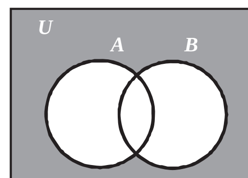
A'

2.



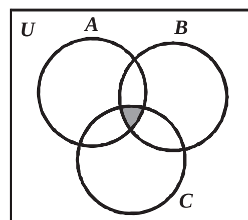
$(A \cap B)'$

3.



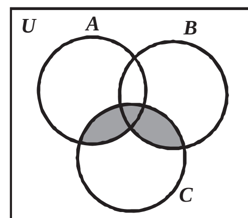
$A' \cap B'$

4.



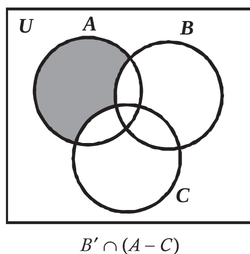
$A \cap B \cap C$

5.



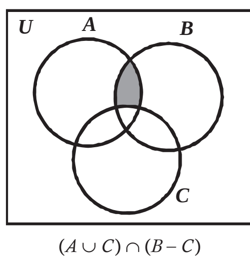
$(A \cup B) \cap C$

6.



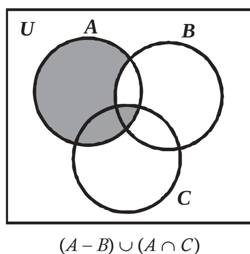
$B' \cap (A - C)$

7.



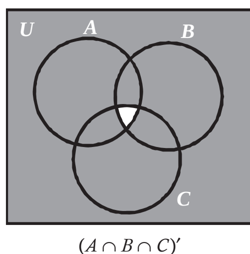
$(A \cup C) \cap (B - C)$

8.



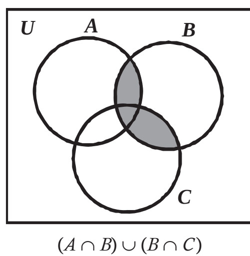
$(A - B) \cup (A \cap C)$

9.



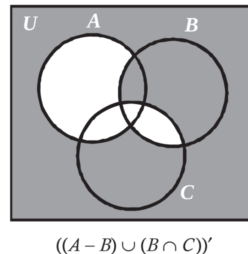
$(A \cap B \cap C)'$

10.



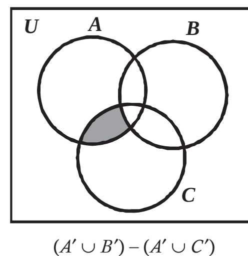
$(A \cap B) \cup (B \cap C)$

11.



$((A - B) \cup (B \cap C))'$

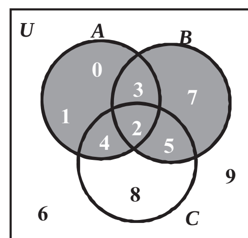
12.



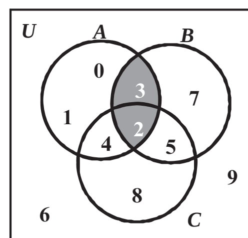
$(A' \cup B') - (A' \cup C')$

EJERCICIO 9

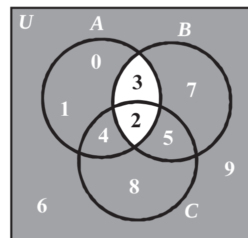
1. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$



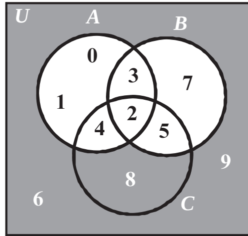
2. $A \cap B = \{2, 3\}$



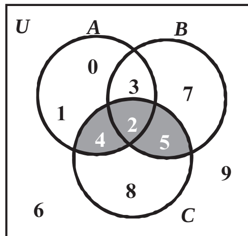
3. $A' \cup B' = \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$



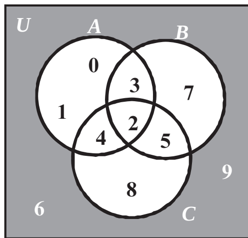
4. $A' \cap B' = \{6, 8, 9\}$



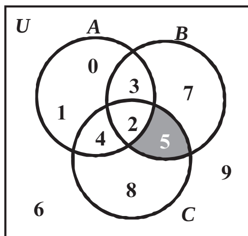
5. $(A \cup B) \cap C = \{2, 4, 5\}$



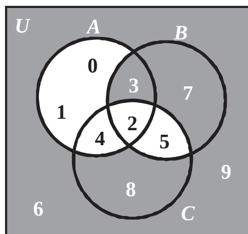
6. $(A \cup B \cup C)' = \{6, 9\}$



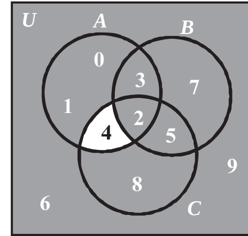
7. $(A' - B') \cap C = \{5\}$



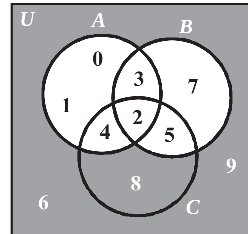
8. $(A - B)' \cap (B \cap C)' = \{3, 6, 7, 8, 9\}$



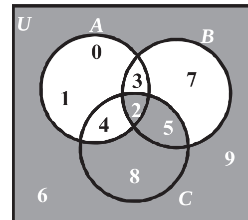
9. $(A - B)' \cup C' = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$



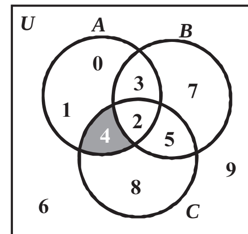
10. $(A \cap B)' \cap (A' \cap B') = \{6, 8, 9\}$



11. $(A - B)' \cap (B - C)' = \{2, 5, 6, 8, 9\}$

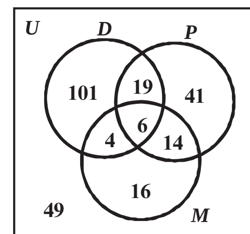


12. $(A' \cup B') - (A' \cup C') = \{4\}$



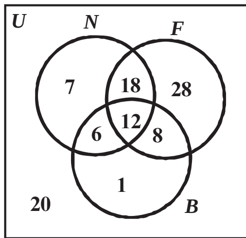
EJERCICIO 10

1.



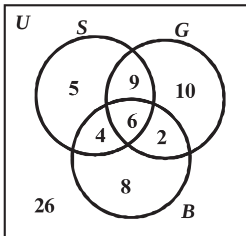
a) 101 personas
b) 158 personas
c) 100 personas

2.



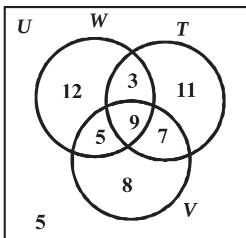
a) 52 niños
b) 73 niños
c) 100 niños
d) 32 niños

3.



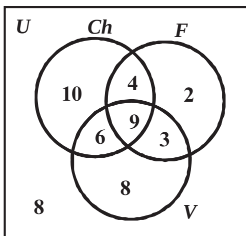
a) 8 personas
b) 5 personas
c) 10 personas
d) 26 personas
e) 34 personas
f) 36 personas

4.



a) 5 personas
b) 15 personas
c) 55 personas
d) 31 personas

5.



a) 50 niños
b) 13 niños
c) 20 niños
d) 16 niños

EJERCICIO 12

1. "España está en Europa y Japón está en Asia"
2. "España está en Europa o Japón está en Asia"
3. "España no está en Europa"
4. "Japón no está en Asia"
5. "Si España está en Europa, entonces Japón está en Asia"
6. "España está en Europa, si y sólo si Japón está en Asia"
7. "España no está en Europa y Japón está en Asia"
8. "España está en Europa o Japón no está en Asia"
9. "No es verdad que España está en Europa o Japón está en Asia"
10. "No es verdad que España está en Europa y Japón está en Asia"

EJERCICIO 13

1. $a \wedge b$
2. $a \wedge \sim b$
3. $\sim a \vee \sim b$
4. $b \vee a$
5. $\sim a \wedge b$
6. $\sim(a \wedge b)$

EJERCICIO 14

1. $\sim a$ = "España no está en Europa y 6 no es número par"
2. $\sim b$ = "Los perros no ladran o 12 no es múltiplo de 3"
3. $\sim c$ = "5 no es número par o es múltiplo de 15"
4. $\sim d$ = "7 es primo y no es divisor de 21"
5. $\sim e$ = "6 es número impar o el tucán es un ave"

EJERCICIO 15

1.

Conversa:
"Si 3 no es par, entonces es divisor de 6"
Contrapositiva:
"Si 3 es par, entonces no es divisor de 6"
Inversa:
"Si 3 no es divisor de 6, entonces es par"

2.

Conversa:
"Si x es divisor de 25, entonces es múltiplo de 5"
Contrapositiva:
"Si x no es divisor de 25, entonces no es múltiplo de 5"
Inversa:
"Si x no es múltiplo de 5, entonces no es divisor de 25"

3.

Conversa:
"Si un triángulo no es un cuadrilátero, entonces es un polígono"
Contrapositiva:
"Si un triángulo es un cuadrilátero, entonces no es un polígono"
Inversa:
"Si un triángulo no es un polígono, entonces es un cuadrilátero"

4.

Conversa:
"Si la Luna es un satélite, entonces Marte no es un planeta"
Contrapositiva:
"Si la Luna no es un satélite, entonces Marte es un planeta"
Inversa:
"Si Marte es un planeta, entonces la Luna no es un satélite"

5.

Conversa:

"Si 17 no es múltiplo de 50, entonces es número primo"

Contrapositiva:

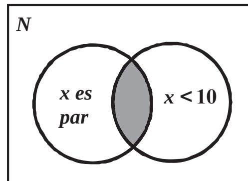
"Si 17 es múltiplo de 50, entonces no es número primo"

Inversa:

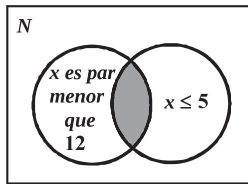
"Si 17 no es número primo, entonces es múltiplo de 50"

EJERCICIO 16

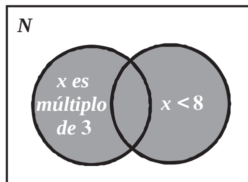
1. $\{2, 4, 6, 8\}$



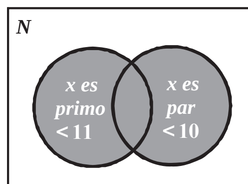
2. $\{2, 4\}$



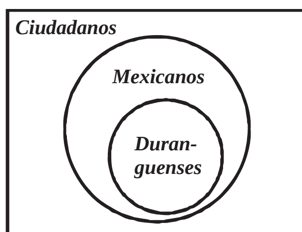
3. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$



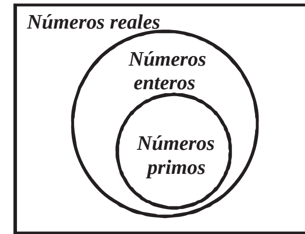
4. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$



5.

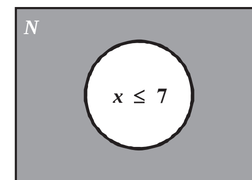


6.



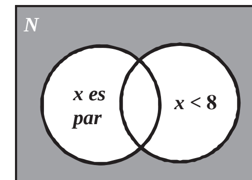
7. $\sim g$ = "$x \nleq 7$"; $x \in N$

$\sim g$ = "$x > 7$"; $x \in N$



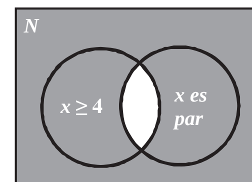
8. $\sim h$ = "x no es par y $x \nless 8$"; $x \in N$

$\sim h$ = "x no es par y $x \geq 8$"; $x \in N$



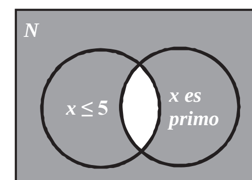
9. $\sim i$ = "$x \ngeq 4$ o x no es par"; $x \in N$

$\sim i$ = "$x < 4$ o x no es par"; $x \in N$



10. $\sim j$ = "$x \nleq 5$ o x no es primo"; $x \in N$

$\sim j$ = "$x > 5$ o x no es primo"; $x \in N$



EJERCICIO 17

1. Falso
2. Falso
3. Falso
4. Verdadero
5. Verdadero
6. Verdadero

EJERCICIO 18

1.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
v	v	f	v
v	f	v	v
f	v	f	f
f	f	v	v

2.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
v	v	f	f
v	f	v	v
f	v	f	f
f	f	v	f

3.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
v	v	f	f	v
v	f	f	v	v
f	v	v	f	f
f	f	v	v	v

4.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim q$	$\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim q$
v	v	v	f	f	v
v	f	v	f	v	v
f	v	v	f	f	v
f	f	f	v	v	v

5.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
v	v	v	v	v
v	f	f	v	f
f	v	f	v	f
f	f	f	f	v

6.

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$(p \vee q) \wedge \sim(p \Rightarrow q)$
v	v	v	v	f	f
v	f	v	f	v	v
f	v	v	v	f	f
f	f	f	v	f	f

7.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
v	v	v	v	v
v	f	f	v	v
f	v	v	f	v
f	f	v	v	v

8.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p$
v	v	v	v	v
v	f	f	f	v
f	v	v	f	v
f	f	v	f	v

9.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim(p \vee q)$
v	v	f	f	f	v	f	v
v	f	f	v	f	v	f	v
f	v	v	f	f	v	f	v
f	f	v	v	v	f	v	v

10.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
v	v	v	v	v	v
v	v	f	v	v	v
v	f	v	v	v	v
v	f	f	v	v	v
f	v	v	v	v	v
f	v	f	v	f	f
f	f	v	f	v	f
f	f	f	f	f	f

11.

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim q \Leftrightarrow r)$	$\sim p \vee (\sim q \Leftrightarrow r)$
v	v	v	f	f	f	f
v	v	f	f	f	v	v
v	f	v	f	v	v	v
v	f	f	f	v	f	f
f	v	v	v	f	f	v
f	v	f	v	f	v	v
f	f	v	v	v	v	v
f	f	f	v	v	f	v

EJERCICIO 19

1. $A\times B=\{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$
2. $A\times C=\{(1,3),(1,5),(1,6),(2,3),(2,5),(2,6),(3,3),(3,5),(3,6)\}$
3. $B\times C=\{(2,3),(2,5),(2,6),(4,3),(4,5),(4,6)\}$
4. $B\times A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
5. $C\times B=\{(3,2),(3,4),(5,2),(5,4),(6,2),(6,4)\}$
6. $A\times(B\times C)=\{(1,2,3),(1,2,5),(1,2,6),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6)\ (2,2,3),(2,2,5),(2,2,6),(2,4,3),(2,4,5),(2,4,6)\ (3,2,3),(3,2,5),(3,2,6),(3,4,3),(3,4,5),(3,4,6)\}$
7. $(A\times B)\times C=\{(1,2,3),(1,2,5),(1,2,6),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6)\ (2,2,3),(2,2,5),(2,2,6),(2,4,3),(2,4,5),(2,4,6)\ (3,2,3),(3,2,5),(3,2,6),(3,4,3),(3,4,5),(3,4,6)\}$
8. $(A\cup B)\times(A\cap C)=\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$
9. $(A-B)\times C=\{(1,3),(1,5),(1,6),(3,3),(3,5),(3,6)\}$
10. $(A-C)\times(A\cap C)=\{(1,3),(2,3)\}$

CAPÍTULO 13

EJERCICIO 20

1. $-5x$	10. $2n$	19. a^2b-ab^2
2. $13a^2b$	11. $-\frac{11}{60}a^3b$	20. $a^3b^2c-2a^2bc^2$
3. $-10xy^2$	12. 0	21. $7x^2-10y^2+8$
4. 0	13. $0.05b=\frac{1}{20}b$	22. $-8m^2+4mn+5n^2$
5. $10a^2b$	14. $-2ab^3c$	23. $2x^{2a+1}+5x^{3a-2}$
6. $-8a$	15. $-3m^{x-2}$	24. $-9a^{m+5}+7x^{m+2}$
7. $-x$	16. $-3x+3y$	25. $-\frac{15}{4}a^2+3ab$
8. $8ab$	17. b	26. $-\frac{17}{6}x^{m-1}-\frac{17}{20}b^{m-2}$
9. $-a^2$	18. $-11m-8n$	27. $\frac{1}{2}x-3y$

EJERCICIO 21

1. -1	10. $\frac{1}{36}$	16. $\frac{7}{3}$	21. $\frac{5}{12}$
2. 5	11. $\frac{49}{144}$	17. 2	22. $\frac{285}{16}$
3. 3	12. 31	18. $\frac{11}{12}$	23. $-\frac{1}{156}$
4. 1	13. $-\frac{65}{4}$	19. $-\frac{23}{4}$	24. 432
5. 14	14. 24	20. $-\frac{9}{64}$	25. $\frac{33}{2}$
6. $\frac{7}{12}$	15. $-\frac{105}{8}$		
7. -2			
8. -6			
9. 24			

EJERCICIO 22

1. $x-3$
2. $3a+8$
3. $\frac{x}{y}$
4. $100-x$
5. $x, x+1$
6. $2a,\ 2a+2,\ 2a+4$ con $a\in Z$
7. $(x+y)^2$
8. x^2+y^2
9. $\frac{1}{x}$
10. $\sqrt[3]{x-y}$
11. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$
12. $5x-10$
13. $\frac{a+b}{6}$
14. $2x+(2x+2)+(2x+4)=3(2x)+\frac{3}{4}(2x+4)$
15. $2y(10)+y=21y$
16. $\frac{1}{4}xyz-4$
17. $(a+b)^2=49$
18. $A=x^2$
19. $P=2(3a+a)=2(4a)=8a$
20. $x+(x+3)+(x+5)=P$
21. $x-0.15x=0.85x$
22. $50-2x$
23. $x,\ 80-x$
24. $2x+1,\ 2x+3,\ 2x+5$ con $x\in Z$
25. $A=x(3x-3)$
26. $x-10$
27. $x^3-\frac{x}{2}$
28. $x,\ 2x,\ 180°-3x$
29. $0.30x$
30. $2x+4$
31. $\frac{2}{3}x+3(x+1)-\frac{1}{x}=10$
32. $2x=3(x-1)+7$

EJERCICIO 23

1. Un número aumentado en tres unidades.
2. El doble de un número disminuido en once unidades.
3. El triple del cuadrado de un número.
4. Las cinco sextas partes de un número cualquiera.
5. El recíproco de un número.
6. El cuadrado de la suma de dos cantidades diferentes.
7. La suma de los cubos de dos números.
8. El cociente de un número entre su consecutivo.
9. El quíntuplo de un número equivale a treinta unidades.
10. El triple de un número disminuido en dos unidades equivale a veinticinco.

11. Las tres cuartas partes de un número aumentado en dos unidades equivalen a dicho número.
12. Una sexta parte de la diferencia de dos cantidades aumentada en tres unidades equivale a la suma de dichos números.
13. El cociente de dos números equivale a un quinto de su diferencia.
14. La diferencia de los cuadrados de dos cantidades.
15. La diferencia del cuadrado de un número con el doble del mismo.
16. El cuadrado de la semisuma de dos cantidades.
17. La raíz cuadrada del cociente de la suma de los números entre la diferencia de ellos.
18. La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos.

EJERCICIO 24

1. $10x - 5y - z$
2. $-3m - n - 2$
3. $3a - b$
4. $-7p + 2q - 7r$
5. $5x^2 + 10x + 2$
6. $-2a^3 + 9a^2 - 5$
7. $2x^4 + x^3 + 2x^2 - x$
8. $x^2 - 2x$
9. $5y^3 - 3y^2 - 3y - 1$
10. $2z^3 + 7z^2 - 7z - 1$
11. $-9x^2 + 3xy - 11y^2$
12. $x^5 + x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x - 2$
13. $-23x^3y - x^2y^2 - 10xy^3$
14. $4x^4 - xy^3 - 4y^4$
15. $-4a^7 + 3a^6 + 6a^4 - a^2 + 7a$
16. $\frac{1}{6}x^2 - 3xy - \frac{1}{3}y^2$
17. $\frac{1}{3}a^2 + \frac{13}{12}ab - \frac{7}{24}b^2$
18. $\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2y - \frac{1}{8}xy^2 - 2y^3$
19. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{17}{6}y$
20. $x^5 + \frac{13}{5}x^4y - \frac{3}{10}x^3y^2 - \frac{5}{6}x^2y^3 - \frac{3}{4}xy^4 - \frac{29}{18}y^5$
21. $\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$
22. $3a^{3x} + 2a^{2x} + a^x$
23. $x^{2a} + x^{2a-2}$
24. $-\frac{7}{8}b^{2x} + \frac{1}{6}b^x + \frac{7}{3}b$
25. $\frac{2}{3}x^{1-y} + \frac{1}{12}x^{1-2y} - \frac{1}{3}x^{1-3y}$

EJERCICIO 25

1. $-3a^2 + 2a - 5$
2. $x^3 - 5x^2 - 10x + 11$
3. $-5a^5 + 4a^4 - 7a^3 + 2a^2 - 9a - 1$
4. $15x^4y - 17x^2y^3 - 5xy^4$
5. $-a^5b - 4a^4b^2 - 2a^3b^3 + 5ab^5 - 1$
6. $-x^{a+2} - 13x^{a+1} - x^a + 12x^{a-1}$
7. $10a^{2m-1} - 6a^{2m} - 5a^{m+1} + a^{m-3}$
8. $x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{5}{3}$
9. $\frac{2}{3}m^4n + \frac{3}{5}m^3n^2 - \frac{4}{3}m^2n^3 - 2mn^4$
10. $-\frac{5}{2}x^4 + \frac{14}{5}x^3y - \frac{4}{15}x^2y^2 - \frac{1}{3}y^4$
11. $-3x + 7y + 5$
12. $2a - 2$
13. $18x^3 - 18x^2 + 5x + 1$
14. $2a^4 - 2a^2 - a + 5$
15. $-4x^7y^5 - 6x^6y^4 + 12x^3y^2$
16. $4m^{x+1} + 2m^{x-2} + m^{x-5} - 3m^{x-6} - 4m^{x-9}$
17. $-15a^{n+10} + 4a^{n+9} - 5a^{n+2} + 3a^{n+1} - 8a^n + 5a^{n-3}$
18. $\frac{1}{2}m - \frac{7}{10}n + \frac{5}{6}p$
19. $\frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{5}{12}y^3$
20. $-\frac{17}{2}a^5b + \frac{23}{4}a^4b^2 + \frac{15}{4}a^3b^3 + \frac{1}{2}a^2b^4$

EJERCICIO 26

1. $8x + y$
2. $-11a + 3b + 2c$
3. $-23x + 3y$
4. $23m - 14n$
5. $-12a + 2b$
6. $-18x + 7y$
7. $19x^2 + 4x - 12y$
8. $-2x - 20y$
9. $-5x - 2y + 18z$
10. $-5x + 5y - 8z$
11. $2a - \frac{9}{10}b$
12. $\frac{14}{15}x + \frac{17}{15}y$

EJERCICIO 27

1. $-15x^2$
2. $24x^8y^9z^2$
3. $-14a^9bc^8$
4. $-\frac{3}{10}xyz^5$
5. $50m^8p^4$
6. $-3c^{11}m^{10}p^2$
7. $-x^2y^2z^2$
8. $-4a^4bc$
9. m^5n^2p
10. $\frac{7}{6}a^8b^{13}c^3$
11. $-\frac{12}{35}x^3y^2z^4$
12. $-27m^7p^3$

13. $0.1m^8np^5$
14. $0.048abcxyz$
15. $-10a^{m+2}b^{n+3}c^2$
16. $-42m^{3x+2}n^{4x+5}$
17. $-36x^{3m+5}y^{2n+5}$
18. $6x^{5a-2}y^{9a-5}$
19. $\frac{1}{4}a^{5x-2}b^{2x+1}c^{x+4}$
20. $-2x^{a+1}y$
21. $-30a^6b^3c$
22. $-56x^9y^8z^2$
23. $30xyz$
24. $48x^{11}y^8$
25. $\frac{8}{3}a^{12}b^5c^4$
26. $-\frac{1}{2}a^9b^4c^4$
27. $40a^{6x+4}b^{3x+3}c^{x+2}$
28. $-\frac{1}{12}x^{4a+2}y^{7a+1}$
29. $24x^{9a-2}y^{6a+1}$
30. $20a^{8x+2}b^6m^{2x+3}n^{5x+3}$

EJERCICIO 28

1. $8a^5b-14a^4b^2$
2. $-15m^5+9m^4-18m^2+9m$
3. $3x^4y-7x^3y-2x^2y$
4. $-6a^3b+21a^2b^2-24ab^3$
5. $24a^8b^4-28a^7b^5+16a^6b^7$
6. $-35x^7y^4z^2+15x^6y^3z+20x^2y^2z^2$
7. $40m^4np^3-24m^5p^4+48m^3p^3$
8. $-12a^4c^5+21a^3bc^4+6ac^5$
9. $15m^{x+7}n^{2x+1}-9m^{x+2}n^{2x+4}+6m^{x+2}n^{2x+1}$
10. $-14x^{a+3}-12x^{a+1}+16x^a+18x^{a-1}-4x^{a-2}$
11. $-9a^{3x+2}b^{3x+1}+21a^{3x+1}b^{3x+2}+12a^{2x+1}b^{2x+2}$
12. $-25x^{5m}y^{3n+1}+10x^{5m+1}y^{3n+2}+20x^{5m+2}y^{3n+3}$
13. $-12a^{x+5}b^{y+2}c^{m+5}+12a^{x+4}b^{y+3}c^7-8a^xb^{y+1}c^6$
14. $\frac{1}{3}a^3b^2-\frac{1}{2}a^2b^3-\frac{2}{5}ab^4$
15. $x^5y+8x^4y^2-\frac{4}{9}x^3y^3$
16. $\frac{8}{25}a^7b^2c-\frac{14}{5}a^5b^4c+\frac{32}{25}a^3b^6c-\frac{1}{20}ab^3c$
17. $-4a^{6m+4}b^{2m}c^4+\frac{35}{2}a^{m+6}c^{m+4}$
18. $-3x^{2m-3}+x^{2m-2}-\frac{3}{2}x^{2m-1}$
19. $\frac{28}{3}a^{m+1}b^{3n+1}c+\frac{16}{5}a^mb^{3n+3}$
20. $-\frac{16}{15}m^{3x+3}n^{3a+4}+m^{3x+2}n^{3a+3}+\frac{14}{5}m^{3x}n^5$

EJERCICIO 29

1. $x^2-5x-14$
2. m^2+m-72
3. x^2-5x+6
4. $3x^2+19x+28$
5. $6x^2-11x-10$
6. $25x^2-16y^2$
7. $9x^2+3xy-2y^2$
8. n^4-3n^2-28
9. $\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{3}x-4$
10. $\frac{10}{9}x^2-\frac{16}{3}xy+\frac{3}{2}y^2$
11. $\frac{4}{15}x^2-\frac{31}{30}xy-\frac{3}{4}y^2$
12. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
13. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
14. m^3+n^3
15. m^3-n^3
16. $15x^3-22x^2y-13xy^2+14y^3$
17. $-27a^3+51a^2b+40ab^2-28b^3$
18. $4a^4-2a^3-6a^2+11a-4$
19. $15x^5-20x^4-9x^3+12x^2-18x+24$
20. x^4-3x^3+3x-1
21. $\frac{2}{15}a^3-\frac{27}{10}a^2b+\frac{193}{18}ab^2-\frac{7}{6}b^3$
22. $10x^3-\frac{23}{6}x^2y+\frac{21}{20}xy^2-\frac{1}{15}y^3$
23. $-x^3+\frac{13}{30}x^2y+\frac{63}{40}xy^2-\frac{1}{2}y^3$
24. $m^x-m^{x-1}n-mn^{a-1}+n^a$
25. $b^{m+3}+b^m$
26. $x^{2m+5}+2x^{2m+4}-3x^{2m+3}-4x^{2m+2}+2x^{2m+1}$
27. $x^{2a+3}+4x^{2a+2}+x^{2a+1}-2x^{2a}$
28. $6x^4-31x^3+43x^2-6x-8$
29. $-18x^4-25x^2-14x-9$
30. $4x^5y-6x^4y^2-2x^2y^4-12xy^5$
31. $m^2-2mp-n^2+p^2$
32. $-2m^2+5mn-mp-3n^2-np+10p^2$
33. $a^2-b^2+2bc-c^2$
34. $x^6-2x^5-x^4+4x^3-4x+2$
35. $3x^4-11x^3+20x^2-7x-5$
36. $-x^{2m+4}+2x^{2m+3}-x^{2m+2}+x^{2m}$
37. $2x^{2m+3}+7x^{2m+2}+7x^{2m+1}+x^{2m}-x^{2m-1}$
38. $a^6-2a^4b^2-4a^2b^4+7ab^5-2b^6$
39. $m^{a+2}-2m^a+8m^{a-1}-3m^{a-2}$
40. $30x^{5a+1}+34x^{5a}-31x^{5a-1}-23x^{5a-2}+3x^{5a-3}$
41. $m^6+2m^5-2m^4-3m^3+2m^2-m-1$
42. $\frac{1}{9}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{55}{72}x^3-\frac{17}{12}x^2+\frac{55}{48}x+\frac{3}{2}$
43. $-a^{2x+3}+2a^{2x+2}+2a^{2x+1}-4a^{2x}-a^{2x-1}+a^{2x-2}$
44. $a^{2x+6}+a^{2x+5}+5a^{2x+4}+4a^{2x+3}-a^{2x+2}-5a^{2x+1}-5a^{2x}$

Ejercicio 30

1. $3a^4b^5$
2. $-6x^4$
3. $2a^5b^3$
4. $-4p^2q^4$
5. $-3a^8b$
6. $5a^6b^6$
7. $-\frac{1}{3}x^4y^2$
8. $-\frac{2}{3}a^2b^6$
9. $\frac{2}{3}x^2z$
10. $\frac{1}{4}xy^3z$
11. $-2x^{7a-6}y^{3b-3}$
12. $5a^{n-6}b^{2n+7}$
13. $-3a^{x+2}b^{x+3}c^{x-3}$
14. $\frac{10}{3}x^{5m-5}y^{9n-5}z^{2m-2}$
15. 1
16. $\frac{7}{20}ac^2$
17. $\frac{3}{4}a$
18. $-4xy^5$
19. $\frac{7}{6}a^{m-1}b^{n-2}$
20. $\frac{1}{9}x^4y^5$
21. $-9n^4p$
22. $-\frac{1}{2}c^3d^{5-x}$
23. $2a^3b^2$
24. $\frac{9}{8}a^{4m-1}b^{2n-2}$

Ejercicio 31

1. $x+2$
2. $2x+1$
3. $-5x+2y$
4. $2x^2-x+1$
5. x^2+3x-4
6. $-2x^4+\frac{5}{2}x^2+3x$
7. $9m^3n^4-5m^2n^4+1$
8. $4a^6b^2+6a^5b-\frac{1}{8}a^3$
9. $4x^7y^5-7x^5y^2-1$
10. $\frac{1}{2}a-5$
11. $\frac{1}{30}a^2b^5-\frac{1}{24}ab^3-\frac{1}{6}b^2$
12. $-\frac{1}{3}a^7b^5+2a^5b^4-\frac{2}{9}a^3b$
13. $\frac{9}{4}x^6y^4-\frac{5}{2}x^7y^2+5x^3$
14. $-\frac{5}{36}x^4y^4+\frac{10}{9}x^2y^2-\frac{5}{18}xy^7$
15. $-\frac{1}{5}x^8y^5+\frac{4}{15}x^6y^4-\frac{1}{20}x^3y^3+\frac{2}{5}xy^2$
16. $2+12a^xb^yc^z-16a^{2x}b^{2y}c^{2z}$
17. $\frac{1}{6}x^{a-3}y^{12}-2x^4y^{1-a}$
18. $-4a^{3m+2}b^{3m}+3a^{2m+7}b^{2m-6}-2a^{m+1}b^{m-1}$
19. $-2a^{4m-6}b^{n+10}+5a^{5m-4}b^{n-1}-\frac{4}{5}a^{3m-2}b^{5-2n}$
20. $9x^{2a}y^bz^3+2x^{2a-1}y^{b-1}z^{c+2}-4x^{2a-2}y^{b-3}z^{c+3}$

Ejercicio 32

1. $x+2$
2. $x+1$
3. $x+3y$
4. $x+3$
5. $x-6$
6. $x+6$
7. $m-4n$
8. $x-10y$
9. n^2-6
10. m^3+4
11. x^4+2
12. x^6-7
13. $3x-7$
14. $4m-3$
15. $5a-7$
16. $2a+3b$
17. $7m-3$
18. $3a+4b$
19. $7m-3n$
20. $3x-2y$
21. $3m^2-5n^2$
22. $3m^2+5$
23. $5m^3-6$
24. $5m^2-3m-2$
25. $3x^2+7x-6$
26. $2a-7$
27. x^2+xy+y^2
28. $4x^2-6xy+9y^2$
29. $x^4+2x^2y^2+4y^4$
30. a^3+a^2+a
31. $x-4$
32. $2x^2+xy+3y^2$
33. $3x^2+x-2$
34. $3x^2-x+1$
35. $2x^2-3x-1$
36. $2x^2-3x-5$
37. $4a^2-6a-7$
38. $6x^2-3x-4$
39. $7x^2+x-4$
40. $5x^2-9x-3$
41. $4x^2+3x-1$
42. $5a^3-3a^2b-6ab^2-2b^3$
43. $4x^5-6x^4-7x^3-8x^2-3x+2$
44. $\frac{5}{3}a+\frac{1}{2}b$
45. $4x-\frac{1}{5}y$
46. $4m-\frac{1}{3}n$
47. $\frac{1}{4}a+\frac{2}{3}$
48. $x^{a+2}-x^{a+1}+x^a$
49. $a^{m-1}-b^{y-1}$
50. $m^a-2m^{a-1}+m^{a-2}$
51. $m^{x+2}+3m^{x+1}-2m^x$
52. $m^{x+2}+2m^{x+1}-m^x$
53. $-5m^{2x+2}+m^{2x+1}+3m^{2x}$
54. $x^{m+4}-x^{m+3}-2x^{m+2}+x^{m+1}$

Ejercicio 33

1. $6t^2-t+6$
2. $x^2+2x+4\,400$
3. $5x^2+6xy+y^2$
4. $15y^2+14y+3$
5. $20x^2-7xy-6y^2$
6. $12w^3-8w^2-13w-3$
7. $4x+y$
8. $6t^4+t^3+7t^2-2$
9. $40x^2+36x+8$
10. $9x^2-1$
11. $15x^2+4x-3$
12. $20x^2-3x-9$

CAPÍTULO 14

EJERCICIO 34

1. $x^2 + 16x + 64$
2. $m^2 - 20m + 100$
3. $a^2 - 6a + 9$
4. $y^2 + 2y + 1$
5. $y^2 + 10y + 25$
6. $p^2 - 12p + 36$
7. $1 - 2b + b^2$
8. $x^2 - 10x + 25$
9. $4 + 4n + n^2$
10. $16 - 8m + m^2$
11. $y^2 + 18y + 81$
12. $x^2 - 24x + 144$
13. $p^2 + 30p + 225$
14. $4a^2 - 4a + 1$
15. $\frac{25}{16}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{9}$
16. $9a^2x^2 - 6ax + 1$
17. $m^2n^2 + 16amn + 64a^2$
18. $49a^2 - 42ab + 9b^2$
19. $4x^2 + 12xy + 9y^2$
20. $x^2 + 0.4x + 0.04$
21. $16x^6 + 40x^3y + 25y^2$
22. $81a^6 - 18a^5b + a^4b^2$
23. $36m^2n^8 + 36m^6n^4p + 9m^{10}p^2$
24. $a^{10} - 2a^5b^5 + b^{10}$
25. $1 - \frac{3}{2}xy + \frac{9}{16}x^2y^2$
26. $\frac{1}{16}x^2 - xy^3 + 4y^6$
27. $\frac{4}{9x^2} - \frac{1}{3xy} + \frac{1}{16y^2}$
28. $9x^4 + 24x^3y^7 + 16x^2y^{14}$
29. $25a^2b^2 - 30abxy^5 + 9x^2y^{10}$
30. $m^{18} + 24m^9y^4 + 144y^8$
31. $9x^4 - 54x^2y^6 + 81y^{12}$
32. $a^{2x} - 2a^xb^y + b^{2y}$
33. $9x^{8a-10} + 12x^{4a-5}y^{2a+1} + 4y^{4a+2}$
34. $m^{6a+12} - 8m^{3a+6}n^{3b} + 16n^{6b}$
35. $9a^{2x} + 3a^{4x}b^{4y} + \frac{1}{4}a^{6x}b^{8y}$
36. $\frac{16}{25}a^{4m-2} - \frac{12}{5}a^{2m-1}b + \frac{9}{4}b^2$
37. $0.36m^{4x} - 0.6m^{2x}n^4 + 0.25n^8$
38. $36x^{6m-4} + 60x^{3m-2}y^{4m}z^3 + 25y^{8m}z^6$
39. $0.09x^{4a} - 0.48x^{2a}y^{b-1} + 0.64y^{2b-2}$
40. $\frac{25}{9}x^{6a-4} + 4x^{3a-2}y^{1-3a} + \frac{36}{25}y^{2-6a}$
41. $\frac{x^{16-2y}}{4} + 3x^{8-y}y^{8-x} + 9y^{16-2x}$
42. $\frac{x^{8a}}{25} - \frac{b^{4x}x^{4a}y^{a+1}}{10} + \frac{b^{8x}y^{2a+2}}{16}$
43. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz$
44. $9x^2 + 4y^2 - 12xy + 6x - 4y + 1$
45. $a^2 + 36b^2 + 25c^2 + 12ab - 10ac - 60bc$
46. $a^4 + 10a^3 + 33a^2 + 40a + 16$
47. $a^4 + 6a^3 + 5a^2 - 12a + 4$
48. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$
49. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4$
50. $4a^2 - 12ab + 9b^2 + 4a - 6b + 1$
51. $16m^2 + 25n^2 + p^2 + 40mn + 8mp + 10np$
52. $9x^4 + 4y^4 + 1 + 12x^2y^2 - 6x^2 - 4y^2$
53. $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2 + c^2 + ac + \frac{1}{3}ab + \frac{2}{3}bc$
54. $\frac{1}{36}x^2 + y^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{12}x - \frac{1}{2}y$
55. $\frac{4}{x^2} + \frac{9}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{12}{xy} - \frac{4}{xz} - \frac{6}{yz}$
56. $a^{2x} + b^{2y} + c^{2z} - 2a^xb^y + 2a^xc^z - 2b^yc^z$
57. $a^{2x+2} - 4a^{2x+1} + 2a^{2x} + 4a^{2x-1} + a^{2x-2}$

EJERCICIO 35

1. $x^2 - 9$
2. $a^2 - 1$
3. $b^2 - 4$
4. $k^2 - 64$
5. $25 - y^2$
6. $81 - a^2$
7. $m^2 - n^2$
8. $x^2y^2 - z^2$
9. $9x^2 - 25y^2$
10. $16m^2 - 81n^2$
11. $4b^2 - 9c^2$
12. $36x^{10} - 1$
13. $9m^6 - 64$
14. $25x^8y^2 - 16z^2$
15. $81a^2b^8 - c^{14}$
16. $49a^8b^6 - c^2d^{10}$
17. $\frac{9}{25}m^2 - \frac{1}{4}$
18. $\frac{49}{36}x^6 - \frac{9}{4}$
19. $\frac{1}{9}x^2y^2 - z^{12}$
20. $9x^4 - \frac{1}{100}$
21. $9a^{2x-8} - b^{6x}$
22. $64y^{4a-6} - 16x^{8a}$
23. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
24. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
25. $m^2 - n^2 - 2np - p^2$
26. $x^2 + 2xy + y^2 - 9$
27. $16x^2 - 9y^2 + 6yz - z^2$
28. $x^4 + x^2y^2 + y^4$
29. $m^8 - m^4 - 2m^3 - m^2$
30. $4x^2 + 20xy + 25y^2 - 9z^2$
31. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 1$
32. $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m + \frac{1}{16} - \frac{4}{9}n^2$
33. $\frac{4}{25}x^4 + \frac{37}{315}x^2y^2 + \frac{4}{49}y^4$
34. $\frac{1}{9}x^{2m+2} - \frac{1}{36}x^{2m} + \frac{1}{6}x^{2m-1} - \frac{1}{4}x^{2m-2}$

35. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$
36. $x^2 + 2xz + z^2 - y^2 + 2y - 1$
37. $m^2 - 10m + 25 - 4n^2 + 12np - 9p^2$
38. $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 8z - 16$
39. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 16z^2 + 56z - 49$
40. $x^2 - 2xy + y^2 - 9z^2 - 30z - 25$

Ejercicio 36

1. $x^2 - 3x - 40$
2. $m^2 + 3m - 28$
3. $x^2 - 12x + 20$
4. $x^2 - 11x + 30$
5. $x^2 + 10x + 24$
6. $n^2 + n - 12$
7. $x^2 - 9x + 8$
8. $a^2 - 6a - 27$
9. $x^2 - 3x - 10$
10. $m^2 + 5m - 24$
11. $4x^2 - 4x - 24$
12. $9m^2 + 6m - 24$
13. $36x^2 - 6x - 12$
14. $16x^2 - 28x + 10$
15. $2 - 9x + 9x^2$
16. $25x^2 + 50x + 24$
17. $4 - 2x - 42x^2$
18. $25 - 35x - 18x^2$
19. $x^4 - 4x^2 - 60$
20. $m^6 - 12m^3 + 32$
21. $x^8 - 6x^4 - 72$
22. $x^{10} + x^5 - 2$
23. $a^6 - 7a^3 + 10$
24. $x^{4m-2} + 2x^{2m-1} - 35$
25. $a^4x^6 + 3a^2x^3b^4 + 2b^8$
26. $9x^{2m} - 9x^my^n - 28y^{2n}$
27. $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{9}$
28. $\frac{1}{9}m^2 - \frac{1}{30}m - \frac{1}{5}$
29. $\frac{9}{16}y^2 - \frac{11}{32}y - \frac{5}{48}$
30. $x^2y^2 - \frac{11}{8}xy + \frac{15}{32}$
31. $\frac{9}{49}y^2 - \frac{9}{70}xy - \frac{2}{5}x^2$
32. $\frac{36}{25}x^4 + \frac{1}{10}x^2y^2 - \frac{1}{12}y^4$
33. $a^2 + 2ab + b^2 + 7a + 7b + 12$
34. $a^2 - 4ab + 4b^2 + 6a - 12b + 5$
35. $x^2 - 2xy + y^2 - 4xz + 4yz - 21z^2$
36. $4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y - 2$
37. $m^4 + 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2 + 4n^2 - 45$
38. $a^2 - b^2 + 3c^2 - 4ac - 2bc$
39. $x^2 - 6y^2 - 4z^2 + xy - 3xz + 11yz$
40. $a^2 + c^2 - 25b^2 + 2ac$

Ejercicio 37

1. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
2. $m^3 + 18m^2 + 108m + 216$
3. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
4. $a^3 + 30a^2 + 300a + 1\,000$
5. $n^3 - 21n^2 + 147n - 343$
6. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
7. $1 - 3x + 3x^2 - x^3$
8. $1\,000 - 300m + 30m^2 - m^3$
9. $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
10. $27a^3 - 108a^2 + 144a - 64$
11. $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
12. $1 - 12m + 48m^2 - 64m^3$
13. $27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$
14. $125m^6 + 150m^4n^5 + 60m^2n^{10} + 8n^{15}$
15. $27x^9y^3 - 54x^6y^2z^4 + 36x^3yz^8 - 8z^{12}$
16. $64x^6 + 96x^5y + 48x^4y^2 + 8x^3y^3$
17. $27m^{12} - 108m^{11}n + 144m^{10}n^2 - 64m^9n^3$
18. $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}$
19. $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$
20. $\frac{8}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}$
21. $\frac{27}{125}x^3 + \frac{36}{25}x^2y + \frac{16}{5}xy^2 + \frac{64}{27}y^3$
22. $\frac{1}{8}a^3 - \frac{9}{16}a^2b + \frac{27}{32}ab^2 - \frac{27}{64}b^3$
23. $\frac{1}{27}x^{12} + \frac{1}{3}x^8y + x^4y^2 + y^3$
24. $8x^{6a-9} - 36x^{4a-6}y^{4a+1} + 54x^{2a-3}y^{8a+2} - 27y^{12a+3}$

Ejercicio 38

1. $x^4 + x^2 - 2$
2. $m^4 - 65m^2 + 64$
3. $81x^4 - 162x^3 - 99x^2 + 180x + 100$
4. $625x^4 - 1\,800x^2 + 1\,296$
5. $m^6 - 12m^4 + 48m^2 - 64$
6. $x^4 - 72x^2 + 1\,296$
7. $n^8 - 36n^4 + 84n^2 - 49$
8. $x^{16} - 2x^8y^4 + y^8$
9. $16m^4 - 4m^3 - 200m^2 - 148m - 48$
10. $6\,561 - 1\,296x^{12}$
11. $x^4 - 41x^2 + 400$
12. $\frac{16}{81}x^{16} - \frac{8}{225}x^8y^{10} + \frac{1}{625}y^{20}$
13. $256x^8 - 32x^4y^4 + y^8$
14. $m^4 - m^2 - 2m - 1$
15. $x^4 - y^4$
16. $m^6 - 12m^4 + 48m^2 - 64$
17. $x^8 - 2x^4y^4 + y^8$
18. $x^4 - 10x^2 + 9$
19. $m^8 - 11m^4 - 80$
20. $n^{12} - 48n^8 + 768n^4 - 4\,096$

Capítulo 15

Ejercicio 39

1. $a(a + 1)$
2. $a^3b(b - 2)$
3. $a^2(a^2 + a - 1)$
4. $6x^4(3x + 5)$
5. $12x^2(4 - x - 2x^2)$
6. $5b^2(5 + 7b^2 - 9b^3)$
7. $11a(x - 11ax + 3a^2)$
8. $3ab(3a^4 - 4ab^2 + 5b - 6a^2b^3)$
9. $3(3x^2 + 2x + 1)$
10. $4x^2(x^2 - 2x + 3)$
11. $6x(x - y - 1)$
12. $14x^2(y^2 - 2x + 4x^2)$
13. $17a(2x^2 + 3ay - 4y^2)$
14. $55m^2(n^3x + 2n^3x^2 - 4y^3)$
15. $5x^2(5x^5 - 2x^3 + 3x - 1)$
16. $3a(3a - 4b + 5a^2b^2 - 8b^3)$
17. $12m^2n(1 + 2mn - 3m^2 + 4m^3n^3)$
18. $a^2b(3 + 6ab - 5a^2b^2 + 8a^3b^3 + 4a^4b^4)$
19. $8x^2y(2xy - x^2 - 3 - 5y^2)$
20. $50abc(2ab^2 - 3bc + b^2c^2 - 4c)$
21. $31a^2x(3axy - 2x^2y^2 - 4)$
22. $2x(3x - 1)^2(x + 3)$
23. $3(x + 1)(2 - x)$
24. $x(x + 2)(x - 1)$
25. $4x^2(2x - 5)(2x - 3)$
26. $(2x - 1)(3 - 2x)$

Ejercicio 40

1. $(m + n)(m + x)$
2. $(x^2 + 1)(3x - 1)$
3. $(x + y)(a - b)$
4. $(y - 3a)(2y^2 - 1)$
5. $(a - 2b)(m - 3n)$
6. $(a^2 - 3b)(4x - 5y)$
7. $(m^2 - 3n)(z^2 + p^2)$
8. $(5m + n^2)(mn + p^2)$
9. $(3a - 2b)(y^4 + 1)$
10. $(2m + 3n)(x^4 + 5)$
11. $(b - c)(y^2 + m^2)$
12. $(x + 3)(x^2 - 5)$
13. $(b - 3m)(3z - y)$
14. $(a^2 + 1)(a + 1)$
15. $(1 - 3a^2)(2a + 1)$
16. $(3x - 7)(x^2 + 1)$
17. $(1 - 4a)(b - 1)$
18. $(3m + 2)(6m^2 - 5)$
19. $(xz + my)(xy - mz)$
20. $(p^2t + m^2n)(pt^2 + mn^2)$

EJERCICIO 41

1. $(x-1)(x+1)$
2. $(x+7)(x-7)$
3. $(9-x)(x+9)$
4. $(4x-3)(4x+3)$
5. $(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$
6. $(x^2+8)(x^2-8)$
7. $4(5-2x)(5+2x)$
8. $(6x-1)(6x+1)$
9. $(2-5x)(5x+2)$
10. $(2a^2-3bc)(2a^2+3bc)$
11. $(x^3+6)(x^3-6)$
12. $(4a^2b^3+c^3)(4a^2b^3-c^3)$
13. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$
14. $\left(x+\frac{2}{9}\right)\left(x-\frac{2}{9}\right)$
15. $\left(x-\frac{4}{7}\right)\left(x+\frac{4}{7}\right)$
16. $\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$
17. $\left(7x-\frac{4}{5}\right)\left(7x+\frac{4}{5}\right)$
18. $\left(x^{3a}-y^{2b}\right)\left(x^{3a}+y^{2b}\right)$
19. $\left(a^{x+3}-3b^{3y}\right)\left(a^{x+3}+3b^{3y}\right)$
20. $\left(m^{2a+4}-5\right)\left(m^{2a+4}+5\right)$
21. $\left(1-x^{a}\right)\left(1+x^{a}\right)$
22. $\left(m^{3x-2y}-n^{4x+y}\right)\left(m^{3x-2y}+n^{4x+y}\right)$
23. $\left(4x^{3a}-7y^{b}\right)\left(4x^{3a}+7y^{b}\right)$
24. $(x+y-4)(x-y+2)$
25. $(2x+y+6)(2x-y-4)$
26. $(x-4y-1)(x+4y-1)$
27. $(3x-1)(9x-7)$
28. $(3x+2y)(5x+6y)$
29. $4(7x-9)(13x-6)$
30. $3x^2(3x-2)(5x+6)$

EJERCICIO 42

1. $(a+4)^2$
2. $(m-5)^2$
3. $(n-4)^2$
4. $(x-3)^2$
5. $(x+6)^2$
6. $(3a-5)^2$
7. $(11c-6)^2$
8. $(4a+3b)^2$
9. $(2a-5b)^2$
10. $(3a+b)^2$
11. $(2a-3b)^2$
12. $a^2(12x^2a-1)^2$
13. $(10a^2-3b)^2$
14. $(a^4+6bc)^2$
15. $(9a^6+11)^2$
16. $(7x^3-5ay^2)^2$
17. $(20a^5+1)^2$
18. $(x^4+9)^2$
19. $\left(\frac{y}{2}-z\right)^2$
20. $\left(\frac{p}{3}+1\right)^2$
21. $\left(x^2-\frac{y^2}{2}\right)^2$
22. $\left(\frac{5}{6}b^2-\frac{1}{5}\right)^2$
23. $\left(4m^3-\frac{n^2}{4}\right)^2$
24. $[3a+3x-2]^2$
25. $(2m-n+3)^2$
26. $(5a-b)^2$
27. $4n^2$
28. $(3a-b)^2$
29. $(b-m)^2$
30. $\left(\sqrt{x}+\sqrt{2y}\right)^2$
31. $\left(\sqrt{ax}+2\right)^2$
32. $\left(a^{\frac{3}{2}}-5\right)^2$
33. $\left(x^{\frac{1}{6}}+3\right)^2$
34. $\left(4x^{\frac{1}{4}}-1\right)^2$
35. $\left(m^{\frac{1}{3}}+2\right)^2$
36. $\left(\sqrt[3]{m}-3\right)^2$

EJERCICIO 43

1. $(x+2)(x+1)$
2. $(m-6)(m-5)$
3. $(n-4)(n-3)$
4. $(y-8)(y-7)$
5. $(x+6)(x+1)$
6. $(x+4)(x+3)$
7. $(a+6)(a+4)$
8. $(b-5)(b-2)$
9. $(m-5)(m-4)$
10. $(y+3)(y+1)$
11. $(x-4)(x-1)$
12. $(n+4)(n+2)$
13. $(a-18)(a+2)$
14. $(y+6)(y-5)$
15. $(x-9)(x+2)$
16. $(x-10y)(x-8y)$
17. $(a-10b)(a+5b)$
18. $(m-10n)(m+3n)$
19. $(x+8y)(x-7y)$
20. $(m^2+4)(m-1)(m+1)$
21. $(y-2)(y+2)(y^2-2)$
22. $(n+4)(n-4)(n-2)(n+2)$
23. $(a-6)(a+6)(a-1)(a+1)$
24. $(x^2-10)(x^2+9)$
25. $(ab+4)(ab-3)$
26. $(5y+7)(5y+6)$
27. $(y^3-7)(y^3+2)$
28. $(m-7n)(m+3n)$
29. $(5-b)(1+b)$
30. $(z^5+5)(z^5-4)$
31. $(y^2+12x)(y^2-5x)$
32. $(a-b+8)(a-b-3)$
33. $(x^2y^2-11)(x^2y^2+9)$
34. $(m^2n^2+12)(m^2n^2-11)$
35. $(n-18)(n-16)$
36. $(y+25)(y-22)$
37. $(c-44)(c+22)$
38. $(a+21)(a+12)$
39. $(x+33)(x+11)$
40. $(t-54)(t-45)$
41. $(x+8)(3-x)$
42. $(4-x)(x+3)$
43. $(x+8)(5-x)$
44. $(7-x)(x+6)$
45. $(8-3x)(3x+2)$
46. $(2x+9)(1-2x)$
47. $(7-8x)(8x+11)$
48. $(13-5x)(5x+11)$
49. $\left(x^{a}-9\right)\left(x^{a}-4\right)$
50. $\left(b^{2x}+9\right)\left(b^{2x}-8\right)$
51. $\left(y^{3a}+64\right)\left(y^{3a}+1\right)$
52. $\left(x^{4a}+2\right)\left(1-x^{a}\right)\left(1+x^{a}\right)\left(1+x^{2a}\right)$
53. $\left(9-x^{a+2}\right)\left(x^{a+2}+5\right)$
54. $(x-7)(x-3)$
55. $2(x-9)(2x+1)$
56. $(5x+y+7)(5x+y-6)$
57. $6a(6a-5)$
58. $(x+3y+11)(2-x-3y)$
59. $4(4x+7)(1-x)$
60. $(x+3y)(4y-x)$

EJERCICIO 44

1. $(5m-2)(m+3)$
2. $(3a+1)(a-2)$
3. $(3y+2)(2y+1)$
4. $(2x-1)(x+2)$
5. $(4n+3)(n+3)$
6. $(4x+1)(5x-1)$
7. $(7a+5)(a-7)$
8. $(y+2)(2y+1)$
9. $(4x+1)(5x+2)$
10. $(3m+2)(5m-6)$
11. $(2z+5)(10z-3)$
12. $(b+10)(2b+9)$
13. $(2y^2+3)(3y^2-2)$
14. $(2m^2-7)(7m^2+2)$
15. $(3ab-5)(2ab+5)$
16. $(3y+b)(5y-2b)$
17. $(n-3m)(6n+5m)$
18. $(3x+5)(6-x)$
19. $(4b^2+5)(3-2b^2)$
20. $(5x-3y)(6x+7y)$
21. $(2a^4+5)(5a^4+2)$
22. $(2a-15b)(3a+b)$
23. $(3x^2-2)(-2x^2-3)$
24. $(3x^5-10)(10x^5+3)$
25. $(2m-n)(3m-4n)$
26. $(2ax-7y)(3ax+5y)$
27. $(3a-2b)(8a+7b)$
28. $(xy+2)(4xy-5)$
29. $(a^2b-3c)(5a^2b+2c)$
30. $(m+10n)(2m-11n)$

EJERCICIO 45

1. $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3x+\frac{1}{4}\right)$
2. $\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(2x-\frac{1}{3}\right)$
3. $\left(3x+\frac{3}{2}\right)\left(2x+\frac{1}{4}\right)$
4. $\left(m+\frac{2}{3}\right)\left(5m+\frac{1}{2}\right)$
5. $\left(m+\frac{1}{3}\right)\left(4m-\frac{1}{5}\right)$
6. $\left(\frac{a}{6}+\frac{1}{9}\right)\left(a+\frac{3}{4}\right)$
7. $\left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}y\right)$
8. $\frac{1}{25}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(3x+\frac{5}{4}\right)$
9. $\frac{1}{24}\left(x-3y\right)\left(x-\frac{4}{3}y\right)$
10. $\left(\sqrt{x}+5\right)\left(2\sqrt{x}+3\right)$
11. $\left(3\sqrt{x}-2\right)\left(4\sqrt{x}+1\right)$
12. $\left(5\sqrt{x}+4\right)\left(3\sqrt{x}-7\right)$
13. $\left(x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}\right)\left(2x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$
14. $\left(2x^{\frac{1}{3}}+5\right)\left(3x^{\frac{1}{3}}-8\right)$
15. $\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)\left(3x^{\frac{1}{3}}-1\right)$
16. $\left(\sqrt{x+y}-2\right)\left(5\sqrt{x+y}+4\right)$
17. $\left(3x^{\frac{2}{3}}-8y^{\frac{1}{2}}\right)\left(4x^{\frac{2}{3}}+5y^{\frac{1}{2}}\right)$
18. $\left(2x^{\frac{2}{3}}+3y^{\frac{2}{3}}\right)\left(4x^{\frac{2}{3}}-5y^{\frac{2}{3}}\right)$

EJERCICIO 46

1. $(2x-1)(4x^2+2x+1)$
2. $(x+3)(x^2-3x+9)$
3. $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$
4. $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$
5. $(2a+3b^2)(4a^2-6ab^2+9b^4)$
6. $(4a-9)(16a^2+36a+81)$
7. $(8-3a^3)(64+24a^3+9a^6)$
8. $(x^2-2y^4)(x^4+2x^2y^4+4y^8)$
9. $(1-6m)(1+6m+36m^2)$
10. $(a-5)(a^2+5a+25)$
11. $(3m+4n^3)(9m^2-12mn^3+16n^6)$
12. $(7x-8y^2)(49x^2+56xy^2+64y^4)$
13. $(a^2+5b^4)(a^4-5a^2b^4+25b^8)$
14. $(2x^2+9)(4x^4-18x^2+81)$
15. $(3m^2+7n^3)(9m^4-21m^2n^3+49n^6)$
16. $\left(x^{\frac{1}{9}}+y^{\frac{1}{9}}\right)\left(x^{\frac{2}{9}}-x^{\frac{1}{9}}y^{\frac{1}{9}}+y^{\frac{2}{9}}\right)$
17. $\left(a^{\frac{1}{4}}-2b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+4b^{\frac{1}{2}}\right)$
18. $\left(x^{\frac{1}{2}}+5y^{\frac{3}{2}}\right)\left(x-5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+25y^3\right)$
19. $(x^{a+1}-y^{2a})(x^{2a+2}+x^{a+1}y^{2a}+y^{4a})$
20. $(3y-x)(7x^2+3xy+3y^2)$
21. $(x+y)(x^2-4xy+7y^2)$
22. $(-2n)(27m^2+18mn+4n^2)$
23. $-(a+2b)(7a^2+19ab+13b^2)$
24. $\frac{1}{216}\left(5x-y\right)\left(7x^2+5xy+19y^2\right)$

EJERCICIO 47

1. $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$
2. $(a-2)(a^6+2a^5+4a^4+8a^3+16a^2+32a+64)$
3. $(3-2x)(81+54x+36x^2+24x^3+16x^4)$
4. $(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$
5. $(m-n)(m^4+m^3n+m^2n^2+mn^3+n^4)$
6. $(x-ab)(x^6+x^5ab+x^4a^2b^2+x^3a^3b^3+x^2a^4b^4+xa^5b^5+a^6b^6)$
7. $(1-a)(1+a+a^2+a^3+a^4)$
8. $(xy+5)(x^4y^4-5x^3y^3+25x^2y^2-125xy+625)$
9. $(x-1)(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
10. $(x+2)(x^8-2x^7+4x^6-8x^5+16x^4-32x^3+64x^2-128x+256)$

EJERCICIO 48

1. $(m+2n+1)(m-2n+1)$
2. $(y+z-3)(y-z-3)$
3. $(x-y+5)(x+y-5)$
4. $(m^2-n^3-3)(m^2+n^3+3)$
5. $(7m^2-5m+3n)(7m^2+5m-3n)$
6. $(m+a-x-3)(m+a+x+3)$
7. $(1-a-3n)(1+a+3n)$
8. $(m-n+1)(m+n+3)$
9. $(1-y+b)(1+y-b)$
10. $(5p+m+1)(5p-m-1)$
11. $(m-n+2)(m+n+10)$
12. $(x+y+4a+3b^5)(x+y-4a-3b^5)$
13. $(10-3y+m-ap)(10-3y-m+ap)$
14. $(a+5b+m+3n)(a+5b-m-3n)$
15. $(2m-7n-3a-5b)(2m-7n+3a+5b)$

EJERCICIO 49

1. $(x-2)(x-1)$
2. $(x-5)(x+4)$
3. $(m-5)(m-2)$
4. $(x-8)(x+6)$
5. $(a-10)(a+4)$
6. $(n+9)(n-6)$
7. $(3x+4)(x+2)$
8. $(3m+2)(2m+1)$

9. $(3a-4)(a+1)$
10. $(3x+4)(2x-3)$
11. $(n^2+n+1)(n^2-n+1)$
12. $(a^2-2a-1)(a^2+2a-1)$
13. $(m^4-2m^2n^2+4n^4)(m^4+2m^2n^2+4n^4)$
14. $(x^2+5x-10)(x^2-5x-10)$
15. $(8a^2-6a+7)(8a^2+6a+7)$
16. $(a^2b^2-ab+11)(a^2b^2+ab+11)$
17. $(6m^2-5mn-7n^2)(6m^2+5mn-7n^2)$
18. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
19. $(a^2-ab-3b^2)(a^2+ab-3b^2)$
20. $(2m^4+5m^2n^2-7n^4)(2m^4-5m^2n^2-7n^4)$

EJERCICIO 50

1. $x(x-7)(x+4)$
2. $3(a-2)(a+1)$
3. $3m(m-1)(m+1)$
4. $(y^2+1)(y-2)(y+2)$
5. $(m-1)^2(m+1)$
6. $a(2x+1)(3x-2)$
7. $x(x^2+1)(x-1)$
8. $2a(2x+1)(2x-1)$
9. $a(a^2+2)(a-1)(a+1)$
10. $(2+m)(2-m)(4-2m+m^2)(4+2m+m^2)$
11. $(x-4)(x-3)(x+4)(x+3)$
12. $(a-b)(a^2-ab+b^2)(a+b)^2$
13. $a(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$
14. $a(x+1)^3$
15. $(a^3+2)(a^2+3a+9)(a-3)$
16. $(a+1)(a-1)(a^2-a+1)$
17. $4m^2(y-1)(y^2+y+1)$
18. $3mn(p-2)(p+3)$
19. $(4+a)(4-a)(16+a^2)$
20. $(a-b)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)$
21. $2(2x+1)(2x-1)(x^2+1)$
22. $5m(xy+2)(y-1)(y+1)$
23. $(a+3)(a-3)(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)$
24. $x(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
25. $(a-1)^2(a-b)(a+b)$
26. $4a(a^2-a+1)(a^2+a+1)$
27. $(m-1)(m+2)(m-2)$
28. $y(y+2)(y+6)(y-2)(y-6)$
29. $m(m^2+1)(m-1)(m+1)$
30. $-m(3m-y)^2$

EJERCICIO 51

1. $(b-1)^2(b+1)$
2. $(w-1)(w+1)(w+2)$
3. $(x-3)(x-2)(x+1)$
4. $(x-4)(x+2)(x+3)$
5. $(x-1)(2x-1)(2x+3)$
6. $(m+2)(m^2+1)$
7. $(y+1)(3y+2)(2y-3)$
8. $(a-3)(a-1)(a+1)(a+3)$
9. $(x-4)(x+5)(3x+1)$
10. $(m+5)(m+4)(m^2-3m+7)$
11. $(n-2)^2(n+1)^2$
12. $(x-2)^2(x+1)(x-1)$
13. $(x-1)^2(x+2)(x-3)$
14. $(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)^2$
15. $(a-6)(a+2)(a+5)(a^2-a+3)$
16. $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)(2x-1)$
17. $(x-3)(x-2)(x-1)(x^2+2x+4)$
18. $(x-2)(x-1)(x+3)(2x-1)(3x+5)$
19. $(n-3)(n+3)(n-2)(n+2)(n-1)(n+1)$
20. $(x-5)(x-1)(x+1)(2x+7)(x^2+1)$

CAPÍTULO 16

EJERCICIO 52

	MCD	mcm
1.	$7x^2y^3z^2$	$210x^2y^5z^4$
2.	$24m^2y^2$	$1\,440m^4y^5$
3.	$2xy$	$40x^3y^3z^2$
4.	$13abc$	$156\,a^2b^2c^2$
5.	$15mn^x$	$2\,100m^4n^{x+2}$
6.	$11x^a y^b$	$132x^{a+2}y^{b+2}$
7.	$6a^2(x-1)^2$	$360\,a^5(x-1)^4$
8.	$9(a-b)(x+y)$	$135(a-b)^2(x+y)^2$
9.	6	$360(2x+1)^2(x-7)(x+8)^2$
10.	$19a(1+b)$	$228\,a^4(1+b)^3$
11.	$x+1$	$xy(x+1)$
12.	$m-1$	$(m-1)(m+1)(m^2+m+1)$
13.	$m+n$	$m^2n(m+n)$
14.	$x-y$	$(x-y)^2(x+y)$
15.	$x-2$	$3xy(x-2)(x+2)(x+1)$
16.	$3a-1$	$a(3a-1)^2(9a^2+3a+1)$
17.	$m-4$	$m(m-4)(m+3)(m+2)(m-5)$
18.	$a(a-1)$	$12a^2(a-1)$
19.	$2b+1$	$(2b+1)(6b+1)(b-3)$
20.	$y-3$	$(y-3)(y+2)(y-1)(2y+1)(2y+3)$

EJERCICIO 53

1. $\frac{2a+2b}{3ab}$
2. $\frac{2a^2b}{a-2b}$
3. $\frac{a+3}{2a}$
4. $\frac{2m^2-6m-8}{5-3m}$
5. $-\frac{m^2n}{n+m}$
6. $\frac{2}{x+2}$
7. $-\frac{x+2y}{x+y}$
8. $\frac{x+13}{x+6}$
9. $\frac{n-2}{n+1}$
10. $\frac{2x+3y}{3x+y}$
11. $\frac{x(2y-x)}{5x+y}$
12. $\frac{3x+4y}{x-3y}$
13. $\frac{b(m-n)}{m+n}$
14. $-\frac{x^2+2x+4}{x+4}$
15. $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$
16. $\frac{y^2+3xy+9x^2}{y+2x}$
17. $\frac{x-1}{x-2}$
18. $\frac{x-y}{x+2y}$
19. $\frac{1}{x+y}$
20. $\frac{a-d}{2ab}$
21. $\frac{y-2}{3a+2}$
22. $\frac{3x}{w-z}$
23. $\frac{w+2}{y-x}$
24. $\frac{p+1}{2-p}$
25. -1
26. $\frac{x+1}{x+3}$
27. $\frac{x-1}{x-4}$
28. $\frac{y-2}{y+2}$
29. $\frac{4-y}{y(y+1)}$
30. $\frac{(2-a)(a+4)}{a-3}$

EJERCICIO 54

1. $\frac{4x-3}{4x}$ 3. $\frac{3n-1}{2n}$ 5. $\frac{4}{n}$ 7. $\frac{x^2+1}{2x}$ 9. 1

2. $\frac{a^2-6}{a}$ 4. $\frac{19m-9}{4n}$ 6. $\frac{3y-5}{2y}$ 8. 5

EJERCICIO 55

1. $\frac{7}{20}$
2. $\frac{7x+9}{6x}$
3. $\frac{3x^2-7x-8}{18x^2}$
4. $\frac{4x^2+7x-18}{12x^2}$
5. $-\frac{h}{(x+h+2)(x+2)}$
6. $-\frac{2h}{(x+h-1)(x-1)}$
7. $-\frac{4xh+2h^2}{\left((x+h)^2-3\right)(x^2-3)}$
8. $\frac{2xh+h^2}{\left((x+h)^2+1\right)(x^2+1)}$
9. $\frac{x}{x-3}$
10. $\frac{3x}{x^2-1}$
11. $\frac{x}{x-2}$
12. $\frac{5x+1}{(x^2-1)(x-1)}$
13. $\frac{7x^2-20x+3}{(x^2-9)(x+3)}$
14. $\frac{5x^2-12x}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}}$
15. $\frac{9x^5+12x^3}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$
16. $-\frac{14x}{(3x^2+2)^{\frac{1}{2}}(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}$
17. $\frac{2x^3-24x}{3(5-x^2)^{\frac{2}{3}}(x^2+2)^{\frac{1}{3}}}$
18. $\frac{8x^2}{(16x^4-9x^2)^{\frac{2}{3}}}$
19. $\frac{x^2-3x-40}{(x+4)(x+8)(x-3)}$
20. $\frac{2x^3+2x^2-5x+34}{(x+3)(x-2)(x+4)}$
21. $\frac{4}{x+4}$
22. $\frac{4}{2x+5}$
23. $\frac{3m}{m^2-mn+n^2}$
24. $\frac{2x^2+27xy-5y^2}{(x+5y)(x-2y)(x-y)}$
25. $\frac{5a}{18(a+b)}$
26. $\frac{rs}{r^2-s^2}$

EJERCICIO 56

1. $\frac{8}{7ab^2x^2}$
2. $\frac{3}{y}$
3. $\frac{y^2}{8bx}$
4. $\frac{16ax}{3b^2}$
5. $\frac{b}{4xy}$
6. $\frac{m+1}{4}$
7. $\frac{b(b-3)}{b-6}$
8. 1
9. $\frac{x}{6}$
10. $\frac{7}{2}$
11. $\frac{5}{2x}$
12. $\frac{x+3}{x-5}$
13. $-\frac{x+6}{x+5}$
14. $\frac{4x+3}{3x+4}$
15. $\frac{x^2+3x+2}{x^2-9x+18}$
16. $\frac{x+6}{4x+1}$
17. $\frac{x(x+3)}{2x+1}$
18. $\frac{x-3}{a-1}$
19. $2\left(\frac{x-5}{x-3}\right)$
20. $\frac{n+4}{n-4}$

EJERCICIO 57

1. $\frac{3y}{4x^2}$
2. $\frac{a^2b^4}{x^4}$
3. $\frac{3}{x^2(2x+3)^2}$
4. $6x^3(2x^3+1)^{\frac{1}{3}}$
5. $\frac{4(x+y)}{3}$
6. $\frac{x^2+1}{x^2}$
7. $\frac{x-9}{x+9}$
8. $\frac{x+1}{x-1}$
9. $\frac{x^2-6x+5}{x^2+x-12}$
10. $\frac{x^2-11x+30}{3x^2-14x+8}$
11. $\frac{2x-1}{2x-5}$
12. $\frac{x+4}{x}$
13. $\frac{1}{2x-1}$
14. $\frac{x+11}{x^2-7x}$
15. $\frac{x^2-2x-35}{x^2-8x}$
16. $\frac{1}{a+3}$
17. $\frac{5x+1}{2x^2+3x}$
18. $\frac{b}{a+b}$
19. $\frac{x^2+6x+8}{x^2+6x+9}$
20. $\frac{n}{n^2+2}$
21. $\frac{a^2+ab}{a-b}$
22. $\frac{x^2-1}{x^3+2}$

EJERCICIO 58

1. $\frac{1}{x-7}$
2. $\frac{a+1}{a^2+a+1}$
3. $\frac{a+1}{a-1}$
4. $\frac{t+1}{t}$
5. $\frac{2(x-4)}{3(x+3)}$
6. $\frac{x}{6x^2-7x+2}$
7. $\frac{6x^2+9}{2x^2-x-3}$
8. $\frac{x-3}{x-10}$
9. $\frac{(2x-3)^2}{x(2x+3)}$
10. $\frac{(x-5)^2(x+3)^2}{(x-2)^2(x-1)^2}$
11. $\frac{3x^2+5x}{(x+1)(x+3)}$
12. $\frac{2x^2-x-25}{x^2-25}$

EJERCICIO 59

1. $\frac{x}{x+1}$
2. $\frac{n-1}{2n-1}$
3. $\frac{y}{2y-3}$
4. $\frac{m+3}{m-5}$

5. y^2+y+1
6. $\frac{b+a}{b-a}$
7. x
8. $\frac{n-3}{n^2+4n}$
9. $\frac{a-4b}{a-3b}$
10. $\frac{1}{y(y-x)}$
11. $ab-b^2$
12. $a-2b$
13. $\frac{x+2}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}(2x+3)^{\frac{3}{2}}}$
14. $\frac{x^3-10x}{(x^2-5)^{\frac{3}{2}}}$
15. $\frac{-2}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}(3x-1)^{\frac{4}{3}}}$
16. $\frac{1-5x^2}{3x^{\frac{2}{3}}(5x^2+1)^{\frac{4}{3}}}$

CAPÍTULO 17

EJERCICIO 60

1. $x=3$
2. $y=10$
3. $z=-1$
4. $x=-2$
5. $x=4$
6. $y=3$
7. $x=\frac{8}{3}$
8. $x=-\frac{4}{5}$
9. $w=-2$
10. $z=-\frac{11}{7}$
11. $x=5$
12. $x=2$
13. $y=-3$
14. $z=-8$
15. $w=-14$
16. $x=-\frac{1}{2}$
17. $x=\frac{1}{2}$
18. $y=-2$
19. $x=6$
20. $x=\frac{11}{10}$
21. $y=-3$
22. $x=14$
23. $x=\frac{11}{23}$
24. $z=3$
25. $y=-\frac{9}{13}$
26. $x=\frac{1}{3}$
27. $z=\frac{23}{17}$
28. $y=\frac{17}{21}$
29. $x=-\frac{13}{21}$
30. $z=\frac{1}{19}$
31. $x=-4$
32. $x=3$
33. $x=-2$
34. $x=-\frac{2}{3}$
35. $w=-1$
36. $z=\frac{7}{20}$
37. No tiene solución
38. Todos los reales
39. Todos los reales
40. No tiene solución

EJERCICIO 61

1. $x=3$
2. $x=\frac{21}{11}$
3. $x=-\frac{9}{2}$
4. $x=\frac{23}{8}$
5. $x=\frac{41}{32}$
6. $w=-\frac{3}{7}$
7. $y=-5$
8. $y=2$
9. $y=1$
10. $w=19$
11. $x=\frac{1}{5}$
12. $x=\frac{1}{2}$
13. $x=-\frac{7}{3}$
14. $x=-\frac{1}{9}$
15. $x=\frac{4}{3}$
16. $x=-1$
17. $x=\frac{20}{7}$
18. $x=0$
19. $x=\frac{2}{3}$
20. $x=-\frac{155}{8}$

EJERCICIO 62

1. $x=18$
2. $x=\frac{4}{5}$
3. $x=-\frac{9}{4}$
4. $x=-6$
5. $x=-\frac{9}{2}$
6. $x=\frac{5}{8}$
7. $x=-\frac{8}{5}$
8. $x=6$
9. $x=8$
10. $x=\frac{10}{3}$
11. $x=-8$
12. $x=\frac{27}{11}$
13. $x=\frac{25}{13}$
14. $x=\frac{1}{3}$
15. $z=\frac{6}{5}$
16. $x=\frac{46}{51}$
17. $z=-\frac{1}{23}$
18. $x=\frac{3}{7}$
19. $x=-\frac{5}{4}$
20. $x=-\frac{7}{11}$
21. $x=\frac{9}{11}$
22. $x=-\frac{14}{31}$
23. $x=-\frac{7}{12}$
24. $y=2$
25. $x=1$
26. $x=35$
27. $x=\frac{8}{5}$
28. $z=-\frac{28}{3}$
29. $x=\frac{1}{9}$
30. $x=-\frac{1}{2}$
31. $z=\frac{28}{3}$
32. $y=6$

EJERCICIO 63

1. $x=7, x=-9$
2. $y=-1, y=4$
3. $m=\frac{4}{3}, m=-4$
4. $x=3, x=-\frac{13}{5}$
5. $y=0, y=4$
6. $m=-3, m=-2$
7. $x=\frac{3}{2}, x=-\frac{5}{2}$
8. $m=1$
9. $x=-\frac{4}{7}, x=0$
10. $x=7, x=1$
11. $x=-\frac{5}{3}, x=-\frac{7}{3}$
12. $x=18, x=-2$
13. $x=-\frac{1}{5}, x=\frac{9}{7}$
14. $x=-4, x=5$
15. $x=-\frac{4}{5}, x=\frac{4}{11}$
16. $x=\frac{3}{2}$
17. $x=4, x=\frac{2}{3}$
18. $x=\frac{1}{4}, x=\frac{1}{2}$
19. $x=\frac{2}{5}, x=2$
20. $x=\frac{59}{8}, x=\frac{53}{8}$
21. $x=-9, x=3$

EJERCICIO 64

1. $x=a$
2. $y=\frac{a+1}{2}$
3. $x=b-a$
4. $y=\frac{b+1}{a+1}$
5. $x=\frac{mn}{n+m}$
6. $x=m+n$
7. $x=b-a$
8. $y=m$
9. $z=2m$
10. $z=0$

EJERCICIO 65

1. 103, 104, 105
2. 234 y 217
3. 90, 92, 94
4. 13, 15, 17
5. 68 y 32
6. 28 y 70
7. 18 y 12
8. 12 y 8
9. 80
10. 12
11. 7 y 3
12. 6 y 5
13. 8
14. 24 y 12
15. 30 y 10
16. 20, 15 y 10
17. 55 y 5
18. 15 y 8
19. 14 y 6
20. 32 y 24
21. 35
22. 64
23. 15
24. 45
25. 72
26. 38
27. 54
28. 24
29. 97
30. 96
31. 124
32. 264
33. 436

EJERCICIO 66

1. Andrés: 35 años, Carlos: 31 años, Rodolfo: 24 años
2. 24 años
3. Luz: 11 años, María: 14 años, Tania: 17 años
4. Dentro de 6 años
5. Carlos: 30 años, Mauricio: 10 años
6. Bárbara: 8 años, Patricia: 16 años
7. 7 años
8. Omar: 16 años, Alejandra: 36 años
9. 8 años
10. 20 años
11. Guillermo: 48 años, Patricia: 36 años
12. Joaquín: 10 años, Julián: 20 años, Camilo: 30 años
13. Antonio: 25 años, Ivan: 15 años
14. 18 años
15. Juan Carlos: 15 años, Daniel: 20 años

EJERCICIO 67

1. 48 litros
2. 40 litros
3. 40 gramos
4. 180 litros
5. 10 litros
6. 0.6 litros
7. 6 onzas
8. 10 litros
9. 25 ml al 4%, 50 ml al 1%
10. 50 ml al 5%, 50 ml al 2%
11. 10 litros al 30%, 20 litros al 3%
12. 60 onzas al 30%, 90 onzas al 80%
13. 1 000 litros al 56%, 1 400 litros al 80%
14. 92% y 62%

EJERCICIO 68

1. 180 monedas
2. 7 de $500, 5 de $1000, 4 de $200
3. 20 de $5, 10 de $10
4. 100 de 50¢, 300 de $1
5. 6 monedas
6. 8 de $200, 7 de $100, 6 de $50
7. 12 de $10, 36 de $5, 46 de $2
8. 30 monedas
9. 6 de $5, 12 de $2
10. 60 monedas
11. 8 billetes

EJERCICIO 69

1. $600
2. chamarra: $800
   pantalón: $400
   blusa: $120
3. $3600
4. 185000, 80000, 167000
5. $200
6. escritorio: $2500
   computadora: $12600
7. 10 problemas correctos
8. $5200
9. $360
10. 20 horas extras
11. 20 kg de $9.30
    10 kg de $12
12. 4 de adulto y 2 de niño
13. 8000 de $60 y 4000 de $80
14. 4 kg de $100
    8 kg de $70
    8 kg de $105

EJERCICIO 70

1. 1 hora 12 minutos
2. 2 horas 24 minutos
3. 16 horas
4. 2 horas 40 minutos
5. $1\frac{11}{13}$ horas
6. 3 horas
7. 4 horas
8. $25\frac{5}{7}$ minutos
9. $7\frac{11}{12}$ horas
10. 16 horas 30 minutos

EJERCICIO 71

1. 36 segundos
2. 25 segundos
3. 10 minutos
4. 12:18 pm
5. 108 metros
6. 16 segundos
7. 1.5 km
8. 14:34 pm
9. 8:37 am
10. 20:36 pm

EJERCICIO 72

1. 62°
2. 45°
3. ancho: 12 cm, largo: 36 cm
4. ancho: 24 metros, largo: 58 metros
5. ancho: 4 metros, largo: 36 metros
6. 6, 7 y 10 metros
7. 8 cm
8. 10 y 4 cm
9. radio: $\frac{15}{\pi}$, largo: 11.25 cm
10. 6 metros
11. ancho: 9 metros, largo: 18 metros
12. ancho: 6 metros, largo: 23 metros
13. radio: 15 metros
14. ancho: 3 unidades, largo: 8 unidades
15. base: 6 unidades, altura: 4 unidades
16. $h = \frac{64 - 3\pi}{8}$
17. 12 unidades
18. ancho: 60 cm, largo: 160 cm

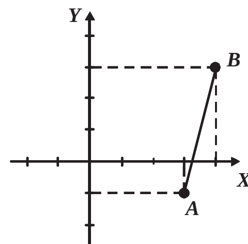
EJERCICIO 73

1. $n = \frac{Pv}{rt}$
2. $\ell = \frac{P - 2\omega}{2}$
3. $m = \frac{y - b}{x}$
4. $r = \frac{a - s}{\ell - s}$
5. $F = \frac{9}{5}C + 32$
6. $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$
7. $b = \frac{2A}{h} - B$
8. $x_2 = \frac{y_2 - y_1 + mx_1}{m}$
9. $h = x \pm \sqrt{r^2 - (y - k)^2}$
10. $F = \frac{B^2 + C^2 - 4A^2r^2}{4A}$
11. $d = \frac{u - a}{n - 1}$
12. $r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$
13. $P_0 = \frac{P}{e^{kt}}$
14. $V_0 = \sqrt{V_f^{\,2} - 2ad}$
15. $m = \frac{Fr^2}{GM}$
16. $i = \sqrt[t]{\frac{M}{C}} - 1$
17. $m_1 = \frac{m_2 - tg\,\alpha}{1 + m_2 tg\,\alpha}$
18. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(y - c)}}{2a}$
19. $p' = \frac{pf}{f - p}$
20. $t = \frac{-v \pm \sqrt{2da + v^2}}{a}$

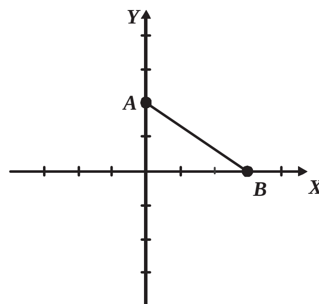
CAPÍTULO 18

EJERCICIO 74

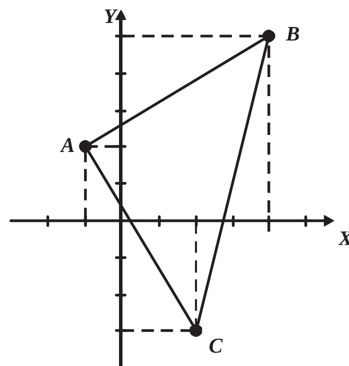
1.



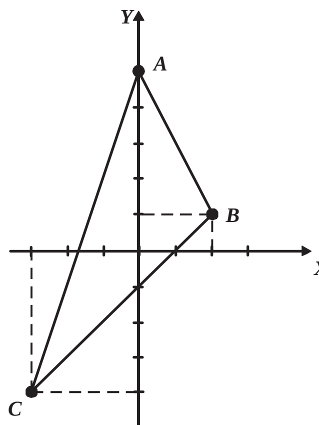
2.



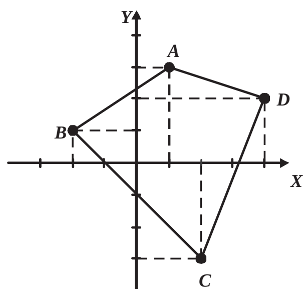
3.



4.



5.

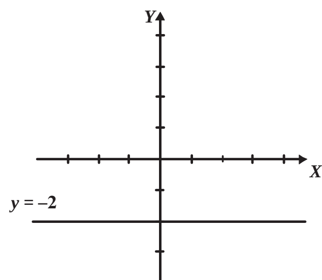


Ejercicio 75

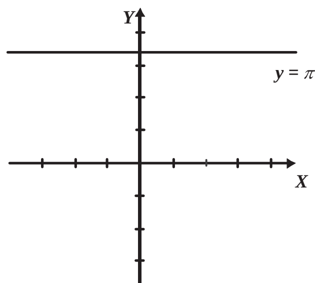
1. $m = 1$
2. $m = -12$
3. $m = \frac{8}{9}$
4. $m = -\frac{22}{27}$
5. $m = \frac{5}{14}$

Ejercicio 76

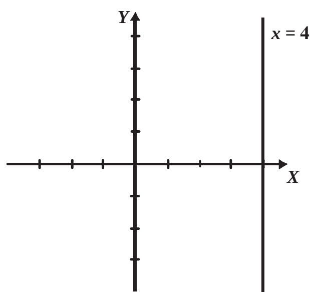
1.



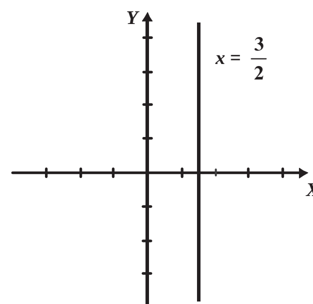
2.



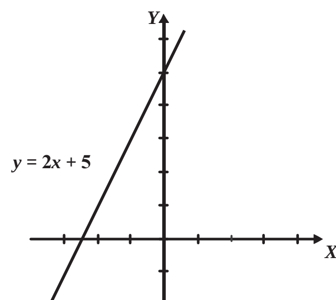
3.



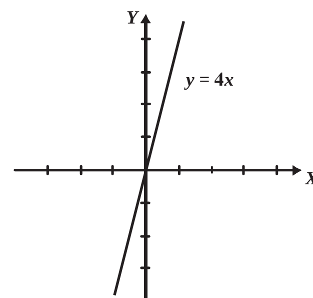
4.



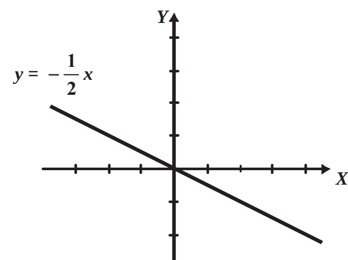
5.



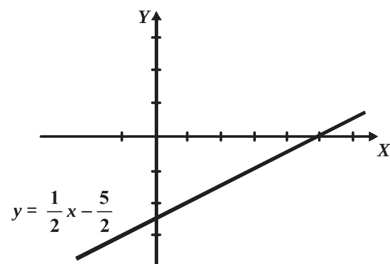
6.



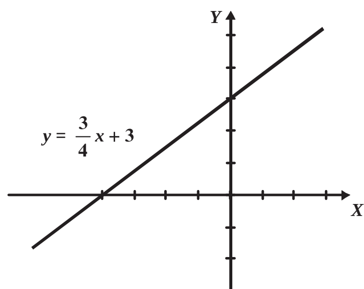
7.



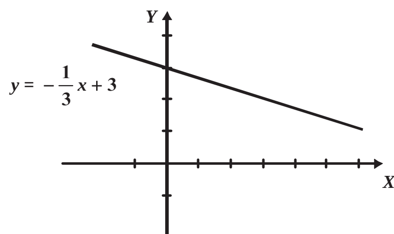
8.



9.

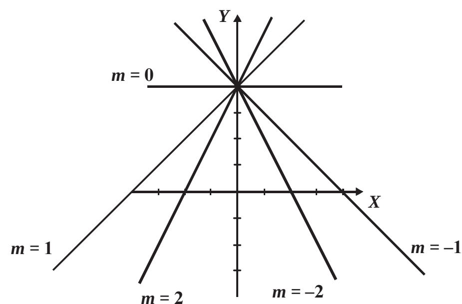


10.

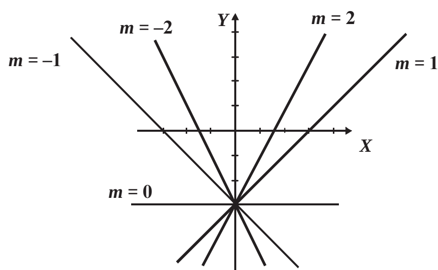


EJERCICIO 77

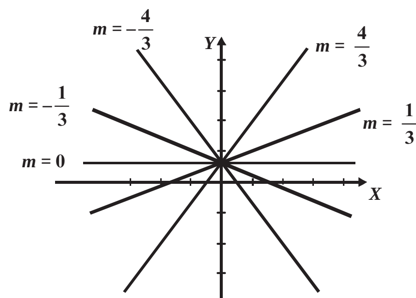
1.



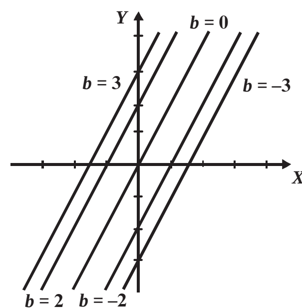
2.



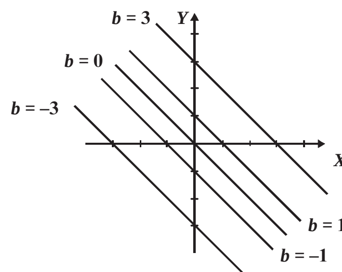
3.



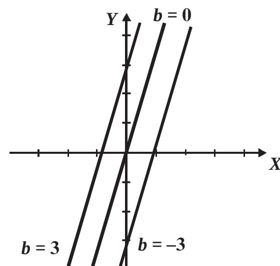
4.



5.



6.



EJERCICIO 78

1. $S = 40t$

2. a) $P = \frac{7}{3}t + 3.5$

   b) $P = 24.5$ kg

   c) $t = 10$ años 6 meses

3. $C = \frac{19}{30}T + \frac{1681}{3}$

4. a) $G = \frac{11}{20}I + 1\,800$

   b) $U = \frac{9}{20}I - 1\,800$

   c) $R = \$4\,000$

5. a) C = F = –40°

   b) C = 160° y F = 320°

CAPÍTULO 19

EJERCICIO 79

1. $(2,-3),(7,0)$ son solución

2. $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$ es solución

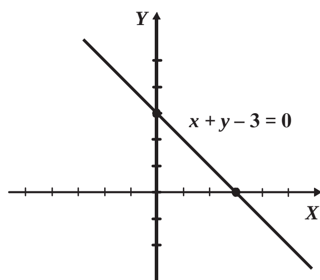
3. $(3,-4)$, $(-3,-12)$ son solución

4. $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right)$ es solución

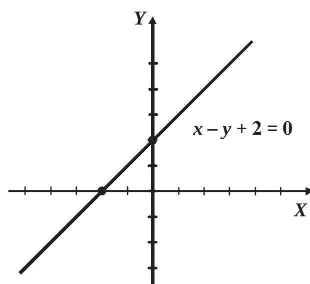
5. $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{10}\right)$ es solución

EJERCICIO 80

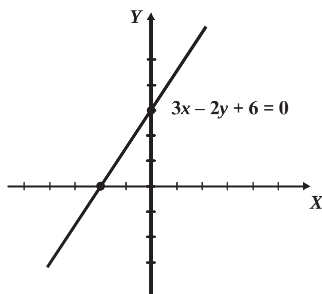
1.



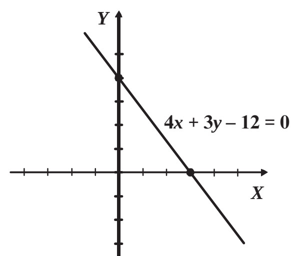
2.



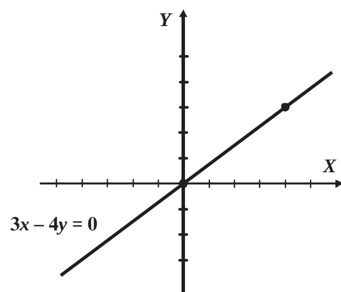
3.



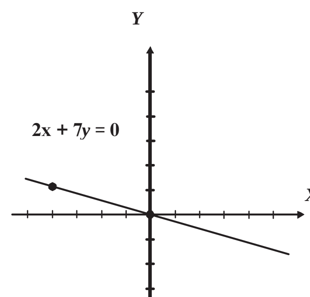
4.



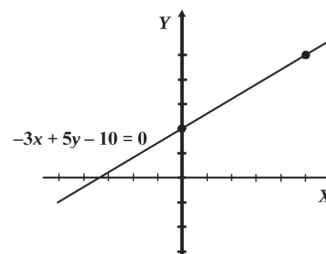
5.



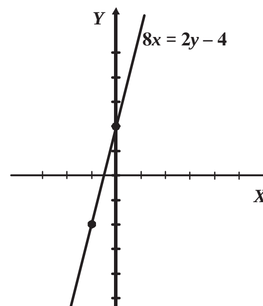
6.



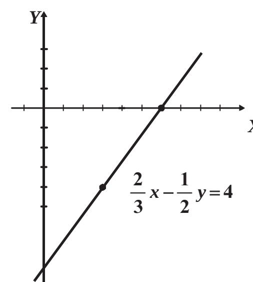
7.



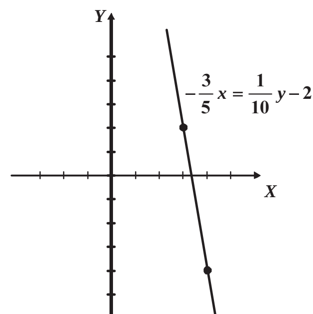
8.



9.

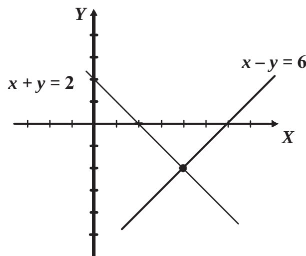


10.

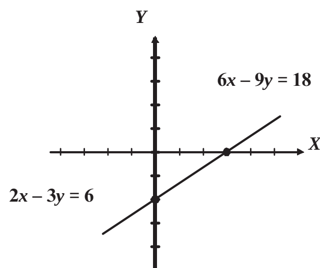


EJERCICIO 81

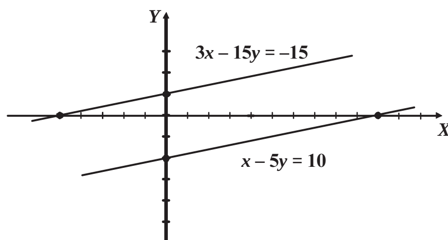
1. $(4, -2)$



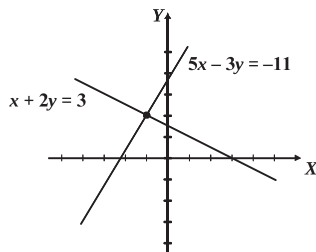
2. Conjunto infinito de soluciones (rectas coincidentes)



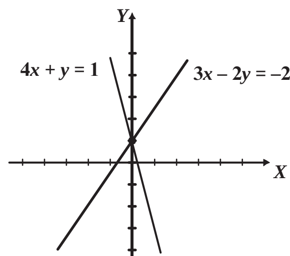
3. Conjunto vacío (rectas paralelas)



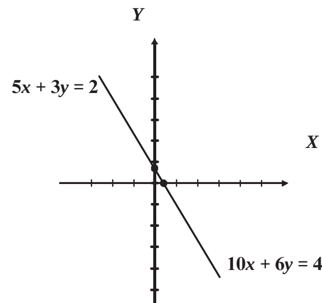
4. $(-1, 2)$



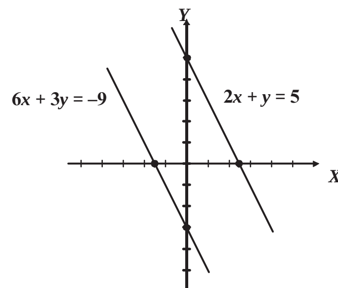
5. $(0, 1)$



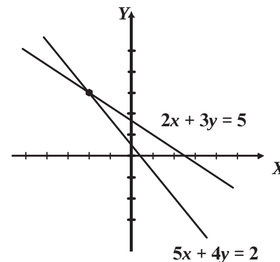
6. Conjunto infinito de soluciones (rectas coincidentes)



7. Conjunto vacío (rectas paralelas)



8. $(-2, 3)$



EJERCICIO 82

1. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} m = -1 \\ n = 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} u = \frac{2}{3} \\ v = \frac{1}{4} \end{cases}$

10. Conjunto infinito de soluciones

11. No hay solución

12. No hay solución

Ejercicio 83

1. $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} m=-3 \\ n=-4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} r=-1 \\ t=1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=3 \end{cases}$
5. $\begin{cases} p=\frac{3}{2} \\ q=\frac{4}{3} \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=8 \\ y=-2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} p=-4 \\ q=0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x=12 \\ y=9 \end{cases}$
9. Conjunto infinito de soluciones
10. No hay solución
11. Conjunto infinito de soluciones
12. No hay solución

Ejercicio 84

1. $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} m=\frac{3}{2} \\ n=\frac{1}{2} \end{cases}$
3. $\begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$
5. $\begin{cases} p=-1 \\ q=1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases}$
7. $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$
8. $\begin{cases} m=\frac{2}{3} \\ n=\frac{1}{5} \end{cases}$
9. $\begin{cases} u=\frac{5}{6} \\ v=-\frac{2}{3} \end{cases}$
10. Conjunto infinito de soluciones
11. No hay solución
12. No hay solución

Ejercicio 85

1. 23
2. 62
3. 0
4. 39
5. $\frac{9}{4}$
6. $\frac{73}{30}$
7. $2ab-a^2$
8. n^2-3mn
9. $-\frac{7}{9}$
10. $\frac{a+b}{a}$
11. $\frac{x-2}{x+5}$

Ejercicio 86

1. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} m=-2 \\ n=-3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=-7 \\ y=-1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} p=2 \\ q=3 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{7}{2} \end{cases}$
7. $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} m=\frac{9}{5} \\ n=-\frac{1}{3} \end{cases}$
9. Conjunto infinito de soluciones
10. No hay solución
11. No hay solución
12. Conjunto infinito de soluciones

Ejercicio 87

1. $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} m=-2 \\ n=-2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} m=3 \\ n=5 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$
7. $\begin{cases} x=-5 \\ y=4 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$
9. $\begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$
12. $\begin{cases} p=5 \\ q=-1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$
14. $\begin{cases} x=3 \\ y=-7 \end{cases}$
15. $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$
16. $\begin{cases} m=\frac{1}{3} \\ n=\frac{1}{2} \end{cases}$
17. $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$
18. $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$
19. $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$
20. $\begin{cases} x=\frac{1}{10} \\ y=\frac{1}{5} \end{cases}$
21. $\begin{cases} x=b \\ y=a \end{cases}$
22. $\begin{cases} x=a^2 \\ y=b^2 \end{cases}$
23. $\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases}$
24. $\begin{cases} x=\sqrt{a} \\ y=\sqrt{b} \end{cases}$

Ejercicio 88

1. $\begin{cases} 180 \\ 45 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 140° \\ 40° \end{cases}$
3. $\begin{cases} 80 \\ 50 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} \end{cases}$
5. {$80 por adulto; $50 por niño}
6. 5 monedas de $10
7. {Lados iguales = 19 cm; Base = 10 cm}
8. {Agenda = $750; Traductor = $550}
9. {Hermano = 15 años; Antonio = 5 años}
10. $\begin{cases} 73 \\ 65 \end{cases}$
11. {Carlos tenía $300; Gabriel tenía $200}
12. {Primera parte = 350; Segunda parte = 200}
13. $\begin{cases} 14 \\ 70 \end{cases}$
14. $\begin{cases} 7 \\ 45 \end{cases}$
15. {Alejandra tiene = $120; Beatriz tiene = $50}
16. Lancha: 10 km/h; Corriente: 1 km/h
17. {25 gallinas; 19 borregos}
18. {Gallinas = $30; Borregos = $300}
19. {Álgebra L. = $120; Geometría A. = $90}
20. {12.5 lt de la de 30%; 37.5 lt de la de 6%}
21. {Veracruz = 0.75 kg; Chiapas = 0.25 kg}

EJERCICIO 89

1. $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} d=6 \\ e=-2 \\ f=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \\ z=\frac{1}{3} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{5} \\ z=-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} m=-3 \\ n=-2 \\ r=-1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{3} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \\ z=4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} a=5 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} m=7 \\ n=3 \\ r=1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=-4 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=1 \end{cases}$

EJERCICIO 90

1. $\begin{cases} \text{Paleta} = \$2 \\ \text{Helado} = \$4 \\ \text{Dulce} = \$1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \text{Camisa} = \$300 \\ \text{Pantalón} = \$500 \\ \text{Playera} = \$400 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \text{Pares de calcetas} = \$50 \\ \text{Pantalón} = \$550 \\ \text{Playera} = \$120 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \text{Centenas} = 8 \\ \text{Decenas} = 6 \\ \text{Unidades} = 2 \\ \text{Número} = 862 \end{cases}$

EJERCICIO 91

1. $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}$
2. $\frac{7}{3x-7}+\frac{5}{2x-3}$
3. $\frac{1}{5x-4}-\frac{1}{5x+4}$
4. $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-5}$
5. $-\frac{3}{x-7}-\frac{1}{x-4}$
6. $\frac{8}{2x-1}-\frac{6}{2x+1}$
7. $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+2}$
8. $\frac{3}{2x+5}-\frac{2}{3x-1}$
9. $\frac{3}{4-x}-\frac{2}{x+3}$
10. $\frac{1}{2x+7}+\frac{5}{x-2}$
11. $\frac{1}{3x-2}-\frac{3}{(3x-2)^2}$
12. $\frac{2}{x}-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x-3}$
13. $\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}$
14. $\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-2}-\frac{3}{(x-2)^2}$
15. $\frac{5}{x}+\frac{4}{2x-1}+\frac{1}{x-3}$
16. $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x+2}$
17. $\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{3x-2}-\frac{5}{x}$
18. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x-2}$
19. $\frac{2}{x+1}-\frac{6}{2x+1}+\frac{3}{x-2}$
20. $\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^3}$
21. $\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}$
22. $\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-3}$

EJERCICIO 92

1. $\frac{3}{x}+\frac{x+1}{x^2-3}$
2. $\frac{1}{x+1}+\frac{x-2}{3x^2+1}$
3. $\frac{1}{x-2}+\frac{x-1}{x^2+1}$
4. $\frac{2}{x^2+5}-\frac{1}{x^2-7}$
5. $\frac{1}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+x+1}$
6. $\frac{x+1}{x^2+5}-\frac{7x}{x^2+3}$
7. $\frac{1}{x}-\frac{x+3}{x^2-2}+\frac{x+1}{x^2+3}$
8. $\frac{5}{x-3}+\frac{1}{x^2-2x-1}$
9. $\frac{x-3}{2x^2-7}+\frac{5x-1}{x^2+5}$
10. $\frac{x-2}{x^2+5x-3}-\frac{8}{x}$
11. $\frac{3x-1}{x^2+4x+5}-\frac{1}{2x-4}$

12. $\frac{1}{x}+\frac{x+1}{\left(x^2-3\right)^2}+\frac{1}{x^2-3}$

13. $\frac{x}{x^2+x-1}+\frac{2x+1}{\left(x^2+x-1\right)^2}$

14. $\frac{x-3}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{5}{x^2+1}$

15. $\frac{2}{x+1}+\frac{1}{\left(x^2-2\right)^2}-\frac{1}{x^2-2}$

16. $\frac{x+1}{x^2+3x+4}-\frac{1}{\left(x^2+3x+4\right)^2}+\frac{1}{x}$

17. $\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{1}{x^2+1}$

18. $\frac{1}{x^4}-\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}$

19. $\frac{1}{\left(x^2-2\right)^2}+\frac{3x+1}{x^2-2}-\frac{1}{x^2+1}$

20. $\frac{5x+17}{3\left(x^2-x+1\right)^2}+\frac{14-34x}{9\left(x^2-x+1\right)}+\frac{16}{9\left(x+1\right)}+\frac{4}{x-1}$

Capítulo 20

Ejercicio 93

1. $27x^6$
2. $16x^2y^2$
3. $\frac{16}{625}a^{16}$
4. $-216x^6y^9$
5. $-32a^{30}$
6. $\frac{49}{16}m^{-4}$
7. $\frac{32a^5}{b^5}$
8. $16a^4x^4$
9. $-15y^3$
10. xy^7
11. x
12. $-mn$
13. a^8
14. $\frac{9}{m^6}$
15. $\frac{3a^2}{b}$
16. $\frac{m^5}{n^3}$
17. $\frac{3}{17a^4b}$
18. $\frac{x^4}{y}$
19. $-\frac{1}{243}m^{10}$
20. $16x^4$
21. -9
22. 2
23. $\frac{5}{x^3}$
24. $-\frac{1}{36x^2}$
25. $\frac{a^3}{b^2}$
26. $\frac{1}{b^{12}}$
27. $\frac{1}{z^3}$
28. $(x+2y)^6$
29. $108a^9$
30. $\frac{y^9}{12x^4}$
31. $-\frac{2}{x^9}$
32. 1
33. a^2b^2
34. $72a^{13}$

Ejercicio 94

1. $x^9y^8z^6$
2. $\frac{y}{x^{\frac{3}{4}}}$
3. $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$
4. $\frac{1}{4z^4}$
5. $\frac{2x^2}{y^4}$
6. c
7. $6x^2y^5$
8. $16ab^2$
9. $\frac{y^{12}}{4x^{10}z^{14}}$
10. 1
11. $\left(x+3y\right)^{\frac{7}{6}}$
12. $\frac{y^{12}}{64x^3}$
13. $\frac{a^3b^2}{c}$
14. $\frac{y^6}{x^7}$
15. $\frac{y^2}{x^{10}z^5}$
16. $\frac{c^4}{a^2b^4}$
17. $\frac{9ab^{12}}{8}$
18. m^3n^7
19. $16y^{20}$
20. x^2+y^2
21. $(x-2y)^2$
22. $\frac{b^3-a^3}{a^3+b^3}$
23. $\frac{1}{y-x}$
24. $\frac{y}{y+1}$
25. $\frac{y^6-x^4}{x^4y^6}$
26. $x+y$
27. $\frac{x^2-xy+y^2}{xy}$

Ejercicio 95

1. $27-54x+36x^2-8x^3$
2. $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$
3. $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$
4. $1+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{4}+\frac{x^3}{8}$
5. $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$
6. $16-32x+24x^2-8x^3+x^4$
7. $x^{10}+5x^8y^2+10x^6y^4+10x^4y^6+5x^2y^8+y^{10}$
8. $\frac{x^5}{32}-\frac{5x^4}{16}+\frac{5x^3}{4}-\frac{5x^2}{2}+\frac{5x}{2}-1$
9. $\frac{1}{81}-\frac{2x}{27}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{16}$
10. $x^9+15x^6y^3+75x^3y^6+125y^9$
11. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}+\frac{1}{x^{10}}+\ldots$
12. $\frac{1}{8x^3}+\frac{3}{16x^4}+\frac{3}{16x^5}+\frac{5}{32x^6}+\frac{15}{128x^7}+\ldots$
13. $\frac{1}{x^4}+\frac{4}{x^5}+\frac{10}{x^6}+\frac{20}{x^7}+\frac{35}{x^8}+\ldots$
14. $\left(3x\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3\left(3x\right)^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{9\left(3x\right)^{\frac{5}{3}}}+\frac{5}{81\left(3x\right)^{\frac{8}{3}}}-\frac{10}{243\left(3x\right)^{\frac{11}{3}}}+\ldots$
15. $x^{\frac{4}{3}}+\frac{8x^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{8}{9x^{\frac{2}{3}}}-\frac{32}{81x^{\frac{5}{3}}}+\frac{80}{243x^{\frac{8}{3}}}+\ldots$
16. $\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}+\frac{3}{2x^{\frac{7}{4}}}+\frac{21}{8x^{\frac{11}{4}}}+\frac{77}{16x^{\frac{15}{4}}}+\frac{1\,155}{128x^{\frac{19}{4}}}+\ldots$

EJERCICIO 96

1. $127\,575x^5$
2. $\frac{35}{8}x^4$
3. $-439\,040x^3y^3$
4. $\frac{22}{729(8x)^{\frac{14}{3}}}$
5. $-253\,125\,000x^3$
6. $\frac{1792}{x^9}$
7. $\frac{1}{x^5}$
8. $\frac{729}{512x^{\frac{5}{2}}}$

EJERCICIO 97

1. $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$
2. $2\,187 - 10\,206y + 20\,412y^2 - 22\,680y^3 + 15\,120y^4 - 6\,048y^5 + 1344y^6 - 128y^7$
3. $x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x + 1$
4. $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$
5. $3\,125m^5 - 6\,250m^4n + 5\,000m^3n^2 - 2\,000m^2n^3 + 400mn^4 - 32n^5$
6. $a^8 + 16a^7b + 112a^6b^2 + 448a^5b^3 + 1\,120a^4b^4 + 1\,792a^3b^5 + 1\,792a^2b^6 + 1\,024ab^7 + 256b^8$
7. $x^{12} + 30x^{10}y + 375x^8y^2 + 2\,500x^6y^3 + 9\,375x^4y^4 + 18\,750x^2y^5 + 15\,625y^6$
8. $\frac{x^7}{128} + \frac{7x^5}{64} + \frac{21x^3}{32} + \frac{35x}{16} + \frac{35}{8x} + \frac{21}{4x^3} + \frac{7}{2x^5} + \frac{1}{x^7}$
9. $x^3 + 3x^2y - 6x^2 + 3xy^2 - 12xy + 12x + y^3 - 6y^2 + 12y - 8$
10. $\frac{x^{10}}{y^5} - \frac{5x^7}{y^2} + 10x^4y - 10xy^4 + \frac{5y^7}{x^2} - \frac{y^{10}}{x^5}$
11. $x^{12} - 12x^{11} + 66x^{10} - 220x^9 + 495x^8 - 792x^7 + 924x^6 - 792x^5 + 495x^4 - 220x^3 + 66x^2 - 12x + 1$
12. $\frac{32}{x^5} + \frac{40}{x^4} + \frac{20}{x^3} + \frac{5}{x^2} + \frac{5}{8x} + \frac{1}{32}$

CAPÍTULO 21

EJERCICIO 98

1. $m^{\frac{5}{2}}$
2. $x^{\frac{2}{7}}$
3. $y^{\frac{4}{3}}$
4. $a^{\frac{2}{5}}$
5. $b^{\frac{11}{2}}$
6. $(5x)^{\frac{1}{2}}$
7. $(2x)^{\frac{5}{6}}$
8. $(3y^2)^{\frac{3}{4}}$
9. $(2xy)^{\frac{9}{2}}$
10. $(x^2y)^{\frac{2}{9}}$
11. $(x^4y^4)^{\frac{1}{8}}$
12. $(x^6 + y^6)^{\frac{1}{3}}$
13. $(x^7 - y^7)^{\frac{1}{2}}$
14. $(x^2 + y^2)^{\frac{4}{3}}$
15. $(x + 2y)^{\frac{11}{5}}$
16. $a^{\frac{9}{5}} - b^{\frac{3}{7}}$
17. $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$
18. $m^{\frac{7}{4}}n^{\frac{3}{5}}$
19. $m^{\frac{1}{2}}(n + p)^{\frac{3}{2}}$
20. $a^{\frac{2}{3}}m^{\frac{13}{3}}n^{\frac{7}{4}}$

EJERCICIO 99

1. $\sqrt[3]{2}$
2. $\sqrt[7]{5^4}$
3. $\sqrt[3]{m^2}$
4. $\sqrt{(3y)^{11}}$
5. $\sqrt[4]{(2xy^2)^3}$
6. $\sqrt{x^3y}$
7. $7\sqrt[5]{y^2}$
8. $3\sqrt[5]{a^3}\sqrt[7]{b^8}$
9. $\frac{3}{4}\sqrt[5]{z^2}\sqrt[4]{y}$
10. $\sqrt[5]{m^2} - \sqrt[3]{n}$
11. $\sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b}$
12. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{y}$
13. $\sqrt[5]{(2x + y)^4}$
14. $\sqrt{m + n}$
15. $\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}$
16. $\sqrt[7]{(m^{-1} - n^{-2})^3}$

EJERCICIO 100

1. 27
2. 2
3. 3
4. 14
5. 4
6. $\frac{9}{4}$
7. 6
8. –8
9. –4
10. $2xy^2$
11. $3m^2n^3$
12. $2x^4$
13. $2x^3y^5$
14. $2m^3n$
15. $\frac{5}{y^{2n}}$
16. $5m^{2-x}n^{4y-3}$
17. $2(1 + x)$
18. $|x - y|$
19. $\frac{3x}{2}, -\frac{3x}{2}$
20. $\frac{|x + 2y|}{|xy|}$

EJERCICIO 101

1. $x\sqrt{x}$
2. $3xy^3\sqrt{3y}$
3. $8mnz^2\sqrt{m}$
4. $3mn^5\sqrt[3]{m^2}$
5. $xyz^2\sqrt[3]{x^2y}$
6. $5xy^2\sqrt[4]{x}$
7. $15a^2b\sqrt{2b}$
8. $15p^2q^3\sqrt{q}$
9. $6xy\sqrt[4]{3xz}$
10. $10bc\sqrt[4]{5a^3b^3}$
11. $6mn^2\sqrt[5]{3m^3n^2}$
12. $2x^2yz^3\sqrt[3]{xy^2}$
13. $-6m^3n^3\sqrt[4]{8mn^2}$
14. $a^2\sqrt{2a}$
15. $5a\sqrt[5]{ab^4}$
16. $\frac{4}{3}mn^3\sqrt[3]{20mp^2}$
17. $xy\sqrt[3]{y}$
18. $\frac{2}{x}\sqrt[4]{x}$
19. $\frac{3x}{y}\sqrt{x}$
20. $\frac{2ab^2}{m}\sqrt[3]{\frac{2a}{3m^2}}$
21. $\frac{xy}{2z^3}\sqrt[4]{x^3y}$
22. $\frac{2ab}{15d^2}\sqrt[3]{\frac{2a^2}{cd}}$
23. $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$
24. $\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{5}{x^2}}$
25. $3m\sqrt{m - 2n}$
26. $|4x^2 + 5y^3|\sqrt{x}$
27. $3ab\sqrt[3]{a^4 - 2ab}$
28. $|m - n|\sqrt{m - n}$
29. $3(x^2 - y^2)\sqrt[5]{(x^2 - y^2)^2}$
30. $\frac{1}{\sqrt[3]{(2 - m)^2}}; -\frac{1}{\sqrt[3]{(2 - m)^2}}$

EJERCICIO 102

1. $\sqrt{45}$
2. $\sqrt{175}$
3. $\sqrt[3]{128}$
4. $\sqrt{\frac{25}{8}}$
5. $\sqrt[5]{\frac{32}{81}}$
6. $\sqrt{x^3}$
7. $\sqrt[3]{8x^5}$
8. $\sqrt[4]{m^{13}n^5}$
9. $\sqrt[4]{x^5y^9}$
10. $\sqrt{50a^5b^6c^3}$
11. $\frac{1}{\sqrt[3]{4a}}$
12. $\sqrt[3]{\frac{4a^2}{5b^2}}$
13. $\sqrt[4]{\frac{27y^7}{128x^2}}$
14. $\sqrt{3ax^2}$
15. $\sqrt[3]{4x}$
16. $\sqrt{4a^3b+4a^2b^2+ab^3}$
17. $\sqrt{\frac{9}{a+b}}$
18. $\sqrt{\frac{x+1}{(x-1)^3}}$
19. $\sqrt[3]{\frac{x^2+2x+4}{x^2-4x+4}}$
20. $\sqrt{2a^3x}$

EJERCICIO 103

1. $5\sqrt{5}$
2. $-6\sqrt[3]{3}$
3. 0
4. $8\sqrt{7}-\sqrt{5}$
5. $-3\sqrt{3}-7\sqrt{2}$
6. $\frac{5}{4}\sqrt{10}+\frac{1}{2}\sqrt{13}$
7. $-\frac{5}{8}\sqrt{6}$
8. $-4\sqrt[3]{m}$
9. $3\sqrt{x}$
10. $\frac{5}{3}\sqrt[4]{xy}$
11. $4\sqrt{7}$
12. $27\sqrt{2}$
13. $-17\sqrt{3}$
14. $8\sqrt{5}+7\sqrt{2}$
15. $-2\sqrt{3}$
16. $\sqrt{2}-10\sqrt{5}$
17. $47\sqrt{5}-50\sqrt{11}$
18. $-2\sqrt{2}+\frac{4}{5}\sqrt{5}$
19. $9\sqrt{7a^2}$
20. $8a\sqrt{b}$
21. $11x\sqrt[3]{3x}$
22. $-14x^2\sqrt[4]{2}$
23. $3ay\sqrt{x}$
24. $\frac{11}{6}ab\sqrt{2b}+\frac{13}{4}ab\sqrt{3b}$
25. $\frac{17}{12}a^2b\sqrt{c}$
26. $-\frac{23}{24}a^2b\sqrt[4]{2ab}$
27. $10x\sqrt{y}-7x^2\sqrt{2y}$
28. $-xy^2\sqrt{xy}-x^2y\sqrt{3x}$
29. $x\sqrt{2y}+4y\sqrt{3x}$
30. $-2ab\sqrt{2c}+16ac\sqrt{3b}$
31. $-2x\sqrt[3]{y^2}-3y\sqrt[3]{4x}$
32. $10ab\sqrt[4]{5a^2b^3}-6a^2b^3\sqrt[4]{3ab^2}$
33. $\frac{1}{3}a\sqrt{5a}-\frac{1}{3}b\sqrt{3ab}$
34. $\frac{19}{20}x\sqrt[3]{y}+\frac{5}{12}xy\sqrt[3]{xy^2}$
35. $-\frac{1}{9}a^3b\sqrt{\frac{2a}{b}}+\frac{2}{3}ab^3\sqrt{\frac{5a}{3}}$
36. $6\sqrt{a-2}$
37. $-x\sqrt{x+2}$
38. $10xy\sqrt{x-3y}$

EJERCICIO 104

1. $3\sqrt{2}$
2. $5\sqrt{6}$
3. $2\sqrt[3]{9}$
4. $27\sqrt{10}$
5. xy^2
6. $xy\sqrt[3]{xy^2}$
7. $\frac{2}{15}x^3$
8. $18a^2b\sqrt{2b}$
9. $2xy^3\sqrt{3xy}$
10. $a^4\sqrt{a}$
11. $2a^2\sqrt[4]{a}$
12. $-8ab^2\sqrt[3]{6b}$
13. $6a\sqrt{a}$
14. $8x\sqrt[4]{x^3}$
15. $-6a^3b^3\sqrt{2b}$
16. $\frac{3a}{5x}\sqrt{\frac{2a}{x}}$
17. $\frac{2x}{am^2}\sqrt{3}$
18. $6-4\sqrt{6}$
19. $5-\sqrt[3]{25}$
20. $\frac{8}{3}x^2\sqrt{2}-x$
21. $19-8\sqrt{3}$
22. 95
23. $2m-3n\sqrt{2m}-4n^2$
24. $x-y$
25. $|x+y|\sqrt{x-y}$
26. $\sqrt{x^2-y}$
27. $|1-x|$
28. $\sqrt[3]{3}(x-y)$
29. $|x+y|\sqrt{x-y}$
30. 1

EJERCICIO 105

1. $\sqrt[6]{18}$
2. $x\sqrt{x}$
3. $\sqrt[16]{x^{15}}$
4. $xy\sqrt[6]{108x^3y^2}$
5. $3x^2y\sqrt[4]{x^3}$
6. $a\sqrt[4]{4ab^3}$
7. $x\sqrt[6]{72x}$
8. $\sqrt[6]{2x^5y^5}$
9. $a\sqrt[12]{a}$
10. $x\sqrt[6]{x^5}$
11. $y\sqrt[6]{y}$
12. $\frac{1}{y}\sqrt[3]{2xy}$
13. $\frac{3}{2}\sqrt[9]{8mn^2}$
14. $\frac{3}{2}x^2\sqrt[10]{16xy^4}$
15. $\sqrt[12]{x^4y^3z^2}$

EJERCICIO 106

1. $n\sqrt{m}$
2. $xy^2\sqrt[6]{xy}$
3. $3a^3b^2c$
4. $4y\sqrt{x}$
5. $3x^2y\sqrt[3]{3y^2}$
6. $6ab$
7. $\frac{2a^3}{5b^4}$
8. $9m^2x^2$
9. $\frac{3n^6}{4m^2}$
10. $\frac{2}{3zw^2}$
11. $\frac{5z^2}{3}$
12. $\frac{2u^3v^2}{5}$
13. $\frac{4a^2}{3b^2}$
14. $\frac{3x^3}{2y^4}$
15. $\frac{2p^4}{3m^3n^2}$
16. $\frac{2n^2}{p^2}$
17. $\frac{3}{2x}\sqrt[18]{y^{13}}$
18. $\frac{5}{2}y^2z$
19. $-\frac{5n}{4m^2}\sqrt[3]{n^2}$
20. $\frac{y^4x^4}{2}$

EJERCICIO 107

1. $\frac{1}{\sqrt[6]{6}}$
2. $\sqrt[3]{\frac{4}{y}}$
3. $\sqrt[6]{\frac{2y^2}{3}}$
4. $8\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$
5. $\sqrt[15]{\frac{32a}{b}}$
6. $2\sqrt[6]{\frac{9}{8a}}$
7. $a\sqrt[9]{a}$
8. $a\sqrt[6]{108ab^4}$
9. $\frac{1}{\sqrt[6]{xy}}$
10. $\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$
11. $\sqrt[6]{\frac{4x}{y^4}}$
12. $\sqrt[n^2+n]{x}$
13. $\sqrt[n^2+n]{x+1}$
14. $\sqrt[6]{x-1}$
15. $\sqrt[12]{(a-b)^5}$

EJERCICIO 108

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
3. $\frac{\sqrt[3]{300}}{6}$
4. $3\sqrt[3]{x}$
5. $2x\sqrt{3xy}$
6. $\frac{1}{xy}\sqrt[4]{8x^3y^3}$
7. $\frac{3}{2}\sqrt[5]{16a^4}$
8. $\frac{1}{b}\sqrt[3]{3a^2b^2}$
9. $\frac{1}{4x^2}\sqrt{6xy}$
10. $\frac{2}{5ab}\sqrt[4]{25a^3b^2}$
11. $\frac{1}{11}\left(1+2\sqrt{3}\right)$
12. $\frac{2}{7}\left(3+\sqrt{2}\right)$
13. $\frac{5x+\sqrt{5x}}{1-5x}$
14. $\sqrt{3}-2$
15. $\frac{1}{10}\left(4-\sqrt{6}\right)$
16. $\sqrt{3a}+\sqrt{2b}$
17. $\left(1+x\right)\left(1-\sqrt{x}\right)$
18. $\frac{2xy\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{x+y}$
19. $-\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)$
20. $\sqrt[3]{9a^2}-\sqrt[3]{3ab}+\sqrt[3]{b^2}$

EJERCICIO 109

1. $\frac{3}{\sqrt{3}}$
2. $\frac{10}{\sqrt{2}}$
3. $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$
4. $\frac{x}{\sqrt[6]{x^5}}$
5. $\frac{1}{2y\sqrt[3]{x^2y^2}}$
6. $\frac{1}{3\sqrt[4]{x^3}}$
7. $\frac{3}{2\sqrt{6x}}$
8. $\frac{1}{2\sqrt[3]{4x}}$
9. $\frac{2}{x\sqrt[5]{2x^2}}$
10. $\frac{x}{2y\sqrt{3x}}$
11. $\frac{7}{7-2\sqrt{7}}$
12. $\frac{1}{5+\sqrt{2}}$
13. $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$
14. $-\frac{1}{\left(x+3\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}$
15. $\frac{x-y}{x+3\sqrt{xy}+2y}$
16. $\frac{1}{2\left(\sqrt{5x}+\sqrt{6y}\right)}$
17. $\frac{x-5}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$
18. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9}$
19. $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}}$
20. $-\frac{1}{\left(y+2\right)\left(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}\right)}$

CAPÍTULO 22

EJERCICIO 110

1. $4i$
2. $6i$
3. $7i$
4. $11i$
5. $25i$
6. $2\sqrt{2}i$
7. $5\sqrt{2}i$
8. $3\sqrt{6}i$
9. $5\sqrt{5}i$
10. $9\sqrt{2}i$
11. $\frac{2}{7}\sqrt{3}i$
12. $\frac{5}{2}\sqrt{3}i$
13. $3+6i$
14. $2-4\sqrt{7}i$
15. $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{5}i$
16. $\frac{4}{5}-2\sqrt{2}i$

EJERCICIO 111

1. $9i$
2. $3+i$
3. $-9i$
4. $11i$
5. $6\sqrt{6}i$
6. 0
7. $-4\sqrt{2}i+3\sqrt{3}i$
8. $\frac{1}{2}\sqrt{3}i+\frac{5}{2}\sqrt{2}i$
9. $11-i$
10. 7
11. 0
12. 0
13. $5\sqrt[4]{i}$
14. $\frac{23}{12}x\sqrt{\sqrt{x}i}$

EJERCICIO 112

1. -1
2. $-i$
3. $-3i$
4. -1
5. i
6. i
7. $-i$
8. $3i-2$
9. $4i$
10. 1
11. $3i-2$
12. 0
13. -1
14. Si n es par: 0
    Si n es impar: $-i$
15. 0

EJERCICIO 113

1. -9
2. $-12\sqrt{3}i$
3. $-4\sqrt{3}i$
4. -2
5. $-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}i$
6. $-\frac{18}{5}$
7. -60
8. $-6-3\sqrt{6}$
9. $4i$
10. 3
11. $\frac{2}{5}$
12. $\sqrt{2}-4$
13. $\frac{9}{10}i$
14. $\frac{6}{5}$
15. 0
16. 0
17. $\frac{1}{4}$
18. $-i^n$
19. $2i$
20. $-i$

EJERCICIO 114

1. $\left(2,3\right)$
2. $-1+5i$
3. $\left(0,7\right)$
4. $\left(\frac{2}{3},-\frac{5}{4}\right)$
5. $\left(5,-2\right)$
6. $\frac{1}{2}-\frac{6}{7}i$
7. $-2i$
8. $\left(-\frac{1}{3},0\right)$
9. 3
10. $\left(5,-\frac{2}{11}\right)$
11. $\frac{5}{2}-8i$
12. $\left(1,-1\right)$

EJERCICIO 115

1. $(10, 1)$
2. $(1, 0)$
3. $(-2, -5)$
4. $(5, -6)$
5. $\left(\frac{31}{20},-\frac{1}{3}\right)$
6. $\left(0,1\right)$
7. $\left(\frac{4}{5},-\frac{1}{2}\right)$
8. $\left(\sqrt{2},-5\right)$
9. $\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$

10. $7 - i$
11. 6
12. 0
13. $-1 + 11i$
14. $3i$
15. $11 - \frac{7}{2}i$
16. $4 - 10i$
17. 1
18. $-\frac{1}{2} + \frac{19}{6}i$
19. $4 - 3i$
20. $16 - 4i$
21. $2 + 3i$
22. $4 + 5i$

Ejercicio 116

1. $-17 + 6i$
2. $5 + i$
3. $6 + 4i$
4. $1 - 3i$
5. $-3 + 4i$
6. $-1 + 2\sqrt{6}i$
7. $\frac{13}{6}i$
8. $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
9. $6 + 18i$
10. $-2 + 10i$
11. $-\frac{14}{3} + 4i$
12. i
13. $-8 - 6i$
14. $\frac{39}{400} - \frac{1}{5}i$
15. $32 - 126i$
16. 4
17. $-5 + 13i$
18. $-3 + 4i$
19. $(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$

$$= \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$$

20. $(1+i)^n \cdot (1-i)^n = (1-i^2)^n = (1+1)^n$

$$= \left[\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)\right]^n$$

21. $w^{2n} = (1+i)^{2n} = \left[(1+i)^2\right]^n = (2i)^n$ si n es par,

entonces $n = 2k$ con $k \in Z$, sustituyendo:

$$(2i)^n = (2i)^{2k} = (4i^2)^k = (-4)^k = (-1 \cdot 4)^k$$

$$= (-1)^k \cdot (4)^k$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}}(2)^{2k}$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}}(2,0)^n$$

22. $w^{2n} = (1+i)^{2n} = \left[(1+i)^2\right]^n = (2i)^n = (0,2)^n$

Ejercicio 117

1. $\frac{i-2}{5}$
2. $\frac{5-12i}{13}$
3. $-3 - i$
4. $\frac{-1-2\sqrt{6}i}{5}$
5. $\frac{-4-\sqrt{2}i}{2}$
6. $1 + i$
7. $\frac{3+i}{2}$
8. $\frac{-1+8i}{5}$
9. $\frac{-2+3i}{2}$
10. $\frac{-13-9i}{5}$
11. $\frac{-2+11i}{25}$
12. $\frac{-129-107i}{10}$
13. $\frac{4\sqrt{2}-4i}{3}$
14. $-i$

Ejercicio 118

Ejercicio 119

1. $\sqrt{13}$
2. $\sqrt{41}$
3. $\sqrt{41}$
4. 3
5. $\sqrt{5}$
6. $\sqrt{85}$
7. $\frac{3}{2}$
8. $\sqrt{5}$
9. $\sqrt{2}$
10. $\sqrt{\frac{79}{3}}$
11. $\frac{2}{3}\sqrt{13}$
12. $\sqrt{11}$
13. $5 - 4i$
14. -5
15. $1 - i$
16. $-5i$
17. $-\frac{1}{2}i$
18. $(2, -1)$
19. $(0, 3)$
20. $-\frac{3}{7} + \frac{2}{5}i$
21. $-2 - 6i$
22. $(-1, 1)$
23. $-2 - \frac{11}{4}i$
24. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$

25 a 30. No se incluye la solución

31. $3 + 2i$
32. $2 - 4i$
33. $1 + 8i$
34. $2 - 9i$
35. 4
36. 11
37. $-4 + 6i$
38. $7 - 6i$
39. $1 + \frac{2}{3}i$
40. $\frac{5}{6}i$
41. $\frac{17-7i}{13}$
42. $\frac{2+i}{5}$
43. 1
44. $\frac{5}{12}$
45. $\frac{i}{4}$

Capítulo 23

Ejercicio 120

1. $x_1 = -4, x_2 = -1$
2. $x_1 = -9, x_2 = 3$
3. $x_1 = -6, x_2 = -5$
4. $y_1 = 3 + i, y_2 = 3 - i$
5. $w_1 = -5, w_2 = 8$
6. $z_1 = 15, z_2 = -2$
7. $x_1 = 6, x_2 = 4$
8. $x_1 = -20, x_2 = 12$
9. $x_1 = -1 + 2i, x_2 = -1 - 2i$
10. $x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}$

11. $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=-2$

12. $w_1=\frac{3}{2}, w_2=-\frac{1}{5}$

13. $x_1=3, x_2=-\frac{2}{3}$

14. $x_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i, x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i$

15. $x_1=-b, x_2=-\frac{1}{4}b$

16. $w_1=-\frac{3}{7}a,\ w_2=5a$

17. $x_1=-5b, x_2=2b$

18. $x_1=-\frac{5}{b}, x_2=\frac{6}{b}$

19. $y_1=-\frac{2b}{a}, y_2=-\frac{b}{a}$

20. $y_1=\frac{10}{7}a, y_2=\frac{a}{2}$

EJERCICIO 121

1. $x_1 = 3,\ x_2 = 5$
2. $x_1 = 3,\ x_2 = -2$
3. $x_1 = -4,\ x_2 = -2$
4. $x_1 = 5,\ x_2 = -3$
5. $x_1 = \frac{5}{2},\ x_2 = \frac{5}{2}$
6. $x_1 = -\frac{5}{2},\ x_2 = \frac{1}{3}$
7. $y_1 = -\frac{3}{5},\ y_2 = 1$
8. $x_1 = 3-\sqrt{7},\ x_2 = 3+\sqrt{7}$
9. $x_1 = -1-\sqrt{6},\ x_2 = -1+\sqrt{6}$
10. $x_1 = 2-i,\ x_2 = 2+i$
11. $x_1 = -\frac{1}{2}-2i,\ x_2 = -\frac{1}{2}+2i$
12. $x_1 = \frac{1}{3}+\frac{3}{2}i,\ x_2 = \frac{1}{3}-\frac{3}{2}i$
13. $w_1 = 0,\ w_2 = 5$
14. $z_1 = 0,\ z_2 = -\frac{5}{2}$
15. $y_1 = 0,\ y_2 = \frac{a}{3}$
16. $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{b}{a}$
17. $x_1 = -5,\ x_2 = 5$
18. $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2}$
19. $x_1 = -\frac{b}{a}i,\ x_2 = \frac{b}{a}i$
20. $w_1 = -\frac{4}{a},\ w_2 = \frac{4}{a}$

EJERCICIO 122

1. Reales y diferentes
2. Complejas
3. Complejas
4. Reales e iguales
5. Reales y diferentes
6. Complejas
7. Reales y diferentes
8. Complejas
9. Reales y diferentes
10. Reales e iguales
11. Complejas
12. Reales e iguales

EJERCICIO 123

1. $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=-3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y_1=-4 \\ y_2=5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1=-9 \\ x_2=10 \end{cases}$
5. $\begin{cases} w_1=1 \\ w_2=4 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y_1=\frac{5}{3} \\ y_2=2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-\frac{2}{3} \end{cases}$
8. $\begin{cases} y_1=-4 \\ y_2=\frac{1}{2} \end{cases}$
9. $\begin{cases} x_1=-\frac{2}{3} \\ x_2=3 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x_1=-\frac{1}{7} \\ x_2=\frac{5}{2} \end{cases}$
11. $\begin{cases} x_1=-\frac{2}{5} \\ x_2=\frac{1}{4} \end{cases}$
12. $\begin{cases} z_1=\frac{7}{5} \\ z_2=2 \end{cases}$
13. $\begin{cases} w_1=-\frac{1}{2} \\ w_2=\frac{6}{5} \end{cases}$
14. $\begin{cases} x_1=-\frac{3}{2} \\ x_2=\frac{2}{7} \end{cases}$
15. $\begin{cases} x_1=-5 \\ x_2=\frac{3}{2} \end{cases}$
16. $\begin{cases} x_1=-\frac{5}{2}b \\ x_2=\frac{2}{3}b \end{cases}$
17. $\begin{cases} x_1=\frac{ab}{2} \\ x_2=2ab \end{cases}$
18. $\begin{cases} x_1=-\frac{1}{a} \\ x_2=\frac{3}{a} \end{cases}$
19. $\begin{cases} x_1=-\frac{3b}{a} \\ x_2=\frac{2b}{a} \end{cases}$
20. $\begin{cases} z_1=2\sqrt{3} \\ z_2=-\sqrt{3} \end{cases}$
21. $\begin{cases} x_1=-3\sqrt{3} \\ x_2=5\sqrt{3} \end{cases}$
22. $\begin{cases} x_1=2\sqrt{7} \\ x_2=5\sqrt{7} \end{cases}$
23. $\begin{cases} y_1=-\frac{1}{2} \\ y_2=-\frac{1}{15} \end{cases}$
24. $\begin{cases} x_1=\frac{2}{3} \\ x_2=-\frac{1}{4} \end{cases}$
25. $\begin{cases} w_1=-\frac{1}{3} \\ w_2=\frac{2}{5} \end{cases}$

EJERCICIO 124

1. $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\frac{2}{3} \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\frac{5}{7} \end{cases}$
7. $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\frac{1}{2} \end{cases}$
8. $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-4 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-8 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$

EJERCICIO 125

1. $\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} w_1=-10 \\ w_2=10 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=8 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y_1=-\sqrt{3} \\ y_2=\sqrt{3} \end{cases}$
6. $\begin{cases} x_1=-\frac{a}{4} \\ x_2=\frac{a}{4} \end{cases}$
7. $\begin{cases} z_1=-\frac{6}{5} \\ z_2=\frac{6}{5} \end{cases}$
8. $\begin{cases} y_1=-6 \\ y_2=6 \end{cases}$
9. $\begin{cases} w_1=-\sqrt{7} \\ w_2=\sqrt{7} \end{cases}$
10. $\begin{cases} x_1=-\sqrt{3} \\ x_2=\sqrt{3} \end{cases}$
11. $\begin{cases} x_1=-\frac{2}{3} \\ x_2=\frac{2}{3} \end{cases}$
12. $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} y_1=-4i \\ y_2=4i \end{cases}$
14. $\begin{cases} w_1=-5i \\ w_2=5i \end{cases}$
15. $\begin{cases} x_1=-i \\ x_2=i \end{cases}$

EJERCICIO 126

1. 27 y 15
2. 30 y 12
3. 3, 5 y 7
4. 12, 14 y 16
5. $\frac{1}{5}$ y 5
6. 5 y 20
7. $\begin{cases} \text{largo} = 200 \text{ m} \\ \text{base} = 125 \text{ m} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{largo} = 250 \text{ m} \\ \text{base} = 100 \text{ m} \end{cases}$
8. $\begin{cases} \text{altura} = 10 \text{ m} \\ \text{base} = 30 \text{ m} \end{cases}$
9. 3, 4 y 5
10. 96 m^3
11. $\begin{cases} \text{altura} = 18 \text{ m} \\ \text{base} = 54 \text{ m} \end{cases}$
12. $\begin{cases} \text{Alejandro} = 8 \text{ años} \\ \text{Alfredo} = 4 \text{ años} \end{cases}$
13. 7
14. $\begin{cases} \text{árboles} = 15 \\ \text{filas} = 13 \end{cases}$
15. $r = 4$ cm
16. $\begin{cases} \text{largo} = 17 \text{ cm} \\ \text{ancho} = 16 \text{ cm} \end{cases}$
17. 39 años
18. 5 segundos
19. 7.5 segundos
20. $\begin{cases} \text{primera llave} = 8 \text{ h} \\ \text{segunda llave} = 24 \text{ h} \end{cases}$
21. \$20
22. 8, 6 y 10 unidades

EJERCICIO 127

1. $V(2,-2)$ $x_1 = 1, x_2 = 3$
2. $V\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{2}\right)$ $x_1 = -2,\ x_2 = 3$
3. $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{81}{4}\right)$ $x_1 = -4,\ x_2 = 5$
4. $V(-2,-7)$ $x_1 = -\sqrt{7} - 2, x_2 = \sqrt{7} - 2$
5. $V(-1,4)$ $x_1 = -1 + 2i, x_2 = -1 - 2i$
6. $V(1,0)$ $x_1 = 1, x_2 = 1$
7. $V(2,9)$ $x_1 = 2 + 3i, x_2 = 2 - 3i$
8. $V(5,0)$ $x_1 = 5, x_2 = 5$
9. $V(0,-9)$ $x_1 = 3i, x_2 = -3i$
10. $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ $x_1 = 0, x_2 = 3$

EJERCICIO 128

1. 50 y 50
2. –10 y 10
3. 20 y 20
4. 55 y 55
5. 72 pies
6. 19 cm y 19 cm
7. 500 ejemplares
8. 20 pelotas
9. 35 cajas
10. $\begin{cases} 56.5 \text{ cm} \\ 43.5 \text{ cm} \end{cases}$

EJERCICIO 129

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{9}{4} \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 \cdot x_2 = -25 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -12 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$
9. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{14}{9} \end{cases}$
10. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -7a \\ x_1 \cdot x_2 = 12a^2 \end{cases}$

EJERCICIO 130

1. $x^2 - 9 = 0$
2. $x^2 + 7x = 0$
3. $x^2 + 16 = 0$
4. $x^2 - 5x + 4 = 0$
5. $x^2 + 8x + 15 = 0$
6. $x^2 + 4x + 29 = 0$
7. $2x^2 - 5x + 2 = 0$
8. $20x^2 + 19x + 3 = 0$
9. $x^2 + 2bx - 3b^2 = 0$
10. $x^2 - 7ax + 10a^2 = 0$

EJERCICIO 131

1. $x = 49$
2. $x = -8$
3. $x = \frac{13}{2}$
4. $x = 5$
5. $x = 5$
6. $x = 2$
7. $x = 3$
8. $x = 7$
9. $x = -1$
10. $x = 1$
11. $x = 4$
12. $x = 1$
13. $x = \frac{1}{256}$
14. $x = 1$
15. $x = 3$
16. $x = -2, -7$
17. $x = -1, 1$
18. $x = 9$

EJERCICIO 132

1. (0, 0), (4, 4)
2. (0, 3), (3, 0)
3. (3, –3), (–3, 3)
4. (2, 4), (–2, –4)
5. (–3, –5), (5, 3)
6. (3, 2), (–3, –1)
7. (4, 3), (4, –3), (–4, 3), (–4, –3)
8. $\left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$
9. $\left(2, 4\sqrt{2}\right), \left(2, -4\sqrt{2}\right), \left(-2, 4\sqrt{2}\right), \left(-2, -4\sqrt{2}\right)$
10. (7, –7), (–7, 7), $\left(2\sqrt{7}, \sqrt{7}\right), \left(-2\sqrt{7}, -\sqrt{7}\right)$
11. (4, 2), (–4, –2), (5, 1), (–5, –1)
12. $(5,1), (-5, -1), \left(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right)$
13. (1, 1),(–1, –1), (–2, 0), (2, 0)
14. (3, 2), (–3, –2), $(4i, i)$, $(-4i, -i)$
15. $\left(\frac{\sqrt{30}}{5}, \frac{2\sqrt{30}}{5}\right), \left(-\frac{\sqrt{30}}{5}, -\frac{2\sqrt{30}}{5}\right), (2, -3), (-2, 3)$
16. (3, 6), (–3, –6)
17. $(2,1), (-2,-1), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$
18. (–2, 1), (2, –1)
19. $(1.\ 0)(-1, 0), \left(\frac{5\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}\right), \left(-\frac{5\sqrt{17}}{17}, -\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$
20. (–1, –4), (2, –7), (1, 4), (–2, 7)

CAPÍTULO 24

EJERCICIO 133

1. $(3, \infty)$
2. $(-\infty, 3)$
3. $(-\infty, -4)$
4. $(-\infty, -1]$
5. $(-\infty, -7)$
6. $\left[-\frac{8}{7}, \infty\right)$
7. $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
8. $(-\infty, 2)$
9. $(-\infty, 10]$
10. $(-\infty, 5]$
11. $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$
12. $\left(-\infty, \frac{8}{53}\right]$
13. $\left(\frac{4}{5}, \infty\right)$
14. $\left(-\infty, -\frac{1}{23}\right)$
15. $(2, \infty)$
16. $(6, \infty)$
17. $[-21, \infty)$
18. $[6, \infty)$
19. $(-\infty, -6]$
20. $\left[-\frac{19}{28}, \infty\right)$
21. $\left(\frac{18}{5}, \infty\right)$
22. $(-\infty, 13]$
23. $(-2, 3)$
24. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$
25. $[-3, -1]$
26. $[-9, -1)$
27. $(-3, 3)$
28. $[-23, -10)$
29. $(-2, 4)$
30. $[-4, 1)$
31. $(-1000, 100)$
32. $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$
33. $[-16, 8)$
34. $\left(-\frac{21}{2}, \frac{11}{2}\right)$
35. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2}\right]$
36. $\left[-\frac{10}{3}, \frac{32}{3}\right]$
37. $(-14, -2)$
38. $[-2, 4]$
39. $\left[\frac{9}{2}, \frac{19}{2}\right]$
40. $\left(\frac{14}{9}, \frac{8}{3}\right)$

EJERCICIO 134

1. $(-3, 3)$
2. $[-4, 4]$
3. $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$
4. $(-\infty, -6) \cup (6, \infty)$
5. $\left[0, \frac{1}{3}\right]$
6. $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$
7. $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
8. $(-\infty, -4) \cup (5, \infty)$
9. $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$
10. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$
11. $(-\infty, -4) \cup (-1, \infty)$
12. $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$
13. $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$
14. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [3, \infty)$

EJERCICIO 135

1. $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$
2. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$
3. $\left(2, \frac{5}{2}\right)$
4. $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
5. $(-\infty, 3)$
6. $[-3, 2)$
7. $(-\infty, -1] \cup (3, \infty)$
8. $(-1, 3) \cup (11, \infty)$
9. $\left[-9, -\frac{1}{3}\right) \cup (4, \infty)$
10. $(-\infty, -2) \cup (2, 4]$
11. $(-4, -2) \cup (1, \infty)$
12. $(-\infty, -2) \cup \left[\frac{3}{2}, 4\right)$
13. $(-\infty, -6) \cup (1, 4]$

EJERCICIO 136

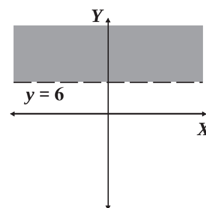
1. $[-2, -1] \cup [2, 4]$
2. $[2, \infty) \cup \{-2\}$
3. $(-\infty, -2) \cup (-1, 1)$
4. $(-\infty, -4)$
5. $(-3, 0) \cup (3, \infty)$
6. $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$

EJERCICIO 137

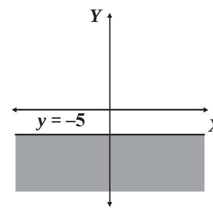
1. $(-\infty, -7] \cup [7, \infty)$
2. $(-7, 7)$
3. $(-\infty, 1) \cup (9, \infty)$
4. $\left[-\frac{9}{5}, 3\right]$
5. $(-\infty, 3) \cup (5, \infty)$
6. ϕ
7. $[-9, 10]$
8. $(-\infty, -4) \cup (20, \infty)$
9. $[2, 18]$
10. $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right]$
11. $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$
12. $(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$
13. ϕ
14. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$
15. $\left(-\frac{4}{3}, 0\right) \cup (0, 4)$
16. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$
17. $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

EJERCICIO 138

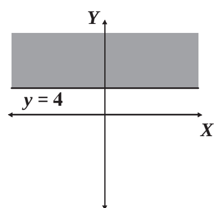
1.



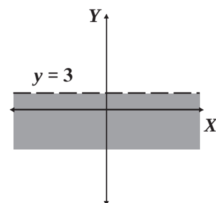
2.



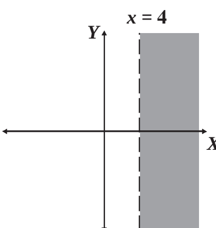
3.



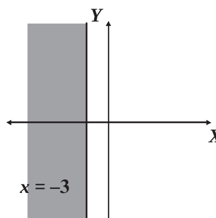
4.



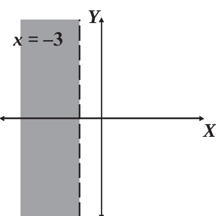
5.



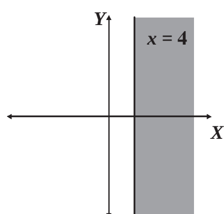
6.



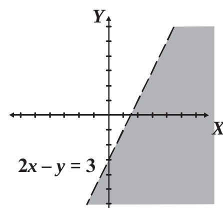
7.



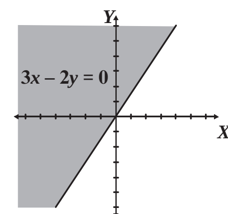
8.



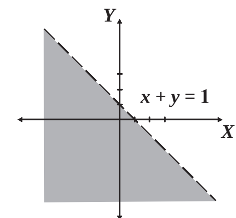
9.



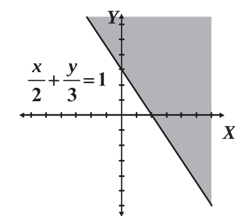
10.



11.

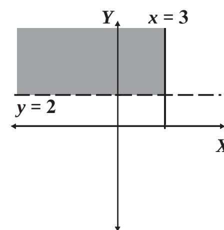


12.

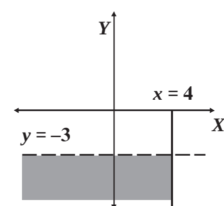


Ejercicio 139

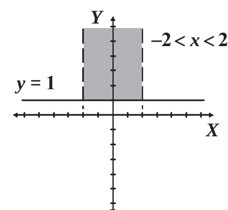
1.



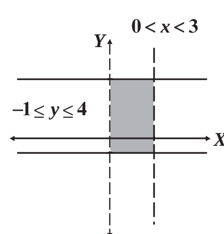
2.



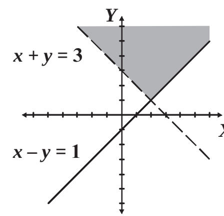
3.



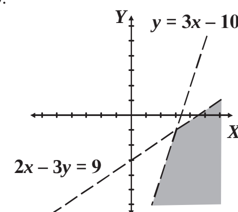
4.



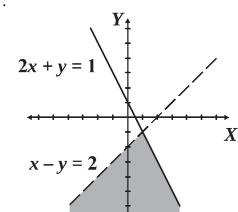
5.



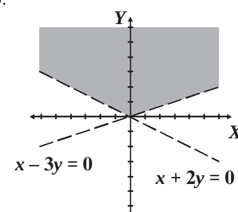
6.



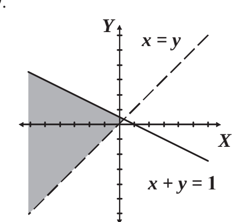
7.



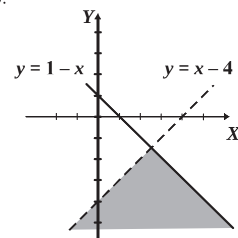
8.



9.



10.



CAPÍTULO 25

EJERCICIO 140

1. $8 = 2^3$
2. $16 = x^4$
3. $81 = 3^4$
4. $\frac{1}{36} = 6^{-2}$
5. $9 = \left(\sqrt{3}\right)^4$
6. $343 = 7^x$
7. $\sqrt{6} = (a)^{\frac{1}{2}}$
8. $x - 1 = 3^2$
9. $625 = w^4$
10. $128 = (x - 1)^7$
11. $243 = (3x)^5$
12. $256 = (2x - 1)^8$
13. $\log_{17} a = 2$
14. $\log_5 625 = 4$
15. $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$
16. $\log_N \frac{1}{16} = 2$
17. $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{4}{9}\right) = 2$
18. $\log_2 (x + 3) = 4$
19. $\log_2 256 = x$
20. $\log_{(x-2)} 8 = 3$
21. $\log_x z = w$
22. $\log_3 \frac{1}{81} = -4$
23. $\log_5 125 = -3x$
24. $\log_{(3x+2)} 441 = 2$

EJERCICIO 141

1. $x = 5$
2. $x = 4$
3. $y = 3$
4. $b = \frac{1}{5}$
5. $x = 4$
6. $a = 343$
7. $x = 81$
8. $m = 8$
9. $y = \frac{1}{32}$
10. $N = 8$
11. $w = 3$
12. $x = \frac{4}{9}$
13. $b = 2$
14. $x = 2$
15. $x = 3$
16. $a = -\frac{2}{5}$
17. $x = -6$
18. $y = -\frac{1}{4}$
19. $x = -3$

EJERCICIO 142

1. $4 \log_a 7$
2. $-\frac{3}{2} \log_6 3$
3. $\frac{7}{3} + \frac{1}{3} \log_e x$
4. $\log 5 + \log x + 2 \log y$
5. $3 \log_3 x + 2 \log_3 y + \log_3 z$
6. $8 + 2 \ln 3 + 4 \ln x$
7. $3 \log (x + y) + \log (x - z)$
8. $\log_{\frac{1}{2}} 7 - 2 \log_{\frac{1}{2}} x$
9. $\ln x + 2 \ln y - 3 - 4 \ln z$
10. $\log_5 3 + 3 \log_5 x + 6 \log_5 (1 - 2x) - \log_5 2 - y \log_5 x - \log_5 (x^2 - y^2)$
11. $\frac{1}{2} \log_4 3 + \log_4 x + 2 \log_4 y$
12. $2 \log (x + y) + \frac{5}{2} \log z$
13. $\frac{1}{3} \log x - \frac{1}{2} \log y$
14. $\frac{3}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{2}{3} \log c - \frac{1}{3} \log d$
15. $\frac{1}{2} \log_2 (x + y) - 4 \log_2 (x - y)$
16. $2 \log x - \frac{1}{3} \log (x - 3) - 2 \log (x + z)$
17. $\frac{1}{2} \log (x + 3) + \frac{1}{2} \log (y - 5) - 2 \log (x + 6) - \frac{1}{4} \log (y - 2)$
18. $\frac{2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{2}{5} \ln (x + 1) + \frac{7}{30} \ln (x - 1)$
19. $\ln 25x^2$
20. $\log \frac{m^3}{n^2}$
21. $\log_7 \sqrt[6]{x^3 y^2}$
22. $\ln 8e^{4x}$
23. $\log n^4 \sqrt[5]{m^2}$
24. $\log_2 3 \cdot 4^x$
25. $\log_b \frac{1}{\sqrt[12]{(x+1)^8 (x+2)^3}}$
26. $\log \frac{3y}{x}$
27. $\log_2 \frac{x}{yz}$
28. $\log_4 \frac{4}{m^2 - 1}$
29. $\log \frac{x^{\frac{1}{8}} y^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{4}}}$
30. $\ln \frac{5ey}{x^7}$
31. $\ln \frac{e^{2-x} (x + y)^3}{(x - y)^3}$
32. $\log \frac{(x - 2)^{\frac{2}{3}} (x + 1)^2}{(x + 2)^{\frac{4}{5}}}$
33. $\log_2 \sqrt{\frac{2x^{14}}{y^3}}$
34. $\log \frac{(x + 1)^{\frac{1}{3}} (x - 1)^{\frac{1}{2}}}{10x^{\frac{1}{6}}}$
35. $\log \frac{10^{x^2+x+1} (x + 1)^3}{x^2}$
36. $\ln \left(\frac{9m^2 p}{7xy^3}\right)^2$

EJERCICIO 143

1. $x = 1$
2. $x = -20$
3. $x = 9,\ x = -\frac{27}{5}$
4. $x = 17$
5. $x = 6,\ x = -6$
6. $x = 13$
7. $x = 40$
8. $x = 25$
9. $x = 17,\ x = 7$
10. $x = \frac{9}{2}$
11. $x = 8,\ x = \frac{22}{9}$
12. $x = -1$
13. $x = 0,\ x = -35$
14. $x = 6$
15. $x = 3$
16. $x = 12,\ x = \frac{7}{11}$

17. $x = 5$
18. $x = 6$
19. $x = 7$
20. $x = 4$
21. $x = \frac{e+1}{e-1}$
22. $x = 4e$
23. $x = 4$
24. $x = \frac{2\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}-1}$
25. $x = \frac{e^e+3}{2-e^e}$
26. $x = \frac{1}{e}$

EJERCICIO 144

1. $x = 4$
2. $x = \frac{3\log 2}{\log 3}$
3. $x = 0$
4. $x = \frac{1}{2}$
5. $x = 1.20557$
6. $x = 2$
7. $x = 3$
8. $x = 2$
9. $x = -1$
10. $x = 3$
11. $x = \frac{2\log 2 + 3\log 5}{2\log 5}$
12. $x = -1.72683$
13. $x = -\frac{7}{3}$
14. $x = \frac{7}{3}$
15. $x = -4$
16. $x = \frac{2}{5}$
17. $x = \frac{5}{3}$
18. $x = \frac{5}{2}$
19. $x = -\frac{1}{2}$
20. $x = \sqrt{6}, x = -\sqrt{6}$
21. $x = 3, x = -1$
22. $x = 2$
23. $x = -\frac{3}{2}$
24. $x = -1, x = -2$
25. $x = -1$
26. $x = 2$
27. $x = \frac{\log 2}{2\log 2 - \log 3}$
28. $x = 0, x = 2$
29. $x = \frac{2\log 7 + \log 5}{2\log 7 - \log 5}$
30. $x = 0$
31. $y = \ln 11 - \ln 13$
32. $x = 2, x = 1$
33. $x = \ln \sqrt[3]{2}$
34. $x = 0$
35. $x = \ln\left(1 - \sqrt{e}\right)$
36. $x = \ln \sqrt{5}$

EJERCICIO 145

1. pH = 4.7212
2. pH = 3.2218
3. 1×10^{-9}
4. 4.3010
5. 0.9 segundos
6. 3 500 micrómetros
7. 59.46%
8. 6.4321 años
9. 1 38.62 años
10. 18 321 habitantes
11. 3.5 horas
12. 29.15 años
13. $T = 64.762$ °C
14. $T = 44.84$ °C
15. $t = 133.9$ min

CAPÍTULO 26

EJERCICIO 146

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$
2. 9.9, 9.99, 9.999, 9.9999, 9.99999
3. $2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \frac{26}{25}$
4. $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{8}{7}, 2$
5. $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{24}, \frac{3}{40}$
6. –1, 4, –9, 16, –25
7. 0, 0, 2, 6, 12
8. $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}$
9. 1, 2, 3, 4, 5
10. $1, -\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{8}{5}, \frac{5}{3}$
11. 2, 5, 11, 23, 47
12. $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$
13. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{10}{3}$
14. $27, -9, 3, -1, \frac{1}{3}$
15. –1, –1, –2, –6, –24
16. –2, 4, 16, 256, 65 536
17. $4, 2, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}$
18. 3, 1, –1, 1, –1

EJERCICIO 147

1. 48
2. 165
3. $\frac{617}{140}$
4. 126
5. $\sqrt{7} - 1$
6. 18
7. $-\frac{11}{2}$
8. 21
9. n^2
10. $\frac{n(n+1)}{2}$
11. $c = 3$
12. $c = 1$
13. $c = 3$
14. $c = 2, -\frac{20}{13}$

EJERCICIO 148

1. Sí es
2. No es
3. Sí es
4. No es
5. Sí es
6. Sí es
7. $a_8 = 23$
8. $a_{11} = \frac{7}{2}$
9. $a_{15} = \frac{103}{12}$
10. $a_{10} = 55$
11. $a_{16} = \frac{27}{4}$
12. $a_7 = 48$
13. $a_{12} = -5$
14. $a_{18} = 454$
15. $a_{13} = -27$
16. $a_{17} = \frac{11}{4}$
17. $a_1 = 7$
18. $r = -2$
19. $n = 9$
20. $r = -\frac{1}{4}$
21. $a_{11} = -28$
22. $a_1 = -15$
23. $n = 10$
24. $a_1 = 7$

25. $a_1 = -\frac{17}{6}$
26. $n = 10$
27. $r = \frac{1}{4}$
28. $a_5 = -\frac{15}{4}$
29. $a_7 = 8n - 5$
30. $a_4 = \frac{20n-7}{6}$

EJERCICIO 149

1. $S_8 = 176$
2. $S_9 = 9$
3. $S_8 = 31$
4. $S_9 = 648$
5. $S_{13} = -78$
6. $S_{12} = 450$
7. $S_{11} = 0$
8. $S = 40\,600$
9. $S = \frac{n(n+1)}{2}$
10. $S = n(n + 1)$
11. $S = n^2$
12. $n = 12$
13. $n = 10$
14. $a_1 = -9$
15. $a_1 = 2$, $a_n = 100$

EJERCICIO 150

1. 365 lugares
2. 518 ladrillos
3. $1 375
4. 9 rollos
5. 18 filas

EJERCICIO 151

1. $27\frac{1}{2}, 34, 40\frac{1}{2}, 47, 53\frac{1}{2}$
2. $6\frac{1}{2}, 8, 9\frac{1}{2}, 11, 12\frac{1}{2}, 14, 15\frac{1}{2}$
3. $1, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 2, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}$
4. $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}$
5. $-2.5, -2, -1.5, -1, -0.5, 0$
6. $\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{11}{6}$
7. Promedio = 8.24

EJERCICIO 152

1. 8 años
2. 9.8 de calificación
3. Promedio = 9
4. Promedio = $\frac{a_1 + a_n}{2}$
5. 7 hileras *y* constan de 80, 76, 72, 68, 64, 60, 56 tejas
6. 8 hileras de 58, 62, 66, 70, 74, 78, 82 y 86 tejas

EJERCICIO 153

1. Sí es
2. Sí es
3. No es
4. No es
5. No es
6. Sí es
7. $a_6 = -81$
8. $a_9 = \frac{128}{2187}$
9. $a_5 = -80$
10. $a_7 = \frac{5}{128}$
11. $a_{10} = -\frac{1}{2187}$
12. $a_8 = \frac{1}{16}$
13. $a_{12} = \frac{32}{243}$
14. $a_9 = m^{24}$
15. $a_{10} = n^{14}$
16. $a_7 = \frac{n^3}{n+1}$
17. $a_{13} = 2^{27x-16}$
18. $a_9 = a_1 r^{16}$
19. $a_1 = 2$
20. $a_2 = 4$
21. $r = \frac{1}{3}$
22. $r = \frac{3}{4}$
23. $n = 5$
24. $n = 8$
25. $n = 9$
26. $a_1 = \frac{1}{4}$
27. $a_4 = \frac{1}{m^4}$
28. $a_{11} = 2^{\frac{23}{6}x-9}$

EJERCICIO 154

1. $9, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -1$

   $9, 3, 1, -1$
2. 4 096 células
3. 3, 5, 7
4. 6 células
5. 30 388 bacterias
6. $a_t = 25\,000(1.05)^{3t}$
7. $339 814.7
8. 67 392 bebés
9. 2 cm^2

EJERCICIO 155

1. $S_6 = -\frac{364}{27}$
2. $S_7 = \frac{2\,059}{486}$
3. $S_9 = -855$
4. $S_{10} = \frac{989\,527}{2187}$
5. $S_{15} = \frac{32\,767}{8}$
6. $S_{18} = 524\,286$
7. $S_{12} = 1\,092 + 364\sqrt{3}$
8. $S_{10} = 31 - 31\sqrt{2}$
9. $S_{12} = \frac{n^{21} - n}{n - 1}$
10. $S_9 = 511 \cdot 2^{x-2}$
11. $S_n = \frac{a_1(r^{2n} - 1)}{r^2 - 1}$
12. $S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$
13. $n = 8$
14. $r = \frac{1}{2}$
15. $a_1 = 27$
16. $a_n = \frac{1}{64}$
17. $a_1 = -2$
18. $r = \frac{3}{2}$
19. $n = 7$

EJERCICIO 156

1. 5 461 triángulos
2. 127 personas
3. 65 761.7 ton.
4. 34 316.76 partos
5. 1.0198, 121.6 millones

EJERCICIO 157

1. $S = -4$
2. $S = \frac{9}{4}$
3. $S = 9$
4. $S = \frac{27}{4}$
5. $a_1 = \frac{23}{8}$
6. $r = \frac{3}{5}$
7. $r = \frac{1}{3}$
8. $S = \frac{4}{3}$ cm^2
9. $S = 2\,048$ cm^2

EJERCICIO 158

1. 1, 2, 4, 8, 16
2. $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}$
3. –6, –12, –24, –48
4. 6, 24, 96, 384, 1 536
5. $6, 6\sqrt{3}, 18$
6. $\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{32}{27}, \frac{128}{81}$
7. –64, –32, –16, –8, –4, –2
8. $\frac{(x-1)^3}{3}, \frac{(x-1)^4}{9}, \frac{(x-1)^5}{27}$
9. $a, 2, \frac{4}{a}$
10. $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$
11. $3\sqrt{6}$
12. $-4\sqrt{2}$
13. $5\sqrt{5}$
14. 12
15. $\sqrt[3]{36}$
16. $8\sqrt[3]{2}$
17. $3\sqrt{3}$
18. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

EJERCICIO 159

1. $25 937.4
2. $64 390.28
3. $49 783.2
4. $43 346.6
5. $13 324.4
6. $18 824.8
7. $1 292.2
8. $8 723.2
9. $8 682.5
10. $188 542
11. $17 483
12. $\begin{cases} \text{2.5\% trimestral} \\ \text{10\% anual} \end{cases}$
13. 14.86%
14. 7%
15. 11.1 años
16. 9 955 habitantes
17. 3 años
18. $655 446.5
19. 3%
20. $12 244.5

EJERCICIO 160

1. $55 700.19
2. $3 652.26
3. 25%
4. 8%
5. $156 738.56
6. 20%
7. 10 años de vida útil

CAPÍTULO 27

EJERCICIO 161

1. $a = 2, b = -1$
2. $x = -2, y = 4, z = 0$
3. $q = 2, r = 1, t = 1,$
4. $x = 7, y = 1, z = -2$

EJERCICIO 162

1. $A+B=\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, 2A-0B=\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A+B=\begin{bmatrix} -4 & 7 & 4 \end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix} 8 & -7 & -2 \end{bmatrix}, A-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix} 26 & -21 & -5 \end{bmatrix}, 2A-0B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. $A+B=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -1 & 6 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}, A-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix} 20 & -43 \\ -2 & 18 \\ 5 & -33 \end{bmatrix}, 2A-0B=\begin{bmatrix} 4 & -14 \\ 2 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

4. $A+B=\begin{bmatrix} 3 & -9 & 3 \\ 1 & -4 & 8 \end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 7 & -8 & -6 \end{bmatrix}, A-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix} 5 & 6 & -16 \\ 25 & -30 & -17 \end{bmatrix}, 2A-0B=\begin{bmatrix} 4 & -6 & -2 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix}$

5. $A+B=\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{16}{3} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & -2 & 10 \\ \frac{23}{3} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{14}{3} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{3} & 8 & -6 \\ \frac{19}{3} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

   $A-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 4A-3B=\begin{bmatrix} \frac{23}{5} & 19 & \frac{1}{2} \\ -1 & 27 & -16 \\ 26 & -\frac{8}{5} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$

   $2A-0B=\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 10 & \frac{1}{4} \\ 0 & 6 & 4 \\ 14 & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$

6. $\{\, a=7, b=2, c=2, d=5, v=-3, w=4$
7. $\{\, n=-3, w=-10, x=3, y=6$
8. $\{\, v=4, w=-2, x=3, y=7, z=2$

EJERCICIO 163

1. $AB=\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$
2. $AB=\begin{bmatrix} 5 & -5 \end{bmatrix}$
3. $BA=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$
4. $AB=\begin{bmatrix} -7 & -7 & -4 \\ -5 & -5 & -8 \end{bmatrix}$
5. $AB=\begin{bmatrix} -8 & -8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$
6. $AB=\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$
7. $AB=\begin{bmatrix} -1 & 25 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}, A(BC)=\begin{bmatrix} 74 & 98 \\ 20 & 26 \end{bmatrix}$
8. $AB=\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A(B-2C)=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, A(BC)=\begin{bmatrix} 17 & -3 \\ 8 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

EJERCICIO 164

1. det $A = 22$
2. det $B = 8$
3. det $C = -50$
4. det $D = 43$
5. det $E = 122$

EJERCICIO 165

1. $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{14}\end{bmatrix}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$

2. $B^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

3. $C^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

4. $D^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{6}{7} & \frac{2}{7}\\ -\frac{12}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}6 & 2\\ -12 & 3\end{bmatrix}$

5. $E^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & 1 & -3\\ -1 & 1 & 3\\ 3 & 3 & -3\end{bmatrix}$

6. $F^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{24} & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{8}\end{bmatrix}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}-3 & 18 & -3\\ 6 & -12 & 6\\ 5 & -14 & -3\end{bmatrix}$

7. $G^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{17} & \frac{2}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{1}{17} & -\frac{11}{34} & -\frac{4}{17}\\ \frac{1}{17} & \frac{3}{17} & -\frac{4}{17}\end{bmatrix}=\frac{1}{34}\begin{bmatrix}-10 & 4 & 6\\ 2 & -11 & -8\\ 2 & 6 & -8\end{bmatrix}$

8. $H^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2 & -1 & -3\\ -2 & 6 & 18\\ -2 & 6 & 8\end{bmatrix}$

9. $J^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{43}{6} & \frac{49}{6} & -\frac{19}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{67}{6} & -\frac{79}{6} & \frac{31}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{16}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}43 & 49 & -19 & 1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -67 & -79 & 31 & -1\\ -32 & -38 & 14 & -2\end{bmatrix}$

EJERCICIO 166

1. $\begin{cases}x=5\\ y=-2\end{cases}$

2. $\begin{cases}m=-4\\ n=2\end{cases}$

3. $\begin{cases}a=11\\ b=-10\end{cases}$

4. $\begin{cases}a=4\\ b=-3\\ c=2\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=5\\ y=2\\ z=-1\end{cases}$

6. $\begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=-2\end{cases}$

CAPÍTULO 28

EJERCICIO 167

1. $(x-1)$ y $(x-5)$
2. $(x+1)$ y $(2x+3)$
3. $(x+2)(3x-2)$ y $(x-2)$
4. $(x+1)$ y$(x+3i)$
5. $(x+2i)$ y$(x-2i)$
6. (x), $(x+1-i)$ y $(x+2+3i)$
7. Residuo –72
8. Residuo $-\frac{9}{2}$
9. Residuo $\frac{273}{2}$
10. Residuo 12
11. Residuo 264
12. Residuo –240
13. $k=2$
14. $k=3$, $k=-6$
15. $k=6$, $k=\frac{46}{3}$
16. $k=4$, $k=-\frac{167}{73}$
17. $k=4$, $k=-\frac{1}{3}$
18. Todos son raíces
19. Todos son raíces
20. Ninguno es raíz
21. $x=-1$, $x=\frac{11}{2}$
22. $x=2+i$, $x=-\frac{3}{5}$
23. $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{5}{3}$
24. $x=2i$, $x=-2i$
25. $x=4$, $x=\frac{3}{5}$
26. $f(x)=x^3+4x^2-5x$
27. $f(x)=x^3+4x^2-9x-36$
28. $f(x)=3x^3-x^2+48x-16$
29. $f(x)=8x^3+2x^2-43x-30$
30. $f(x)=x^4-5x^3-13x^2+133x-260$
31. $f(x)=6x^4-5x^3+7x^2-5x+1$
32. $f(x)=3x^3+5x^2+4x-2$
33. $f(x)=x^3-x^2-x+1$
34. $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$
35. $f(x)=x^4-6x^2+8x-3$
36. $f(x)=x^4-4x^3+16x-16$
37. $f(x)=x^5+2x^4-x-2$
38. $x=-1$, $x=1$, $x=5$
39. $x=5$, $x=4$, $x=3$
40. $x=\frac{1}{5}$, $x=-\frac{2}{3}$, $x=4$
41. $x=-\frac{5}{2}$, $x=-2+i$, $x=-2-i$
42. $x=2$, $x=-3$, $x=7$, $x=0$
43. $x=-4i$, $x=4i$, $x=-2$, $x=3$
44. $x=-\frac{2}{3}$, $x=\frac{5}{2}$, $x=-1+i$, $x=-1-i$
45. $x=-i$, $x=i$, $x=-4$, $x=-3$, $x=\frac{1}{2}$

Tabla de logaritmos

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4609	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	.6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla de logaritmos (*cont…*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7780	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	2	2	2	2	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	2	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	2	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	2	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	2	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla de antilogaritmos

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1431	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1478	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	3	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	3	4	5	6	6
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla de antilogaritmos (*cont…*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	2	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	1	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7819	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	4	7	9	11	14	16	18	20
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Bibliografía

Baldor, Aurelio, *Aritmética teórico-práctica*, México, Cultural, 1988.

Pérez, Seguí, María Luisa, *Teoría de números*, México, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2004.

Vinogradov, Iván, *Fundamentos de la teoría de los números*, España, Mir, Moscú, 1977.

http://medusa.unimet.edu.ve/sistemas

http://www.epsilones.com/paginas/t-etimologias.html

http://www.arundanet.com/matesxronda/citas.php?id=3

http://www. arundanet.com/ matesxronda/ documentos.php?mod=historia&id=2

http://www.arrakis.es/~mcj/alkhwa.htm

http://www.mat.usach.cl/histmat/html/demo.html

Uno de los grandes problemas para el aprendizaje de las Matemáticas es sin duda el no manejar los temas de Aritmética. Por citar algunos ejemplos: ¿cuántas veces se tiene dificultad para entender Álgebra al no saber resolver una suma de fracciones?, ¿cuántas veces aprender Física se complica por no poder expresar cantidades en notación científica? o simplemente, ¿cuántas veces se tienen problemas en la vida cotidiana al no obtener un porcentaje correcto?

Asimismo, el Álgebra es una rama fundamental de las Matemáticas, muchas veces incomprendida, pero valorada por todas aquellas personas que han logrado modelar problemas de la vida cotidiana y darles solución gracias a su dominio y comprensión.

El libro tiene por objetivo facilitar el conocimiento de las operaciones básicas y convertirse en la referencia inmediata para entender y aprender lo relacionado con el Álgebra.

La primera parte del libro estudia el conocimiento de la Aritmética donde a través de once capítulos se analizan: conceptos básicos, números enteros y racionales con sus respectivas operaciones, teoría de números, potenciación y radicación, notación científica, logaritmos, razones y proporciones, sistemas de numeración y al final, un capítulo de razonamiento matemático, donde el lector podrá verificar su grado de aprendizaje en esta área.

En la segunda parte del libro se estudia lo correspondiente al Álgebra, donde a través de diecisiete capítulos, se analizan temas como: lógica y conjuntos, conceptos básicos del Álgebra, productos notables, factorización, fracciones algebraicas, ecuaciones de primer y segundo grado con aplicaciones, función lineal, sistemas de ecuaciones, potenciación, radicación, números complejos, desigualdades, logaritmos, progresiones, matrices y raíces de una ecuación.

Bajo el fundamento de que la persona que aprende Matemáticas, piensa, analiza, razona y, por tanto, actúa con lógica, el libro se presenta con un enfoque 100% práctico, es decir, se aborda con sencillez la teoría y se pone mayor énfasis en los ejemplos que servirán al estudiante para resolver los ejercicios propuestos y verificar su aprendizaje consultando las respectivas respuestas que se encuentran al final de cada sección. También se encontrará con una serie de problemas de aplicación, los cuales vinculan las matemáticas a situaciones reales.

Por todo ello, *Aritmética y Álgebra* es un libro de referencia obligada, que no puede faltar en la biblioteca personal de todo estudiante o profesor, ya que es una obra para el que aprende y para el que enseña.

Para obtener más información acerca del Colegio Nacional de Matemáticas visite:
www.conamat.com


ISBN 978-607-32-3582-2
90000
9 786073 235822